Analízis A2 Tételek

Készítette: Tóth Dániel

1. Vektorterek alapjai

Def.: V vektortér, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$. $x_1, \ldots, x_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$-ból következik, hogy $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.

Def.: V vektortér, $i\in I$: $x_i\in V$. $(x_i)_{i\in I}$ bázis, ha $(x_i)_{i\in I}$ lineárisan független de $\forall$ $u\in V$-re, $(x_i)_{i\in I}$ és u, már nem lineárisan független.

Def.: Egy művelet skaláris szorzat ha $x,y\in V \Rightarrow <x,y>\in\mathbb{R}$(vagy $\mathbb{C}$) és teljesül rá, hogy

- $x,y,z\in V \Rightarrow <x+y,z> = <x,z> + <y,z>$
- $x,y\in V, \lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow <\lambda x,y> = \lambda \cdot <x,y>$ vagy $\lambda\in\mathbb{C} \Rightarrow <\lambda x, y> = \bar{\lambda} <x,y>$
- $x,y\in V \Rightarrow <x,y> = \overline{<y,x>}$
- $x\in V \Rightarrow <x,x> \geq 0$ és $<x,x> = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $(0\in V)$

Def.: $(V;<\ ,\ >)$ $(x_i)_{i\in I}$ bázis.

- Ortogonális bázis, ha $<e_i, e_j> = \begin{cases} 0 \ ha\ i \neq j \\ > 0 \ ha\ i = j \end{cases}$ tehát egymásra merőlegesek ($<e_i,e_j>=0$)
- Normált bázis, ha $\|e_i\| = 1$ tehát „hosszuk” 1 ($<e_i,e_i>=1$)
- Ortonormált bázis ha $<e_i, e_j> = \begin{cases} 0 \ ha\ i \neq j \\ 1 \ ha\ i = j \end{cases}$

Áll.: $(V;<\ ,\ >)$ $e_1, \ldots, e_n$ ONB akkor $\forall$ $x\in V$ előáll úgy, hogy $x = \sum_{i=1}^{n} <e_i, x> \cdot e_i$ (Egy vektor kifejtése egy adott bázisban)

Biz.: (n=2-re) $x=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2 \Rightarrow <e_1,x> = <e_1,\lambda_1,e_1> + <e_1,\lambda_2,e_2> = \lambda_1\cdot <e_1,e_1> + \lambda_2\cdot <e_1,e_2> \Rightarrow$ $<e_1,e_1>=1$, $<e_1,e_2>=0 \Rightarrow \lambda_1=<e_1,x>$ hasonlóan $\lambda_2=<e_2,x>$

Def.: Egy V vektortéren a norma művelet minden vektorhoz hozzárendel egy nem negatív valós számot, úgy hogy teljesül az, hogy

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x=0$ $(0\in V)$ (hossza csak akkor nulla, ha ő a null elem)
- $x\in V, \lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (skalárral való szorzás során hossza skalár szorosára nő)
- $x,y\in V \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (háromszög egyenlőtlenség)

Áll.: Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség: $(V;<\ ,\ >)$, $x,y\in V \Rightarrow$ $|<x,y>|^2 \leq <x,x> \cdot <y,y>$

Biz.: $0 \leq <x+t\cdot y, x+t\cdot y> = <x, x+ty> + <ty, x+ty> = <x+ty, x> + t\cdot <x+ty, y> = t^2\cdot <y,y> + 2t\cdot <y,x> + <x,x> \Rightarrow D\leq 0 \Rightarrow 4<x,y>^2 - 4<y,y>\cdot<x,x> \leq 0 \Rightarrow <x,y>^2 \leq <y,y>\cdot<x,x>$

Def.: x,y∈V és x,y≠0, ekkor $|< x, y >| \leq \sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}$ átalakítva $-1 \leq \frac{<x,y>}{\sqrt{<x,x>} \cdot \sqrt{<y,y>}} \leq 1$ ebből következik, hogy ∃! α∈[0;π] melyre $\cos \alpha = \frac{<x,y>}{\sqrt{<x,x>} \cdot \sqrt{<y,y>}}$ ekkor az α-t az x és y vektor által bezárt szögnek nevezzük.

