MEGOLDÓKULCS

1. feladat

Mivel nekünk $x_0 = 1$ bázisponttal kell a sorfejtés, ezért a kérdéses kifejezésben nem x hatványait akarjuk látni, hanem $(x-1)$ hatványait. Tehát elöször a $2x - x^2$ -et átírjuk $a + b(x-1) + c(x-1)^2$ alakra (2 pont):

$$2x - x^2 = 1 - (x-1)^2,$$

tehát innen $f(x) = e^{2x-x^2} = e^{1-(x-1)^2} = e^1 e^{-(x-1)^2} =$

$$= e\left(1 + (-(x-1)^2) + \frac{(-(x-1)^2)^2}{2} + \frac{(-(x-1)^2)^3}{3!} + \frac{(-(x-1)^2)^4}{4!} + \dots\right.$$
$$= e \;-\; e(x-1)^2 \;+\; e\frac{(x-1)^4}{2} \;-\; e\frac{(x-1)^6}{3!} \;+\; e\frac{(x-1)^8}{4!} \;-\; \dots$$

(8 pont). Innen látszik: az $(x-1)^{17}$ -es tag együtthatója nulla $\Rightarrow f^{(17)}(1) = 0$ (2 pont), míg az $(x-1)^{18}$ -os tag együtthatója

$$a_{18} = -e\frac{1}{9!}$$

(2 pont), amiből $f^{(18)}(1) = 18! \cdot a_8 = -e\frac{18!}{9!}$ (2 pont).

2. feladat

Több jó gondolatmenettel is el lehet jutni a megoldáshoz.

I. megoldás. Mivel $f(x)' = \arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$, ezért az $x^2 < 1$ tartományon

$$f(x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

(4 pont). Innen, fölhasználva, hogy $f(0) = 0$, az említett tartományon

$$f(x) = \int_0^x f(x)' dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

(4 pont). (Természetesen a 4 + 4 pont azoknak is jár, akik egyszerüen csak emlékezetből leírták az arctan sorát.) A kérdéses másodfokú Taylor-polinom tehát $T_2(x) = x$ (2 pont), így becslésünk

$$\arctan(\frac{1}{10}) = f(\frac{1}{10}) \approx T_2(\frac{1}{10}) = \frac{1}{10}$$

(1 pont). Ha f fönt megadott sorába beírjuk az $x = \frac{1}{10}$ -et, akkor egy Leibnitz-típusú sort kapunk (3 pont): a tagok előjele alternál, abszolút értékük pedig nyilvánvalóan monoton csökken és tart a nullához. (Vigyázat: pl. x=2 esetén a sor nem lenne Leibnitz — egyátalán, nem is lenne konvergens — hiszen a tagok nem tartanának a nullához. Aki még az x -be való behelyettesítés *elött* odaírta, hogy "Leibnitz-sor", annak itt a 3 helyett csak 1 pont jár.) Mivel az első elhagyott tag a $-\frac{(1/10)^3}{3} < 0$, ezért a becslés az igazi érték alatt van (3 pont) és a becslés hibája $\leq \frac{(1/10)^3}{3} < 10^{-3}$ (3 pont).

II. megoldás Kis számolással

$$\begin{aligned} f(x) = \arctan(x) &\Rightarrow f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} &\Rightarrow f'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1 \\ f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} &\Rightarrow f''(0) = \frac{0}{1+1^2} = 0 \end{aligned}$$

(4 pont) amiből $T_2(x) = 0 + x + 0 \cdot x^2 = x$ (2 pont). Tehát becslésünk

$$\arctan(\frac{1}{10}) = f(\frac{1}{10}) \approx T_2(\frac{1}{10}) = \frac{1}{10}$$

(1 pont). A Lagrange-féle hibatagra vonatkozó tétel szerint létezik olyan $z \in [0, \frac{1}{10}]$, amire

$$f(\frac{1}{10}) - T_2(\frac{1}{10}) = \frac{f^{(3)}(z)}{3!}(\frac{1}{10} - 0)^3 = f^{(3)}(z)\frac{1}{6000}$$

(3 pont). Mármost

$$f^{(3)}(z) = \frac{-2(1+z^2)^2 + 4z(1+z^2)2z}{(1+z^2)^4} = \frac{(8z^2-2)(1+z^2)}{(1+z^2)^4} = \frac{8z^2-2}{(1+z^2)^3}$$

(2 pont). Itt a nevező mindíg pozitív és a kérdéses $z \in [0, \frac{1}{10}]$ tartományon a $8z^2 - 2 < 0$; tehát a hibatag negatív $\Rightarrow$ az igazi érték a becslésünk alatt van (3 pont), továbbá a hiba abszolút értéke $\leq$

$$\left| f^{(3)}(z)\frac{1}{6000} \right| = \frac{1}{6000} \left| \frac{8z^2-2}{(1+z^2)^3} \right| \leq \frac{1}{6000}\frac{2}{1} = \frac{1}{3 \cdot 10^3} < 10^{-3},$$

(3 pont), hiszen a kérdéses tartományon $|8z^2 - 2| = 2 - z^2 \leq 2$.

