

Kalkulus: Feladatok gyakorláshoz

Lineáris egyenletrendszerek, mátrixok

1. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket!

a)

$$\begin{aligned}x - y + z &= 0 \\2x + y + z &= 1 \\x - 6y + 3z &= -1\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 1 \\-2x + y - 3z &= 2 \\-3y - z &= 4\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x + 5y - 4z &= 0 \\3y - 2z &= 7 \\-3x - 9y + 8z &= 2\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 0 \\3x + y - 2z &= -1 \\2x + 2y - z &= 3\end{aligned}$$

[Megoldások: a) $(-1, 1, 2)$; b) $(-\frac{5}{3}(t+1), -\frac{1}{3}(t+4), t)$; c) nincs megoldás; d) $(1, -\frac{2}{5}, -\frac{9}{5})$.]

2. Adjuk meg a fenti egyenletrendszerek együttható mátrixát, a mátrix determinánsát és rangját, emellett a kibővített együttható mátrix rangját is!

[Megoldások: a) $\det A = 1$, $\text{rang}(A) = 3$, $\text{rang}(A|b) = 3$; b) $\det A = 0$, $\text{rang}(A) = 2$, $\text{rang}(A|b) = 2$; c) $\det A = 0$, $\text{rang}(A) = 2$, $\text{rang}(A|b) = 3$; d) $\det A = -15$, $\text{rang}(A) = 3$, $\text{rang}(A|b) = 3$;.]

3. Tekintsük a következő mátrixokat!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Szorozzuk össze a következő mátrixokat, ha lehetséges, és adjuk meg a méretüket is!

- a) AB
- b) $A^T B$
- c) $B^T A^T$
- d) AC
- e) CB
- e) $C^T B$

[Megoldások: a) $AB = \begin{pmatrix} -29 & -4 & -6 \\ 8 & 9 & 7 \\ 30 & 22 & 26 \end{pmatrix}$; b) $A^T B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ -2 & 11 & 24 \\ 5 & 11 & -25 \end{pmatrix}$;

c) $B^T A^T = \begin{pmatrix} -29 & 8 & 30 \\ -4 & 9 & 22 \\ -6 & 7 & 26 \end{pmatrix}$; d) $AC = \begin{pmatrix} -22 & 37 \\ 9 & 5 \\ 30 & -4 \end{pmatrix}$; e) CB nem létezik,

mert C oszlopainak száma nem egyezik B sorainak a számával; f) $C^T B = \begin{pmatrix} 27 & 19 & 14 \\ -10 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.]

Adjuk meg a következő determinánsok értékét!

- a) $\det(AB)$
- b) $\det(A^T B)$
- c) $\det(B^T A^{-1})$
- d) $\det(A^{-1} B^{-1})$

[Megoldások: a) $28 \cdot (-63)$; b) $28 \cdot (-63)$; c) $\frac{-63}{28}$; d) $\frac{1}{28 \cdot (-63)}$.]

4. Számítsuk ki a következő mátrixok inverzét Gauss-Jordan elimináció segítségével!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

[Megoldások: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 16 & -9 \\ 6 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;
c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & 5 & 8 \\ 8 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.]

Sorozatok

A Kónya-ként hivatkozott feladatsor a honlapomon megtalálható.

- Határérték definícióval: Kónya 1/10,11 (feladatok megoldással!)
- Gyakorló feladatok: Kónya 1/19a
- Végtelenbe tartó sorozatok definícióval: Kónya 1/1,2,3,4,5 (feladatok megoldással!)
- Gyakorló feladatok: Kónya 1/7a,b

1. Számítsuk ki a következő határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 - 5n}{n - 4n^3 + 1} = ?$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n^9 + n^6 - 4n}{n - 5n^2 - 7n^9} = ?$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 3n^2 - \frac{n}{2}}{5n^5 - 21n + 1} = ?$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-3)^n + 4^n}{3 \cdot 4^n - 1 + 2^n} = ?$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - (-5)^{n+1} + 2^n}{2 \cdot 4^{2n+1} - 2 + 5^n} = ?$

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n-1} - 4 \cdot (-1)^n}{6^{n+2} - 5^{n+2}} = ?$

[Megoldások: a) $-\infty$; b) $\frac{2}{7}$; c) 0; d) $\frac{1}{3}$; e) 0; f) $+\infty$.]

2. Számítsuk ki a következő határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n^4 + n} - \sqrt{2n^4 + 3n^3} = ?$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - 6n + 1} - (n + 6) = ?$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \cdot 4^n - 5^n}{8^n - 2 \cdot 3^n} = ?$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^7 \cdot 4^{n+1} - 3^{2n-1}}{5 \cdot 3^n - 3n \cdot 5^n} = ?$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[2n+3]{2n+3} - \frac{1}{n} = ?$

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5n^5 + 2n + 1} = ?$

g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3n^2 + 8n + 1}{6n^4 + 2n}} = ?$

[Megoldások: a) $-\infty$; b) -9 ; c) 0 ; d) $+\infty$; e) 1 ; f) 1 ; g) 1 .]

