Pótló zárthelyi dolgozat

1. Legyenek A és B olyan események, melyekre $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}$. Legyen továbbá C olyan esemény, amelyre az A és C illetve a B és C eseménypárok függetlenek, és tegyük fel, hogy egyszerre mindhárom esemény nem következhet be. Számoljuk ki az A, B és C események valószínűségét, ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{8}$ és $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \frac{19}{40}$.

2. Három rekeszben vannak a Kőbányai és Borsodi sörök a presszóban. Az elsőben $12 - 12$, a másodikban 16 Kőbányai és 8 Borsodi, a harmadikban 6 Kőbányai és 18 Borsodi. A kocsmáros nem szeret feleslegesen mozogni, ezért $\frac{1}{2}$ valószínűséggel a hozzá legközelebbi első rekeszből vesz ki egy üveget véletlenszerűen, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel a következő, második rekeszből választ egy üveget véletlenszerűen és $\frac{1}{6}$ valószínűséggel megy csak a el a harmadik rekeszig és emel ki onnan egyet véletlenszerűen.
   (a) Mekkora valószínűséggel kap a sört rendelő vendég Borsodit?
   (b) Mekkora a valószínűsége, hogy a kocsmáros elfáradt egészen a harmadik rekeszig és onnan adott egy üveg sört feltéve, hogy Borsodit kapott a vendég?

3. Válasszunk két számot egymástól függetlenül a $(0, 3)$ intervallumon. Mennyi a valószínűsége, hogy a két szám hányadosa $\frac{1}{3}$ és 3 közé esik?

4. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \sqrt{\dfrac{x}{c}}, & \text{ha } 0 < x \leq c, \\ 1, & \text{ha } c < x, \end{cases}$$

   ahol $c > 0$ egy pozitív valós szám.
   Határozzuk meg c értékét, ha tudjuk, hogy X várható értéke 1.

5. Egy társasjátékban a soron következő játékos a saját körében dob egy kockával, és a dobás eredményének megfelelően lép, kivéve, ha hatost dob. Hatos esetén újra dob a kockával, és ezt egészen addig ismétli, amíg 6-ostól különböző eredmény adódik. Végül a játékos lépéseinek száma az adott körben dobott összes szám összege.
   Határozzuk meg az egy játékos által egy körben megtett lépések számának várható értékét.

6.* Tegyük fel, hogy repülés közben egy repülőgép motorjai egymástól (teljesen) függetlenül 1-p valószínűséggel hibásodnak meg. Ha egy repülőnek a repüléshez a motorjainak legalább felére van szüksége, milyen p értékekre biztonságosabb egy ötmotoros repülőgép, mint egy hárommotoros?

Tudnivalók: A zárthelyi időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1-e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$