Bevezetés a Számításelméletbe I.

2. pZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $G = (A, B; E)$ páros gráf és $a \in A, b \in B$ esetén $d(a) \geq d(b) \geq 1$, akkor van G-ben A-t fedő párosítás.

   A tanult Hall tétel szerint pontosan akkor van G-ben A-t fedő párosítás, ha teljesül a Hall feltétel, (2 pont)
   azaz tetszőleges $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$. (1 pont)
   Ezt fogjuk tehát ellenőrizni. A feltétel szerint létezik olyan $c \geq 1$ egész szám, amire $d(a) \geq c \geq d(b)$ teljesül minden $a \in A$ és $b \in B$ csúcsra. (1 pont)
   Jelölje $E(X)$ az X-ből induló élek halmazát. Világos, hogy $c \cdot |X| \leq |E(X)| \leq c \cdot |N(X)|$, hiszen minden X-beli csúcsból legalább c különböző él indul, míg egy $N(X)$-beli csúcsra pedig legfeljebb c $E(X)$-beli él illeszkedhet. (4 pont)
   Mivel $c \neq 0$ ezért bátran leoszthatunk: $|X| \leq |N(X)|$, (1 pont)
   azaz teljesül a Hall feltétel, csakugyan létezik G-ben A-t fedő párosítás. (1 pont)

2. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak 2010 csúcsa van, és $\alpha(G) = 100$, akkor $\chi(G) \geq 21$.

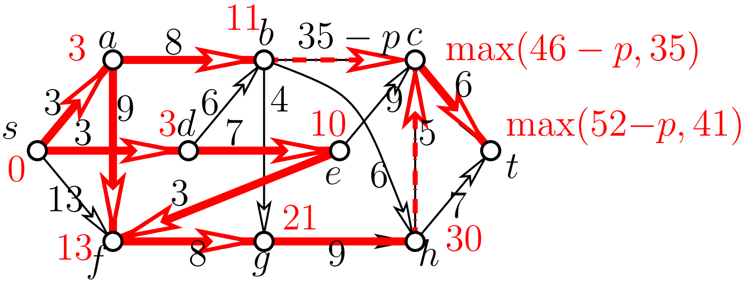
   Tegyük fel, hogy a G gráf kiszínezhető k színnel. Mivel a k színosztály mindegyike független halmaz, ezért minden színosztály legfeljebb $\alpha(G)$ csúcsot tartalmazhat. (2 pont)
   A k színosztály lefedi G minden csúcsát, ezért $k \cdot \alpha(G) \geq |V(G)|$. (2 pont)
   A konkrét esetben ez azt jelenti, hogy $100k \geq 2010$, (2 pont)
   ahonnan $k \geq 2010/100 > 20$. (1 pont)
   Ez azt jelenti, hogy G kiszínezéséhez 20-nál több, azaz legalább 21 szín kell, (2 pont)
   ami pontosan azt jelenti, hogy $\chi(G) \geq 21$, és épp ezt kellett bizonyítanunk. (1 pont)

3. Igazoljuk, hogy ha $G = (V, E)$ egyszerű gráf és minden fokszáma 12, akkor nem léteznek olyan $G_1 = (V, E_1)$ és $G_2 = (V, E_2)$ síkbarajzolható gráfok, amire $E = E_1 \cup E_2$, azaz G nem áll elő két síkbarajzolható gráf uniójaként.

   Jelölje n a G gráf csúcsainak, m pedig az éleinek a számát. Ha a G gráf minden csúcsából 12 él indul, akkor $12n = 2e$, azaz $e = 6n$, (3 pont)
   hiszen a fokszámösszeg éppen az élszám kétszerese a tanultak szerin. (1 pont)
   Azt is tanították, hogy ha egy n csúcsú egyszerű gráfnak legalább 3 csúcsa van és síkbarajzolható, akkor az éleinek száma legfeljebb $3n - 6$. (3 pont)
   Márpedig ha a G gráf (aminek az egyszerűség és a 12 fokszám miatt legalább 13 csúcsa van) két síkbarajzolható gráf uniója volna, akkor G-nek legfeljebb kétszer annyi éle lehetne, mint egy síkbarajzolható gráfnak, (1 pont)
   konkrétan legfeljebb $2(3n - 6) = 6n - 12$. (1 pont)
   Láttuk, hogy a G gráfnak ennél több éle van, így valóban nem lehet G két sr gráf uniója. (1 pont)