Gram-Schmidt-ortogonalizálás:

(V;< , >) és $a_1, \ldots, a_n$ lineárisan független bázisok. Ortonormált bázisok előállítása:

- $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$
- $e_2 = \frac{a_2 - <a_2, e_1> e_1}{\|a_2 - <a_2, e_1> e_1\|}$
- $e_3 = \frac{a_3 - <a_3, e_1> e_1 - <a_3, e_2> e_2}{\|a_3 - <a_3, e_1> e_1 - <a_3, e_2> e_2\|}$
- $e_n := \frac{a_n - \sum_{k=1}^{n} <a_n, e_k> e_k}{\|a_n - \sum_{k=1}^{n} <a_n, e_k> e_k\|}$

Két vektor skaláris szorzása $\mathbb{R}^3$ térben: a,b∈$\mathbb{R}^3$; c∈$\mathbb{R}$⇒ a·b=c ha

- $c = |a| \cdot |b| \cdot \cos \theta$ (c egyenlő a, b hosszának és bezárt szögük koszinuszának szorzata)
- $c=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ (másféleképpen a koordináták szorzatösszege)

Tulajdonságai:

- Kommutatív $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$
- Disztributív $\underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{ab} + \underline{ac}$

Két vektor vektoriális szorzása $\mathbb{R}^3$ térben: a,b,c∈$\mathbb{R}^3$ ⇒ a×b=c ha

- $|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \theta$ (c hossza egyenlő a, b hosszának és bezárt szögük szinuszának szorzatával)
- c állása olyan hogy mind a-ra mind b-re merőleges
- c iránya olyan hogy a,b és c jobbsodrású vektorrendszert alkot.

Tulajdonságai:

- Nem kommutatív!
- Disztributív $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Egyenes egyenlete:

Egy $P = (x_0; y_0; z_0)$ ponton átmenő $\underline{v} = (v_1; v_2; v_3)$ irányvektorú egyenes egyenlete:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

(a két ponton átmenő egyenes egyenlete visszavezethető erre a formulára, ha irányvektornak a két pontot összekötő vektort választjuk)

Sík egyenlete:

Egy $P = (x_0; y_0; z_0)$ ponton átmenő $\underline{n} = (A; B; C)$ normálvektorú sík egyenlete

$Ax + By + Cz + D = 0$ ahol $-D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

(ha a sík egy pontjával és 2 benne fekvő vektorával van megadva, akkor a két vektor vektoriális szorzata megadja a sík normálvektorát; illetve ha 3 pontjával adott a sík, akkor az egyik pontból a másik két pontba húzott vektor vektoriális szorzata adja a normálvektort)

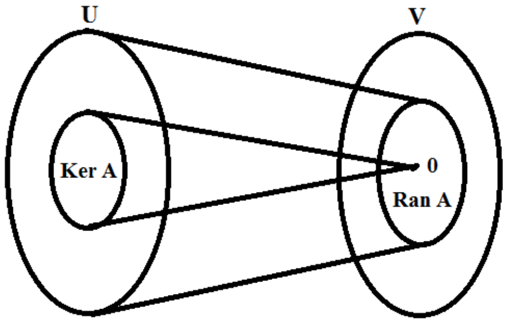
2. Lineáris leképezés

Def.: U és V vektorterek A: U→V leképezés lineáris ha

- $x,y \in U \Rightarrow A(x+y) = Ax+Ay$
- $x \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax$

Def.: A legyen egy lineáris leképezés U-ból V-be. U egy bázisa $e_1, \ldots, e_n$; V egy bázisa $f_1, \ldots, f_m$. $\forall$ $x \in U$-hoz $\exists$ α_j, hogy $x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n \Rightarrow$ $Ax=A(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n)=A(\alpha_1e_1)+\ldots+A(\alpha_ne_n)=\alpha_1Ae_1+\ldots+\alpha_nAe_n$ és tudjuk, hogy $Ae_1=\lambda_{11}f_1+\lambda_{21}f_2+\ldots+\lambda_{m1}f_m$ ahol $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ és $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$. Vagyis egyik bázisról egyértelműen térhetünk át másikra. Az ehhez tartozó konstansokat mátrixba szedhetjük. Ezt a mátrixot az A leképezés $e_1, \ldots, e_n$ és $f_1, \ldots, f_m$-hez tartozó mátrixának nevezzük. $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{pmatrix}$

Def.: A: U→V lineáris leképezés. Az A magtere $KerA \coloneqq \{x \in U | Ax = 0\}$ (Az U azon elemei, amelyeket az A leképezés a V vektortér 0 elemébe viszi)



Def.: A: U→V lineáris leképezés. Az A rangja: $rankA \coloneqq \dim Ran\ A$ Ahol Ran A az A leképezés értékkészlete (más néven képtér V-ben.)

