ANALÍZIS 2
Mérnök Informatikus szak

II. ZÁRTHELYI

2012 november 19
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

MEGOLDÓKULCS

1. feladat

Mivel nekünk $x_0 = 1$ bázisponttal kell a sorfejtés, ezért a kérdéses kifejezésben nem x hatványait akarjuk látni, hanem $(x-1)$ hatványait. Tehát elöször a $3 - x^2 + 2x$ -et átírjuk $a + b(x-1) + c(x-1)^2$ alakra (2 pont):

$$3 - x^2 + 2x = 4 - (x-1)^2,$$

tehát innen

$$f(x) = \sqrt{4 - (x-1)^2} = 2(1+y)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{ahol } \ y = -\frac{(x-1)^2}{4}$$

(2 pont). A binomiális sorfejtést használva, ha $|y| < 1$ akkor $f(x) = 2(1+y)^{\frac{1}{2}} =$

$$\begin{aligned} &= 2\left[1 + \binom{1/2}{1} \ y \ + \binom{1/2}{2} y^2 + \binom{1/2}{3} y^3 + \dots \right. \\ &= 2\left[1 - \binom{1/2}{1}\frac{(x-1)^2}{4} + \binom{1/2}{2}\frac{(x-1)^4}{4^2} - \binom{1/2}{3}\frac{(x-1)^6}{4^3} + \dots \right. \end{aligned}$$

(8 pont). Innen látszik: az $(x-1)^7$ -es tag együtthatója nulla $\Rightarrow f^{(7)}(1) = 0$ (2 pont), míg az $(x-1)^8$ -os tag együtthatója

$$a_8 = \frac{2}{4^4}\binom{1/2}{4} = \frac{1}{2^7}\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{4!} = -\frac{15}{4! \cdot 2^{11}}$$

(2 pont), amiből $f^{(8)}(1) = 8! \cdot a_8 = -\frac{15 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2^{11}} = -\frac{15 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 15}{2^7} = -\frac{1575}{128}$ (2 pont).

2. feladat

Mivel $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$, ezért

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

(3 pont) amiből a kérdéses másodfokú Taylor-polinom $T_2(x) = 1 - x^2$ (3 pont). Így becslésünk

$$I = \int_{-0.1}^{0.1} e^{-x^2}\, dx \approx \int_{-0.1}^{0.1} (1 - x^2)\, dx = [x - \frac{x^3}{3}]_{-0.1}^{0.1} = \frac{2}{10} - \frac{2/3}{10^3}$$

(3 pont). A becslés hibájára többféleképpen is tudunk fölső korlátot adni. Lehet persze használni a Lagrange-féle hibatagot, de itt most gyorsabb, ha észrevételezzük, hogy e^{-x^2} fönt megadott sora Leinitz-típusú (3 pont): a tagok előjele alternál, abszolút értékük pedig — legalábbis az $x \in [-0.1, 0.1]$ integrálási tartományon — nyilvánvalóan monoton csökken és tart a nullához. Tehát ha $x \in [-0.1, 0.1]$, akkor

$$|e^{-x^2} - T_2(x)| \leq \frac{x^4}{2} \leq \frac{1}{2 \cdot 10^4}$$

(3 pont) és a hiba $= \left| \int_{-0.1}^{0.1} e^{-x^2}\,dx - \int_{-0.1}^{0.1} T_2(x)\,dx \right| =$

$$= \left| \int_{-0.1}^{0.1} e^{-x^2} - T_2(x)\,dx \right| \leq \int_{-0.1}^{0.1} |e^{-x^2} - T_2(x)|\,dx \leq \int_{-0.1}^{0.1} \frac{1}{2 \cdot 10^4}\,dx = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^4} = 10^{-5}$$

(3 pont). A hiba tehát jóval kisebb, mint 10^{-4}. (A Lagrange-féle hibatagot használva a hibára vonatkozó fölső határ kevésbé erős, de még úgy is kijön, hogy 10^{-4} -nél kisebb.)

3. feladat

Mivel f páratlan, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x)\,dx = 0$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ esetén (3 pont), továbbá

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin(kx)\,dx$$

(4 pont). A fönti integrál kiszámolásához egy parciális integrálást (1 pont) kell csinálni:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi} \left([x \frac{-\cos(kx)}{k}]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos(kx)}{k}\,dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left([x \frac{-\cos(kx)}{k}]_0^{\pi/2} + [\frac{\sin(kx)}{k^2}]_0^{\pi/2)} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} \frac{-\cos(k\frac{\pi}{2})}{k} + \frac{2}{\pi} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k^2} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k^2} - \frac{\cos(k\frac{\pi}{2})}{k} \end{aligned}$$

