Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2013. május 16.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyen $A = (2, 4, 6)$, $B = (4, 6, -2)$. Legyen S az AB szakasz felező merőleges síkja (vagyis az a sík, melynek pontjai ugyanolyan távol vannak A-tól és B-től). Határozzuk meg S (egy) egyenletét.

* * * * *

S átmegy az AB szakasz felezőpontján, (2 pont)
azaz a $(3, 5, 2)$ ponton. (2 pont)
Mivel S merőleges az AB szakaszra, az $\overrightarrow{AB}$ normálvektora lesz S-nek. (3 pont)
Így S-nek normálvektora $(2, 2, -8)$. (1 pont)
Innen S (egy) egyenlete: $2x + 2y - 8z = 0$. (2 pont)

2. Vektorteret alkotnak-e a szokásos műveletekkel azok a valós polinomok, melyekben a harmadfokú és az ötödfokú tag együtthatójának összege 0?

* * * * *

Az előadáson volt róla szó, hogy az összes valós polinomok a szokásos műveletekkel vektorteret alkotnak, elég tehát azt ellenőriznünk, hogy a kérdéses polinomok (nevezzük a halmazukat P-nek) ennek alterét alkotják-e. (2 pont)
Ehhez meg kell vizsgálnunk, hogy P zárt-e az összeadásra és a valós számmal szorzásra. (1 pont)
Legyenek a tetszőleges a, illetve b polinomok harmadfokú tagjainak együtthatói a_3, illetve b_3, az ötödfokú tagok együtthatói pedig a_5, illetve b_5. Ekkor $a_3 + a_5 = 0$ és $b_3 + b_5 = 0$. (1 pont)
A $c = a + b$ polinom harmadfokú tagjának együtthatója $c_3 = a_3 + b_3$, ötödfokú tagjának együtthatója $c_5 = a_5 + b_5$. (1 pont)
$c_3 + c_5 = a_3 + b_3 + a_5 + b_5 = 0$, (1 pont)
vagyis az $a + b$ polinom is P-beli. (1 pont)
Tetszőleges λ valós számra a $d = \lambda a$ polinom harmadfokú tagjának együtthatója $d_3 = \lambda a_3$, ötödfokú tagjának együtthatója $d_5 = \lambda a_5$. (1 pont)
$d_3 + d_5 = \lambda a_3 + \lambda a_5 = 0$, (1 pont)
tehát a d polinom is P-beli, azaz P a szokásos műveletekkel vektorteret alkot. (1 pont)

Természetesen közvetlenül is belátható, hogy P vektortér a szokásos műveletekkel, ehhez mind a tíz axiómát ellenőrizni kell. A megoldásban szereplő axiómákért ilyenkor a megoldásban szereplő pontszámokat adjuk (4, illetve 2), 1-1 pontot adjunk a nullvektor és az ellentett axiómájáért, 1 pontot az összes többiért együtt, végül 1 pontot a megfelelő következtetés levonásáért.

3. Határozzuk meg a c valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{v} \in \mathbb{R}^4$ vektorok generátorrendszert alkotnak.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \\ c \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} c \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

4 vektor egy 4 dimenziós térben akkor és csak akkor alkot generátorrendszert, ha függetlenek, (1 pont)
hiszen ha függetlenek lennének, de nem alkotnának generátorrendszert, akkor egy általuk nem generált vektorral együtt már 5 elemű független rendszert alkotnának, ami lehetetlen, (1 pont)
másrészt ha nem lennének függetlenek, akkor egy alkalmas elemet elhagyva egy három elemű generátorrendszert kapnánk, ami szintén lehetetlen. (1 pont)
A 4 vektor akkor lesz független, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort, (1 pont)
vagyis az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & c & 0 \\ c & c & c & 4 & 0 \\ c & c & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. (1 pont)
Ez ekvivalens azzal, hogy a bal oldali mátrix determinánsa 0. (1 pont)
A determinánst a 4. sor szerint kifejtve, majd a kapott determinánst a 3. sor szerint kifejtve (vagy akár a definíció alapján) $c^2(c^2 - 12)$ adódik. (1 pont)
Ez pontosan akkor lesz 0, ha $c = 0$, vagy $c = \sqrt{12}$ vagy $c = -\sqrt{12}$. (1 pont)
Ezen c értékekre tehát a vektorok nem alkotnak generátorrendszert, (1 pont)
minden más c-re viszont igen. (1 pont)

4. Egy tíz dimenziós vektortérben két bázisnak pontosan kilenc közös eleme van. Igaz-e, hogy a bázisok nem közös elemei biztosan számszorosai egymásnak?

* * * * *

A kilenc közös vektor egy 9 dimenziós teret feszít, (2 pont)
amiben a nem közös vektorok egyike sincs benne. (1 pont)
Ebből azonban nem következik, hogy ezek egymás számszorosai, hiszen legyen pl. a tér az $\mathbb{R}^{10}$, a kilenc közös vektor a szokásos bázis első kilenc vektora, a nem közös vektorok pedig a szokásos bázis tizedik vektora, illetve a szokásos bázis vektorainak összege. (5 pont)
Könnyen látható, hogy így valóban két bázist kapunk (1 pont)
és hogy a két nem közös vektor nem egymás számszorosa. (1 pont)

Természetesen a jó és megindokolt ellenpélda is elég a 10 ponthoz, nem muszáj a megoldás első mondatának szerepelnie. Egy nem maximum pontos megoldásban azonban értékeljük ezeket a gondolatokat.

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden értékére.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ 2x + y + cz + 2w &= c \\ 4x + 2y + cz + cw &= c \end{aligned}$$

* * * * *

Gauss-eliminációval az egyenletrendszer az $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4-c & -2 & 4-c \\ 0 & 0 & -c & c-4 & -c \end{array}\right)$ alakra hozható. (2 pont)

Ha $c \neq 0$, akkor a harmadik sort c-vel osztva (1 pont)

és a Gauss-eliminációt folytatva az $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & c+\frac{8}{c}-4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c-\frac{16}{c}+6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{c}-1 & 1 \end{array}\right)$ redukált lépcsős alakot kapjuk,

(3 pont)

ahonnan a megoldás: $x = (-c - \frac{8}{c} + 4)p$, $y = (c + \frac{16}{c} - 6)p$, $z = 1 - (\frac{4}{c} - 1)p$, $w = p$, ahol p tetszőleges valós szám. (1 pont)

Ha $c = 0$, akkor az alsó sorban jobbra lépve majd -4-gyel osztva és a Gauss-eliminációt folytatva az $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ redukált lépcsős alakot kapjuk, (2 pont)

ahonnan a megoldás: $x = 2p - 2$, $y = 4 - 4p$, $z = p$, $w = 0$, ahol p tetszőleges valós szám. (1 pont)

6. Egy 5×5–ös mátrixban háromszor szerepel a 0, négyszer az 1 és tizennyolcszor a 2. Mutassuk meg, hogy a mátrix determinánsa nem 1.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A determináns definíció szerinti kiszámításakor keletkező szorzatoknak 5 tényezője lesz, (1 pont)
így minden szorzatban lesz olyan tényező, amelyik páros, (3 pont)
hiszen csak 4 páratlan szám szerepel a mátrixban. (2 pont)
Ezek szerint az összes szorzat páros lesz, (1 pont)
vagyis a determináns (ami ezen szorzatok valamilyen előjelekkel vett összege) is páros, (2 pont)
azaz nem lehet 1. (1 pont)

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$