Áll.: (Dimenzió-tétel): A: U→V lineáris leképezés. $\dim Ker\ A + \dim Ran\ A = \dim U$

Biz.: dim U=n, Ker A altér, tehát $\exists$ bázis: $e_1, \ldots, e_i$; Ran A is altér bázisa: $F_1, \ldots, F_j$ ($\exists$ f_1 melynek képe F_1 és így tovább). Cél: $e_1, \ldots, e_i, f_1, \ldots, f_j$ bázis U-ban ($i+j=n$). Előbb bizonyítsuk lineáris függetlenségüket. $\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ie_i+\beta_1f_1+\ldots+\beta_jf_j=0$ hatassuk rá A-t $\Rightarrow 0+\beta_1F_1+\ldots+\beta_jF_j=0$ F-ek bázisok (lineárisan függetlenek is) $\beta_1=\ldots=\beta_j=0$, visszaírva az eredeti feltevésbe $\Rightarrow \alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ie_i+0=0$ az e-k is bázisok tehát $\alpha_1=\ldots=\alpha_i=0$ vagyis az e-k és f-ek lineárisan függetlenek. A bizonyítás második fele, hogy megvizsgáljuk, hogy maximális lineárisan független rendszert alkotnak-e U-ban. Tegyük fel hogy nem, vagyis hogy $\exists$ $x \in U \setminus \{0\}$ úgy hogy $e_1, \ldots, e_i, f_1, \ldots, f_j, x$ lineárisan független. Ha $Ax=0$ akkor $x \in Ker\ A \Rightarrow x=a_1e_1+\ldots+a_ie_i$ vagyis nem lineárisan független. Ha $Ax \neq 0$ akkor $Ax=b_1F_1+\ldots+b_jF_j \Rightarrow x=b_1f_1+\ldots+b_jf_j$ ha $\exists$ A^{-1}. Egyébként $Ax=A(b_1f_1+\ldots+b_jf_j) \Rightarrow A(b_1f_1+\ldots+b_jf_j-x)=0 \Rightarrow b_1f_1+\ldots+b_jf_j-x \in Ker\ A \Rightarrow b_1f_1+\ldots+b_jf_j-x=c_1e_1+\ldots+c_ie_i \Rightarrow -c_1e_1-\ldots-c_ie_i+b_1f_1+\ldots+b_jf_j-\underline{1}*x=0$ nem minden együttható 0, vagyis biztosan nem lineárisan függetlenek, a feltevés rossz, vagyis az állítás igaz.

Def.: A,B: U→V ⇒ (A+B)(x) = Ax+Bx (<u>lineáris leképezések összege</u>) és (λA)(x) = λ·Ax (<u>lineáris leképezések számszorosa</u>). $[A+B]_{kl} = A_{kl} + B_{kl}$ (<u>mátrixok összeadása</u>) és $[\lambda A]_{kl} = \lambda A_{kl}$ (<u>mátrixok számszorosa</u>). $[AB]_{kl} = \sum_{i=1}^{n} A_{ki} \cdot B_{il}$ (<u>lineáris leképezések kompozíciója = mátrixok szorzása</u>).

Pl.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$AB = \begin{array}{ccc|ccc} & \cdot & & 1 & 4 & 7 \\ & & & 2 & 5 & 8 \\ & & & -1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 7 & 26 & 42 \\ 4 & 2 & -3 & 11 & 17 & 32 \\ 1 & 0 & 4 & -3 & 16 & 23 \end{array}; \quad BA = \begin{array}{ccc|ccc} & \cdot & & 2 & 3 & 1 \\ & & & 4 & 2 & -3 \\ & & & 1 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 7 & 25 & 11 & 17 \\ 2 & 5 & 8 & 32 & 16 & 19 \\ -1 & 3 & 4 & 14 & 3 & 6 \end{array}$$ vagyis AB≠BA.

<u>3. Determináns</u>

Def.: σ: {1, …, n}→{1, …, n} permutáció ha bijekció (injektív és minden 1-től n-ig számhoz, minden 1-től n-ig számot hozzárendel).

Def.: Ha 1, …, i, i+1, …, n → 1, …, i+1, i, …, n (két permutáció csak egy cserében különbözik) akkor transzpozícióról beszélünk.

Def.: Minden permutáció felírható transzpozíciók szorzataként $\sigma = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_k$ ekkor $(-1)^k$ értékét a permutáció indexének nevezzük.

Def.: $\varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} := \begin{cases} \sigma \text{ } permutáció \text{ } indexe \\ 0, ha \text{ } \sigma \text{ } nem \text{ } permutáció \end{cases}$

Pl.: $\varepsilon_{123} = 1$; $\varepsilon_{132} = -1$; $\varepsilon_{312} = 1$; $\varepsilon_{321} = -1$; $\varepsilon_{231} = 1$; $\varepsilon_{213} = -1$; $\varepsilon_{112} = 0$

Def.: Ha A n·n-es mátrix akkor A <u>determinánsa</u>

$$detA := \sum_{\sigma \epsilon permutáció(n)} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} \cdot A_{1\sigma(1)} \cdot A_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma(n)}$$

<u>1·1-es</u> A=(a) det A = A_{11} = a

<u>2·2-es</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad detA = 1 \cdot A_{11} \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{12} \cdot A_{21} = a \cdot d - b \cdot c$

<u>3·3-as</u> $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\quad detA = A_{11}A_{22}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} +$ $A_{12}A_{23}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$ vagyis a főátló és a vele párhuzamos vonalak mentén pozitívan, míg vele merőlegesen negatívan kell összegezni.