3. feladat

Természetesen a $g(x) := 2 + \cos(2x)$ képlettel definiált függvény Fourier-sora egyszerűen önmaga:

$$g(x) = 2 + 0 \cdot \sin(x) + 0 \cdot \cos(x) + 0 \cdot \sin(2x) + 1 \cdot \cos(2x) + 0 \cdot \sin(3x) + \dots$$

(5 pont), így f kérdéses sorának meghatározásához elég a sgn függvény $[-\pi, \pi]$ intervallumon vett Fourier-együtthatóinak kiszámolása. Mármost

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\mathrm{sgn}(x)\,dx = 0$$

(2 pont) mert sgn páratlan függvény, míg

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\mathrm{sgn}(x)\,dx &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(k\pi)-1}{k}\right] = 2\frac{(-1)^k-1}{k\pi}\end{aligned}$$

(5 pont) minden $k = 1, 2, \ldots$ természetes számra. Tehát a kérdéses Fourier sor =

$$2 + \cos(2x) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k\pi}\sin(kx)$$

(4 pont).

4. feladat

a) $\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0}(|x|^y)) = \lim_{y\to0}(|0|^y) = \lim_{y\to0}(0) = 0$, míg $\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0}(|x|^y)) = \lim_{x\to0}(|x|^0)) = \lim_{x\to0}(1) = 1$. Tehát a kérdéses határérték nemlétezik (7 pont).

b)

$$\frac{\sin(x)y^2 - xy^2}{x^3 + xy^2} = \frac{\frac{\sin(x)}{x}y^2 - y^2}{x^2+y^2} = (\frac{\sin(x)}{x} - 1)\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

(4 pont). Mivel $(\frac{\sin(x)}{x} - 1) \to 0$ és $0 \le \frac{y^2}{x^2+y^2} \le 1$, a kérdéses határérték létezik és értéke nulla (5 pont), mert kifejezésünk egy nullához tartó és egy korlátos tag szorzata.

5. feladat

Ha $(x, y) \neq (0, 0)$ akkor $(x^2 + y^2) \neq 0$ így a parciális deriváltak

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= \frac{2xy(x^2+2y^2) - x^2y(2x)}{(x^2+2y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2+2y^2)^2} \\ \partial_2 f(x,y) &= \frac{x^2(x^2+2y^2) - x^2y(4y)}{(x^2+2y^2)^2} = \frac{x^4 - 2x^2y^2}{(x^2+2y^2)^2}\end{aligned}$$

léteznek és folytonosak (4 pont), ezért ilyenkor a teljes derivált létezik és

$$Df(x,y) = (\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)) = \frac{1}{(x^2+2y^2)^2}(4xy^3, x^4 - 2x^2y^2)$$

(1 pont). Definíció szerint

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

és hasonló indoklással igazolható, hogy $\partial_2 f(0,0)$ is létezik és értéke nulla (4 pont). A $\underline{v}$ vektor szerinti derivált értéke a $(0,0)$ -ban viszont

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{v}t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t)-f(0,0)}{t} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2 t}{t^2+2t^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(4 pont). Ha a teljes derivált a $(0,0)$ -ban létezne, akkor az $Df(0,0) = (\partial_1 f(0,0), \partial_2 f(0,0)) = (0,0)$ lenne, és így $D_{\underline{v}} f(0,0) = Df(0,0)\underline{v}$ is nullának adódna. Láttuk azonban, hogy ez nincs így $\Rightarrow$ nemlétezik $Df(0,0)$ (3 pont).

6. feladat

A probléma megeggyezik a példatár 3.5 -ös fejezetének 40. feladatával, így a megoldás részletes ismertetését itt mellőzzük. Részpontok:

- a lok. szélsőérték szükséges feltételéből adódó egyenletrendszer felírása = 4 pont
- a kapott egyenletrendszer három megoldásának megtalálása = 3 pont
- a második derivált mátrixának helyes felírása = 3 pont
- a lok. min. és a két nyeregpont beazonosítśa = 4 pont

Ha $y=0$, akkor $f(x,y) = f(x,0) = (x+1)^2 - (x^2-2)^2$, ami nyilvánvalóan tart a negatív végtelenbe, ha $x\to\infty$. Ezzel szemben, ha $x=0$, akkor $f(x,y) = f(0,y) = (-y+1)^2 - 4 = y^2 - 2y - 3$, ami viszont a + végtelenbe tart. Tehát f -nek nem lehet se globális minimuma, se globális maximuma (2 pont).