(4 pont). Tehát ha $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ akkor $a_k =$

$$-\frac{1}{1}, \quad \frac{2}{\pi}\frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{\pi}\frac{1}{4^2}, \quad -\frac{1}{5}, \quad \frac{2}{\pi}\frac{1}{6^2}, \ldots$$

és a kérdéses sor $\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) =$

$$= -\frac{1}{1}\sin(x) + \frac{2}{\pi}\frac{1}{2^2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{2}{\pi}\frac{1}{4^2}\sin(4x) - \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{2}{\pi}\frac{1}{6^2}\sin(6x) + \ldots$$

(2 pont). Mivel f-re teljesülnek a Dirichlet-tétel feltételei, így $\Phi(x)$ kiszámolásához nincs szükségünk a sor explicit alakjára (2 pont): a $\pi/4$ illetve $3\pi/4$ pontokban f folytonos, így $\Phi(\pi/4) = f(\pi/4) = \pi/4$ és $\Phi(3\pi/4) = f(3\pi/4) = 0$ (2 pont), míg

$$\Phi(\pi/2) = \frac{f(\pi/2+) + f(\pi/2-)}{2} = \frac{0 + \pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

(2 pont).

4. feladat

a) Az $y = 0$ mentén a $(0,0)$ -ba tartva a kérdéses kifejezés értéke konstans nulla, de pl. az $y = x$ egyenes mentén

$$\lim_{x\to 0, y=x} \frac{xy}{x^2 + 2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + 2x^2} = \frac{1}{3}.$$

Tehát a kérdéses limesz nemlétezik (9 pont).

b) Mivel $0 \leq \frac{y^2}{x^2+2y^2} \leq \frac{1}{2}$ és a szinusz a nullában a nullához tart, ezért

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)y^2}{x^2 + 2y^2} = \lim(\text{nullához tartó } \cdot \text{korlátos}) = 0$$

(7 pont).

5. feladat

Ha $(x,y) \neq (0,0)$ akkor $(x^2 + 2y^2) \neq 0$ így a parciális deriváltak

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{y(x^2 + 2y^2) - xy(2x)}{(x^2 + 2y^2)^2} = \frac{2y^3 - x^2 y}{(x^2 + 2y^2)^2}$$
$$\partial_2 f(x,y) = \frac{x(x^2 + 2y^2) - xy(4y)}{(x^2 + 2y^2)^2} = \frac{x^3 - 2xy^2}{(x^2 + 2y^2)^2}$$

léteznek és folytonosak (5 pont), ezért ilyenkor a teljes derivált létezik (1 pont) és

$$Df(x,y) = (\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)) = \frac{1}{(x^2 + 2y^2)^2}(2y^3 - x^2 y, x^3 - 2xy^2)$$

(2 pont). Az elöző feladat szerint f -nek a $(0,0)$ -ban nincs határértéke, tehát f a $(0,0)$ -ban nem folytonos $\Rightarrow$ $Df(0,0)$ nemlétezik (3 pont). Ettől még azonban a parciális deriváltak létezhetnek! Valóban, definíció szerint

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

és hasonló indoklással igazolható, hogy $\partial_2 f(0,0)$ is létezik és értéke nulla (5 pont).

6. feladat

Az f függvény parciális deriváltjai

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= y^4(3x)^{y^4-1}\cdot 3 = (3x)^{y^4}\frac{3y^4}{3x} = (3x)^{y^4}\frac{y^4}{x}\\ \partial_2 f(x,y) &= \partial_y e^{\ln(3x)y^4} = e^{\ln(3x)y^4}\ln(3x)\,4y^3 = (3x)^{y^4}4\ln(3x)y^3\end{aligned}$$

(8 pont). Mivel ezek nyilvánvalóan folytonosak, f teljes deriváltja létezik és a kérdéses pontban a gradiens vektor

$$\underline{\nabla} f(e/3,e) = \begin{pmatrix}\partial_1(e/3,e)\\ \partial_2(e/3,e)\end{pmatrix} = e^{e^4}\begin{pmatrix}e^4/(e/3)\\ 4\ln(3e/3)e^3\end{pmatrix} = e^{e^4+3}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

(2 pont). A tanultak alapján a kérdéses iránymenti derivált akkor lesz maximális, ha a $\underline{v}$ egység-vektor a gradiens irányába mutat, azaz ha

$$\underline{v} = t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

alakú, ahol $t>0$ úgy van megválasztva, hogy $\|\underline{v}\|=1$ (2 pont) $\Leftrightarrow t=1/5$ (2 pont). Tehát, a maximális derivált-értékhez

$$\underline{v} = \begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$$

míg a minimálishoz ennek a -1 -szeresét kell választanunk, azaz a

$$\underline{v} = \begin{pmatrix}-3/5\\-4/5\end{pmatrix}$$

vektort (2 pont).