- n-edik gyökös feladatok: Kónya 1/28-30 (feladatok megoldással!)
- $\lim(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$ határértékkel kapcsolatos feladatok: Kónya 1.6 fejezet (feladatok megoldással!)
- Gyakorló feladatok: Kónya 1/39a-d,g-k
[Megoldások: a) e^5 ; b) $e^{\frac{1}{5}}$; c) $e^{\frac{6}{5}}$; d) e^{10} ; g) e^3 ; h) e^4 ; i) e^4 ; j) e^2 ; k) e^4 .]

Függvények határértéke

- Határérték definícióval: Kónya 3/1,2 (feladatok megoldással!)
- Gyakorló feladatok megoldással: Kónya 3/4-7 (feladatok megoldással!)
- Gyakorló feladatok megoldással $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ határértékkel kapcsolatban: Kónya 3/16-18 (feladatok megoldással!)
- Gyakorló feladatok szakadási helyekkel kapcsolatban: Kónya 3/12-14 (feladatok megoldással!)

Függvények deriválása

- Differenciálás a definícióval: Kónya 4/1,2 (feladatok megoldással!)
- A deriválási szabályok gyakorlása: Kónya 4/7 (feladatok megoldással!)
- Nehezebb példák megoldással: Kónya 4/8,12 (feladatok megoldással!)
- Deriválás szabályainak gyakorlása megoldással:
<http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf> (12. fejezet)

1. Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $\sin x \cdot \cos x + 4^x$

b) $\sqrt{x} \cdot \ln x$

c) $x\sqrt{x} + \frac{4}{x}$

d) $(x + 1) \cdot \sinh(x)$

e) $\frac{e^x}{\cosh(x)}$

f) $\frac{x^3}{\sin(2x)}$

g) $\frac{e^{-x}}{2x+3} - \log_2 x$

h) $\tanh(x^2)$

i) $e^{\cotan(x)}$

j) $(1 + 3x)^6$

k) $\frac{\pi+2x-7\sqrt{x}}{\sin(2x)}$

l) $\ln(\cos(\frac{x}{2}))$

m) $\frac{x \tan(x)}{x^{3/2}}$

n) $\frac{1}{\arccos(x^3)}$

o) $(x^2 + \operatorname{atan}(4x) + 2)^3$

p) $\sqrt{1-x^2} \cdot e^x$

q) $(1 - \sqrt[3]{x} - 2\operatorname{arsinh}(x^3))^{5/2}$

r) $\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$

s) $\operatorname{arcosh}(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1})$

Megjegyzés: a <https://www.wolframalpha.com/> oldalon beírhatjuk a függvényt, amit szeretnénk deriválni és lederiválja (a "Derivative" sornál található a megoldás), így ellenőrizhetjük az eredményünket. (Például beírhatjuk: $x(\operatorname{AltGr}+3)2$, ez x^2 deriváltját adja meg; vagy $\operatorname{sqr}(2x)$, ez $\sqrt{2x}$ deriváltját adja meg.)

L'Hospital szabály

- Feladatok megoldással: Kónya 4/26 (feladatok megoldással!)

Komplex számok

1. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $z^2 + 6z + 25 = 0$

b) $z^2 + 3z + 3 = 0$

c) $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0$

d) $z^2 - \frac{1-\sqrt{3}i}{5} = 0$

e) $(z - 4i^2)(z^3 + i - 1) = 0$

[Megoldások: a) $z_{1,2} = -3 \pm 4i$; b) $z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}$; c) $z_1 = i - 2$ és $z_2 = i - 3$;
d) $\frac{1-\sqrt{3}i}{5}$ két második gyöke; e) $z_1 = 4i^2 = -4$ és $1 - i$ harmadik gyökei (ez még 3 megoldás).]

Függvényvizsgálat

- Kónya 4.6 alfejezet (**feladatok megoldással!**)
- Nagyon jó gyakorló feladatok függvényvizsgálathoz **részletes megoldással:**
<https://docplayer.hu/21035661-Feladatok-megoldasokkal-a-negyedik-gyakorlathoz-fuggvenyvizsgalat-f-x-2x-2-x-4-2x-2-x-4-0-x-2-2-x-2-0.html>

Függvények integrálása (határozatlan, határozott)

- Kónya 5.1-2-3-4 fejezet (**feladatok megoldással!**)
- <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf> (16.1.2. alfejezet)
- Bárczy Barnabás: Integrálszámítás (I. és II./1.-4. alfejezetek)

Ha hibát találtok, kérlek jelezzétek! Érdemes nézegetni a Kónya feladatgyűjteményt, sok feladat szerepel megoldással és gyakorló feladatok is vannak még!