

Kalkulus

Sáfár Orsolya

Függvények folytonossága, derivátja

Folytonosság

Definíció Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ és $f(a) = A$. Azon pontok halmaza, ahol folytonos a függvény a folytonossági pontok. A D_f azon torlódási pontjait, ahol nem folytonos a függvény szakadási pontnak nevezzük. Ezeket három csoportba soroljuk:

- ▶ **megszüntethető szakadás** $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ de $a \notin D_f$ vagy $f(a) \neq A$.
- ▶ **véges ugrás** $\exists \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \in \mathbb{R}$ és $\exists \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \in \mathbb{R}$ de nem egyenlők.
- ▶ **lényeges szakadás** összes többi eset, azaz nem létezik bármelyik oldali limesz, vagy létezik, de nem véges

Példa

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási pontjait és azok típusát!

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{ha } x \leq -1 \\ \frac{3}{x+1} - \frac{25}{8} & \text{ha } -1 < x < 0 \\ -\frac{1}{8} & \text{ha } x = 0 \\ \frac{\cos(x) - 1}{4x^2} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Bolzano-tétel és alkalmazása

Tétel /Bolzano/ Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallum összes pontjában és C egy tetszőleges olyan szám amely $f(a)$ és $f(b)$ közé esik, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$ amelyre $f(c) = C$.

Következmény: Ha $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ -n és $f(a)f(b) < 0$, akkor $f(x)$ -nek van gyöke (a, b) -n.

Ezt a következményt használja egy tetszőleges függvény gyökének meghatározására az intervallumfelező algoritmus. Ez, bár a többi gyökkereső módszerhez viszonyítva lassú, de igen robosztus eljárás egy gyök megkeresésére.

Intervallumfelező algoritmus

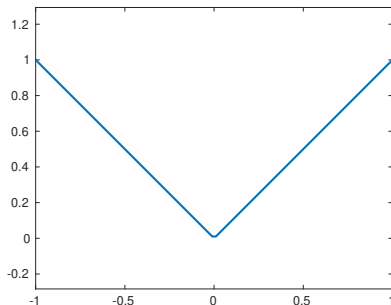
Az algoritmus kiindul egy olyan $[a, b]$ kezdőintervallumból amelyre $f(a)f(b) < 0$, majd meghatározza az intervallum felezőpontját, jelöljük c -vel. Három eset lehetséges:

- ▶ $f(c) = 0$, ekkor készen vagyunk
- ▶ $f(c)f(a) < 0$, ekkor az $[a, c]$ egy fele olyan hosszú intervallum mint $[a, b]$ és biztosan tartalmaz gyököt, elég tehát ezt a szűkebb intervallumot vizsgálni
- ▶ $f(c)f(a) > 0$, ekkor viszont biztos, hogy $f(c)f(b) < 0$, mert $f(a)$ és $f(b)$ ellentétes előjelűek, ekkor a $[c, b]$ intervallumot elég tovább vizsgálni.

Egy lépésben tehát az algoritmus el tudja dobni az intervallum felét, a k . lépésben $\frac{b-a}{2^k}$ hosszú lesz azon intervallum, ahol a gyök lehet. Akkor állítjuk meg az iterációt, ha ez már elegendően kicsi.

A derivált fogalma

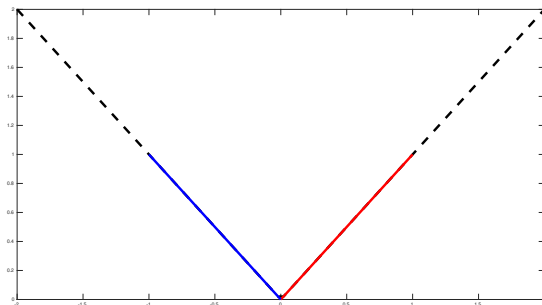
Alapfeladat: villamossínt építünk útkereszteződésbe. Jó lenne a merőlegesen forduló sín?



Nem az igazi, mert a sebességvektor a fordulónál ugrana. De hogyan mérhetjük egy függvény 'simaságát'?

Érintő

Legyen $x \in D_f$ tetszőleges rögzített. Rajzoljuk meg azt a húst a függvényhez, amelynek egyik végpontja a függvény grafikonján van az x pont felett, a másik pedig valamilyen h -val arrébb. Az előbbi példában ha $x = 0$ akkor így néznek ki a húrok.



