Algoritmuselmélet pótzárthelyi

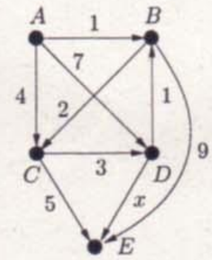
2010. november 19.

1. Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!
$f_1(n) = 2010\log_3(n^n)$, $\quad f_2(n) = n^{1+2+\cdots+\log\log n}$, $\quad f_3(n) = 4^{100+\log n}$.

2. Egy szót *palindromnak* nevezünk, ha a megfordítottja megegyezik önmagával. Egy n hosszú $w = w_1w_2\ldots w_n$ szó és tetszőleges $1 \le i \le j \le n$ indexek esetén jelölje $P(i,j)$ a $w_iw_{i+1}\ldots w_j$ szóban folytonos részszóként megtalálható palindromok maximális hosszát. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, amely minden $1 \le i \le j \le n$-re meghatározza $P(i,j)$ értékét!
Példa: $w = babbac$ esetén P néhány értéke: $P(1,1) = 1$, $P(1,3) = 3$, $P(2,6) = 4$, $P(4,6) = 1$. (A szó betűi a magyar ábécé betűiből kerülnek ki.)

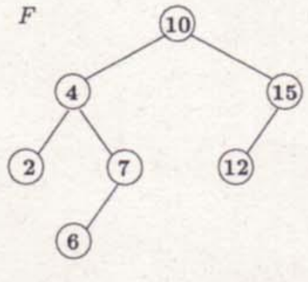
3. Éllistával adott egy n csúcsú, e élű irányítatlan gráf, melyben minden él súlya egy egész szám a $\{0,1,\ldots,k\}$ halmazból. Adjon $O(n+ke)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza a gráfban egy adott s csúcsból a többi csúcsba menő legrövidebb utak hosszát!

4. Dijkstra-algoritmussal határozza meg a G gráfban az A pontból az összes többi pontba menő legrövidebb utak hosszát az x pozitív valós paraméter függvényében. Minden lépésnél írja fel a távolságokat tartalmazó D tömb állapotát és a KÉSZ halmaz elemeit.

G


5. Adott egy csupa különböző elemet tároló (bináris) kupac, valamint egy t egész szám. Adjon algoritmust, amely $O(t^2)$ lépésben meghatározza a kupac elemei közül a t-edik legkisebbet!

6. Hajtsa végre az alábbi F bináris keresőfán a BESZÚR(13), TÖRÖL(10) műveleteket! Minden lépést jelezzen!

F


7. Egy piros-fekete fa gyökerének mindkét gyereke fekete. A gyökér baloldali részfájában 14, a jobboldali részfájában 63 elemet tárolunk. Mennyi lehet a fa fekete-magassága?

8. Egy A tömbben n egész számot tárolunk. Adjon $O(n)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatároz egy olyan, A-beli elemekből álló, maximális méretű T halmazt, melynek elemei páronként egymással kongruensek modulo 2010. (Feltehető, hogy egy maradékos osztás egyetlen lépésben elvégezhető.)

1. feladat:

Sorrend: f_1, f_3, f_2. (Ez indoklás nélkül 0 pont.)
f_1=O(f_2): számolás + definíció használata: 3+2 pont
f_2=O(f_3): számolás + definíció használata: 3+2 pont
Csak a függvények alaki átalakítása: legfeljebb 4 pont.
Csak a definícióra ne adjunk 2 pontnál többet (ha nem kísérli meg használni).

2. feladat:

Dinamikus programozás.
Rekurzió, magyarázattal: 6 pont
Eleje (1 hosszú részszavak): 1 pont
A P(i,j) értékek kitöltésének egy sorrendje: 2 pont
Lépésszám indoklása: 1 pont

3. feladat:

Algoritmus összesen: 7 pont
Ebből:
  -> 0 súlyú élek kezelése: 2 pont
  -> 2, 3, ..., k súlyú élek kezelése: 4 pont
  -> maradék (átalakított gráfon BFS, válasz): 1 pont
  -> ha csak annyit mond, hogy BFS-t alkalmazunk: 2 pont
Lépésszám (0 súlyú élekkel mit csinál + átalakított gráf mérete + BFS lépésszáma): 1+1+1 = 3 pont

4. feladat:

A táblázat összesen 4 sor lesz, ebből az első 3 legyen 2+2+2 pont.
Az x csak az utolsó sorban jelenik meg, ez a sor érjen 4 pontot.

5. feladat:

A megoldás:
Módszer a legkisebb elemek kigyűjtésére: 6 pont
  -> minden lépésben a már kigyűjtött k csúcs gyerekeit kell csak vizsgálni: 3 pont
  -> ezek 2k-an vannak: 1 pont
  -> ezekből a legkisebb kiválasztása: 2 pont
Innen az algoritmus: 2 pont
Lépésszám: 2 pont

B megoldás:
A t-edik legkisebb csak az első t szint valamelyikén lehet, mert... : 3 pont
Töröljük (elfelejtjük) a lejjebbi szinteket, a maradékon t darab Mintör: 4 pont
Lépésszám: 3 pont

Nyilván bármilyen más megoldás is jó...

6. feladat:

Beszúrás: 4 pont
Törlés: 6 pont

A törlésnél lehet a 7, vagy a 12 elemet is a 10-es helyére rakni, ez mindegy.
Ha valaki nem standard módon töröl, csak valahogy random módon csinál egy új keresőfát a maradék elemekből, arra max. 1-2 pontot adjunk.

7. feladat:

Alsó korlát a jobboldali részfa magasságára (m>=6): 2 pont
Tanult összefüggés a magasság és a fekete-magasság között (fm>=m/2): 1 pont.
Innen alsó korlát a jobboldali részfa magasságára (fm>=3): 1 pont

Tanult összefüggés a belső csúcsok és a fekete-magasság között (b>=2^fm-1): 2 pont
Innen felső korlát a baloldali részfa fekete-magasságára(fm<4): 2 pont

A két korlát összevetése: 1 pont
Ebből az eredeti fa fekete-magassága: 1 pont.

8. feladat

Ládarendezés 2010 maradékosztályok alapján: 6 pont
Innen a válasz: 2 pont
Lépésszáma: 2 pont
A lépésszámra járó 2 pontot csak akkor kapja meg, ha jelzi, hogy O(n+2010) a lépésszám, arra, hogy indoklás nélkül közli, hogy O(n), nem kell pontot adni.

Itt persze az is jó, ha explicit nem használja a ládarendezés szót, de lényegében valami ilyesmit csinál.