4. Sürgősen el kell fogadni a korrupcióellenes törvényt. Ennek érdekében különféle egyeztetéseket és vitákat kell lefolytatni, amik csak bizonyos sorrendben követhetik egymást. A mellékelt ábrán látható gráf csúcsai jelentik az egyes cselekményeket, a nyilak pedig a korábban végrehajtandó cselekményből olyanokba mutat, amik azt nem előzhetik meg, sőt, a két cselekmény megkezdése között el kell telnie a nyíl mentén megadott számú napnak. A p paraméter az illetékes bizottság arról való „meggyőzésének” a költsége, hogy adott időn belül hagyják jóvá a javaslatot. Mennyibe kerül a törvény 42 napon belüli elfogadása?

   Az $s, a, d, e, f, b, g, h, c, t$ sorrend a csúcsok egy topologikus sorrendje. Ebben a sorrendben dolgozzuk fel a gráf csúcsait. (3 pont)
   Az ábrán látható módon meghatároztuk az egyes tevékenységek legkorábbi kezdési időpontjait, és megjelöltük azokat az éleket, amik ezeket a legkorábbi időpontokat meghatározzák. A c és t csúcsoknál mind a kezdési időpont, mind az ezt meghatározó él függ a p paramétertől. (4 pont)
   Az kell tehát nekünk, hogy $\max(41, 52 - p) \leq 42$ legyen, azaz $52 - p \leq 42$, vagyis $p \geq 10$. (1 pont)

   Az időbeni elfogadás költsége tehát legalább 10. (1 pont)
   Ha pedig rászánjuk erre a 10 költséget, akkor el is fogadható a törvény ennyi idő alatt. (1 pont)
   Ekkor a kritikus tevékenységek azok, amik a $p = 10$-hez tartozó kritikus utak valamelyikén vannak, azaz az s, a, b, c és t lesznek. (0 pont)

Ha vkinek a „42 napon belül” legfeljebb 41 napot jelent, és ezért $p = 11$ jön ki, azt is fogadjuk el helyesnek.

5. Legyenek az F fa csúcsai az $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \leq i \leq 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \leq j \leq 10$. Tegyük fel, hogy F a G egyszerű, irányítatlan gráf v_1-ből indított mélységi (DFS) bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?

   Tanították, hogy a mélységi bejárás fájához nem tartoznak keresztélek, azaz olyan élek, amik a fa olyan csúcsait kötik össze, amik nem leszármazottai egymásnak. (3 pont)
   Ezek szerint G-ben nem futhat él a $v_6, v_7, \ldots, v_{10}$ pontok között. (2 pont)
   A G gráfnak tehát nem lehet több éle, mint annak a gráfnak, amit 10 pontú teljes gráfból úgy kapunk, hogy elhagyjuk a fenti 5 pont közt futó éleket. (2 pont)
   Az élszám tehát legfeljebb $\binom{10}{2} - \binom{5}{2} = 45 - 10 = 35$ lehet. (1 pont)
   Ennyi éle pedig lehet is G-nek. Ha ugyanis G pontosan a fent leírt gráf, akkor a megadott F lehet a G mélységi fája. (2 pont)

   A fa helyes lerajzolásáért adjunk 1 pontot, ha nincs más értékelhető teljesítmény.

6. Legyen a Π döntési probléma inputja egy összefüggő G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha van G-ben Euler-körséta. Mutassuk meg, hogy $\Pi \in co - NP$.

   Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges összefüggő gráfra hatékonyan rá tudjuk bizonyítani az Euler-körséta nemlétét, már persze amennyiben nincs benne ilyen. (3 pont)
   Azt tanították valaha, hogy egy véges, összefüggő G gráfban pontosan akkor van Euler-körséta, ha G-ben minden csúcs foka páros. (3 pont)
   Pontosan akkor nincs tehát Euler-körsétája G-nek, ha G-nek van páratlan fokú csúcsa. (2 pont)
   Egy ilyen csúcs megadása után pedig polinom időben lehet bizonyítani, hogy a foka páratlan, tehát nincs Euler-körséta G-ben. (2 pont)

   Igazából arra is van idő, hogy mind az n csúcsot végignézzük, így a fentiekből tkp az is következik, hogy $\Pi \in P$. És persze jó bizonyítás az is, ha közvetlenül ezt mutatjuk meg, hisz $P \subseteq NP$.