A húrok meredeksége jellemzi a függvényértékek változásának gyorsaságát x közelében.

A formális definíció

Definíció: Legyen $x \in D_f$ a D_f torlódási pontja. Ha létezik a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

határérték és véges, akkor ezen határértéket nevezzük a függvény x pontbeli deriváltjának. Jele: $f'(x)$.

Valójában a limesz belsejében lévő kifejezés nem más, mint a húrok meredeksége. Ha h -t egyre kisebbre veszem, akkor jellemzeni tudom, hogy viselkedik a függvény x_0 közelében.

Ha létezik a húrok meredekségének határértéke az lesz az érintőegyenes meredeksége.

A fenti példában nem létezik a limesz $x = 0$ -ban, mert

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|h|}{h} = 1, \text{ míg } \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|h|}{h} = -1. \text{ De persze } \exists f'(1) = 1.$$

Érintőegyenes

Ha ismerjük az érintő egyenes meredekségét és tudunk egy pontot ami rajta fekszik (jelen esetben $(x_0, f(x_0))$), akkor fel tudjuk írni az érintő egyenes egyenletét.

Induljunk ki a egyenes $y = mx + b$ alakú egyenletéből (itt m az meredekség)! Az eddigiek alapján $m = f'(x_0)$ és ha $(x_0, f(x_0))$ rajta van, akkor kielégíti az egyenes egyenletét, azaz:

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b,$$

innen kifejezve b -t: $b = f'(x_0)x_0 - f(x_0)$. Majd visszaírva az eredeti egyenletbe:

$$y = f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Néhány nevezetes derivált

Állítás: $\sin'(x) = \cos(x)$, ugyanis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x),$$

mert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} \frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} -\sin(h) \frac{\sin(h)}{h(\cos(h) + 1)} = 0$$

Állítás: $\cos'(x) = -\sin(x)$, hasonló számolással.

Példa

Ezek alapján a $\sin$ függvényhez az $x_0 = 0$ pont felett húzott érintőegyenes:

$$y_{\text{érintő}} = \cos(0)(x - 0) + \sin(0) = x.$$

Ugyanakkor az $x_0 = \frac{\pi}{2}$ pont felett:

$$y_{\text{érintő}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

azaz itt az érintő vízszintes. Gondoljuk meg, mit jelent a deriváltra nézve, ha egy függvény érintője függőleges!

Néhány nevezetes derivált II

Állítás: $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$, spec. $(e^x)' = e^x$ ugyanis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x+h)} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Állítás: Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor $(x^n)' = nx^{n-1}$, ugyanis

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\sum_{i=0}^n x^{n-i} h^i \right) - x^n}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n h^0 + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots) - x^n}{h} &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Ezt a képlet igaz tetszőleges valós kitevőre is ha x pozitív, de ezt nem bizonyítjuk.

Deriválási szabályok

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, ugyanis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

- Ha $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $(cf(x))' = cf'(x)$, ugyanis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Emiatt $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

Deriválási szabályok - folytatás

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ugyanis

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \\ f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

Deriválási szabályok - folytatás

- ▶ Reciprok: $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$
- ▶ Hányados: $\left(\frac{f}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- ▶ Kompozíció: $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
- ▶ Inverz: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Példák

Példa: Számítsuk ki $\tan(x)$ deriváltját!

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos(x) \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$
$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Példa: Számítsuk ki $\ln(x)$ deriváltját!

Az inverz függvény deriválási szabályából:

$$\ln(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

Példák az inverz szabályra

Példa: Számítsuk ki $\arctan(x)$ deriváltját!

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Példa: Számítsuk ki $\arcsin(x)$ deriváltját!

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Hasonlóképpen:

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Itt azért érdemes elgondolkodni a derivált értelmezési tartományán.
Mi történik, ha $|x| = 1$?

Példa a deriválási szabályok együttes alkalmazására

Határozzuk meg a $\frac{\sin^2(3x^3)}{\sqrt{6x-2}}$ függvény deriváltját!

$$\left(\frac{\sin^2(3x^3)}{\sqrt{6x-2}} \right)' =$$
$$\frac{2 \sin(3x^3) \cos(3x^3) 9x^2 \sqrt{6x-2} - \sin^2(3x^3) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6x-2}} 6}{6x-2}$$