VEKTOROK

(I.) Jelölések:

a – vektor

a_n – **a** vektor n. koordinátája

(II.) Determinánsok kifejtése

Harmadrendű determináns másodrendűvé alakítása:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Másodrendű determináns szorzatok különbségévé alakítása:

$$\begin{vmatrix} j & k \\ l & m \end{vmatrix} = jm - kl$$

(III.) Az egyenes egyenletei

(IIIa.) Az egyenes vektoregyenlete

Az egyenes egy P_0 pontjának helyvektora: $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$

Az egyenes egy P pontjának helyvektora: $\mathbf{r} = (x, y, z)$

Az egyenes irányvektora: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + t\mathbf{v}$, ahol $t \in \mathbb{R}$

(IIIb.) Az egyenes paraméteres egyenletrendszere

Az egyenes egy P_0 pontjának helyvektora: $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$

Az egyenes egy P pontjának helyvektora: $\mathbf{r} = (x, y, z)$

Az egyenes irányvektora: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3 \end{aligned}\right\} \text{ ahol } t \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$t = \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

(IV.) A sík egyenletei

(IVa.) A sík vektoregyenlete

A sík normálvektora: **n**

A sík két tetszőleges pontja közti vektor: **a**

$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$

(IVb.) A sík alapegyenlete

A sík egy P_0 pontjának helyvektora: $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$

A sík egy P pontjának helyvektora: $\mathbf{r} = (x, y, z)$

A sík normálvektora: $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$

$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$

(1.) Egységvektorok

Definíció szerint **i**, **j**, **k** egymásra merőleges, egység nagyságú vektorok. Minden tetszőleges vektor felírható ezek *lineáris kombináció*jaként: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$.

(2.) Vektorműveletek

(2a.) Összeadás és kivonás

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

(2b.) Számszoros

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

(2c.) Skaláris szorzat

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha$, ahol α az **a** és **b** által bezárt szög

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

$\mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

illetve

$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} a_1 \cdot b_1$$

mivel

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$

$\Rightarrow (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = a_2 b_2 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

(2d.) Vektoriális szorzat

$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\alpha$, ahol α az **a** és **b** által bezárt szög

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \perp \mathbf{a},\mathbf{b}$

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$

$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$

$\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ ahol $\lambda\in\mathbb{R}$

$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$

$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$

$\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$

$\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ kiszámítása derékszögű koordinátarendszerben:

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(2e.) Vegyes szorzat

$\mathbf{abc} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

abc = bca = cab = -bac = -acb = -cba

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(3.) Elemi feladatok vektorokkal

(3a.) Merőlegesség vizsgálata

$\mathbf{a},\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

$\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

(3b.) Merőleges vetület képzése

b-nek az **a** irányába eső előjeles merőleges vetülete:

$\mathbf{b}\cdot\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = |\mathbf{b}|\cos\alpha$, ahol α az **a** és **b** által bezárt szög

(3c.) Párhuzamosság vizsgálata

$\mathbf{a},\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$

(3d.) Területszámítás

a és **b** által kifeszített paralelogramma területe

$T = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

(3e.) Egysíkúság vizsgálata

a, **b**, **c** egysíkú vektorok $\Leftrightarrow$ **abc = 0**

(3f.) Térfogatszámítás

a, **b**, **c** vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata

$V = |\mathbf{abc}|$

(3g.) Két pont távolsága

$A(a_1; a_2; a_3)$

$B(b_1; b_2; b_3)$

$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

(3h.) P pont és e egyenes távolsága

Tetszőleges Q pont kijelölése e-n. $\Rightarrow$ $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$

Q-ból induló, e irányába mutató vektor legyen **v**

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

(3i.) P pont és S sík távolsága

S-en tetszőleges Q pont kijelölése $\Rightarrow$ $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$

S normálvektora **n**

$$d = \left|\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{n}|}\right|$$