01/009 (p017): Mi a könnyebb: 6 kockával legalább 1 darab hármast dobni, vagy 12 kockával legalább 2 darab hármast dobni?

(p221): Mindkét esetben érdemesebb a komplementer esemény valószínűségét meghatározni. Annak a valószínűsége, hogy nem dobunk hármast 6 kockával: $(5/6)^6$. Annak a valószínűsége, hogy nem dobunk legalább 2 darab hármast 12 kockával: $(5^{12}+12\cdot 5^{11})/6^{12}$. Utóbbi nagyobb, ezért az eredeti két eset közül az első valószínűsége nagyobb, azaz könnyebb 6 kockával legalább egy hármast dobunk.

Megjegyzés: kiszámolás nélkül hogyan bizonyítható, hogy $6^6 < 5^6 + 12 \cdot 5^5$?

01/010 (p017): 22 futballistából két csapatot sorsolnak ki véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két legjobb játékos ugyanabba a csapatba kerül?

(p221): Klasszikus modell: egy esemény = melyik 11 elemű részhalmaz az első csapat. Összes eset $\binom{22}{11}$. Kedvező eset kétféle van annak megfelelően, hogy melyik csapatban van a két legjobb játékos. Ha az első csapatban van, akkor az $\binom{22-2}{11-2}$ eset. Ha a második csapatban van, akkor az $\binom{22-2}{11}$ eset. Kedvező esetek száma $\binom{22-2}{11-2} + \binom{22-2}{11}$. Tehát a kérdezett valószínűség:

$$\frac{\binom{20}{9} + \binom{20}{11}}{\binom{22}{11}} = \frac{10}{21}$$

01/015 (p017): Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X. (A) $P(X = 7) =$? (B) Mennyi az X legvalószínűbb értéke?

(p222,223): Klasszikus modell: melyik 12 elemű részhalmaz a csapat. Összes eset $\binom{30}{12}$. Kedvező eset az, hogy 7 lány van. Ez megvalósul $\binom{17}{7} \cdot \binom{30-17}{12-7}$ esetben.

$$\frac{\binom{17}{7} \cdot \binom{13}{5}}{\binom{30}{12}}$$

$k \in \{0, 1, 2, ..., 12\}$ lány előfordulásának valószínűsége

$$P(X = k) = \frac{\binom{17}{k} \cdot \binom{30-17}{12-k}}{\binom{30}{12}}$$

Maximum az alábbi hányados alapján látszik.

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} = \frac{(17 - k) \cdot (12 - k)}{(k + 1) \cdot (k + 2)}$$

Ez $k \leq 6$ esetén nagyobb 1-nél, és $7 \leq k$ esetén kisebb 1-nél. Tehát 7 lány előfordulása a legvalószínűbb.

01/016 (p017): Mire tippel, melyik lottószámnál fordul elő leggyakrabban, hogy a kihúzott öt szám közül az a második legnagyobb?

(p223): Először határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a rögzített k szám a második legnagyobb (nagyságsorrendben a negyedik), $k = 4, 5, ..., 89$. Az összes lehetséges húzások száma: $\binom{90}{5}$. Ha a k a második legnagyobb, akkor nálakisebb három számot $\binom{k-1}{3}$ féleképpen, nála nagyobbat pedig $\binom{90-k}{1}$ féle képpen lehet húzni. A keresett valószínűség

$$\frac{\binom{90-k}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{k-1}{3}}{\binom{90}{5}}$$

Csak a számláló függ k-tól, így annak maximumát kell keresni, ez $k = 68$.

01/034 (p020): Találomra felrakunk 8 bástyát egy sakktáblára. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a bástyák nem ütik egymást?

(p225): Klasszikus modell:

$$\frac{8!}{\binom{64}{8}}$$

01/036 (p020): Mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő heti lottószámok legnagyobbika kisebb a rákövetkező hét lottószámainak legkisebb számánál?

(p225): Klasszikus modell. Kedvező esetben a következő heti lottószámok mindegyike kisebb a rákövetkező hét lottószámok mindegyikénél. Így a két húzás olyan tíz elemű halmazt alkot, melyből az alsó öt a következő heti húzás, és a felső ot a rákövetkező heti húzás.

$$\frac{\binom{90}{10}}{\binom{90}{5}^2}$$

01/043 (p021): Két dobókockát egyszerre feldobunk, majd megismételjük a dobást. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első dobás kimenetele megismétlődik, ha a két dobókocka (A) megkülönböztethető, és ha (B) nem megkülönböztethető?

(p226): Klasszikus modell. Mindkét esetre mehet a „megkülönböztetős modell”, mert a modellezhetek megkülönböztethetőséget, ha aztán a kedvező eseményt a nem megkülönböztethetőség szerint értelmezem.
(A) Kedvező eset első dobása 6^2 féle lehet, és ezek mindegyikéhez 1 féle második dobás tartozik:

$$\frac{(6^2)\cdot 1}{6^4} = \frac{1}{36} \qquad = \frac{6}{216} < \frac{11}{216}$$

(B) Kedvező eset első dobása két típusú lehet. A két kocka azonosat mutat típus 6 féle lehet, és ezek mindegyikéhez 1 féle második dobás tartozik. A két kocka eltérőt mutat típus $6\cdot 5$ féle lehet, és ezek mindegyikéhez 2 féle második dobás tartozik.

$$\frac{6\cdot 1 + (6\cdot 5)\cdot 2}{6^4} = \frac{11}{216}$$