Def.: Ha A n·n-es mátrix és i,j∈{1,…,n} akkor i sor és j oszlop törlésével $[A]_{ij}$ almátrixot kapjuk.

T.: A n·n-es $detA = A_{11} \cdot det[A]_{11} - A_{12}det[A]_{12} + A_{13}det[A]_{13} - \cdots + A_{1n}det[A]_{1n}$ a determináns első sor szerinti kifejtése. Általánosítva: $detA = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} A_{1k} det[A]_{1k}$ i-edik sor szerint: $detA = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}A_{ik}det[A]_{ik}$ i-edik oszlop szerint: $detA = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}A_{ki}det[A]_{ki}$

3·3-asra: $det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \cdot det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$

Áll.: A determináns tulajdonságai (A n·n-es mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$):

- Ha A diagonális akkor det $A = A_{11} \cdot A_{22} \cdot \ldots \cdot A_{nn}$
- det A^T = det A
- Ha az A két szomszédos sorát felcseréljük akkor ennek a mátrixnak a determinánsa (-1)-szerese az A determinánsának.
- Ha az A két szomszédos oszlopát felcseréljük akkor ennek a mátrixnak a determinánsa (-1)-szerese az A determinánsának.
- Ha az A i-edik sorához hozzáadjuk a j-edik sor λ-szorosát akkor a determináns nem változik ha i≠j.
- Ha az A i-edik oszlopához hozzáadjuk a j-edik oszlop λ-szorosát akkor a determináns nem változik ha i≠j.
- Ha λ-val szorozzuk az A i-edik sorát, akkor a determináns is λ-val szorzódik.
- Ha λ-val szorozzuk az A i-edik oszlopát, akkor a determináns is λ-val szorzódik.
- det (λA) = λ^n·det A
- det (AB) = (det A)·(det B)

Biz.: (néhány)

- A első két sorát cseréljük fel, nevezzük ezt A'-nek $detA' = \sum_{\sigma \epsilon perm(n)} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} \cdot A'_{1\sigma(1)} \cdot A'_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A'_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \epsilon perm(n)} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} \cdot A_{1\sigma(2)} \cdot A_{2\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma(n)} =$ (ha σ az összes permutáció, akkor σ' σ permutációk első két elemének felcserélése. Ekkor is megkapjuk az összes permutációt, mindössze annyi a különbség hogy a plusz 1 felcserélés miatt az összes permutáció index (-1)-szerese az eredetinek.) $= \sum_{\sigma' \epsilon perm(n)} \varepsilon_{\sigma'(1),\sigma'(2),\ldots,\sigma'(n)} \cdot A_{1\sigma'(1)} \cdot A_{2\sigma'(2)} \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma'(n)} = -detA.$
- A' képezzük úgy A-ból, hogy az első sorához adjuk hozzá a második sor λ-szorosát. $detA' = \sum_{\sigma \epsilon perm(n)} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} \cdot A'_{1\sigma(1)} \cdot A'_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A'_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \epsilon perm(n)} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)}(A_{1\sigma(1)} + \lambda A_{2\sigma(1)}) \cdot A_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma(n)} = detA + \sum_{\sigma \epsilon perm(n)} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} \cdot A_{2\sigma(1)} \cdot A_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A'_{n\sigma(n)}$ Azonban a második 0 mivel ehhez a permutációhoz σ(1)=i; σ(2)=j; ε=+1; ∃ olyan permutáció, hogy σ(1)=j; σ(2)=i; ε=-1; és ezek az összegzés során kiejtik egymást.
- $\sum_{\sigma \epsilon perm(n)} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} \cdot (\lambda A_{1\sigma(1)}) \cdot A_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma(n)} = \lambda \cdot detA$
- $\det(AB) = \sum_{\sigma \epsilon perm(n)} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} \cdot (AB)_{1\sigma(1)} \cdot (AB)_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot (AB)_{n\sigma(n)} =$ (eml.:$(AB)_{kj} = \sum_{i=1}^{n} A_{ki}B_{ij}$) $= \sum_{\sigma \epsilon perm(n)} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} \cdot \left(\sum_{i_1=1}^{n} A_{1i_1}B_{i_1\sigma(1)}\right) \cdot \left(\sum_{i_2=1}^{n} A_{2i_2}B_{i_2\sigma(2)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{i_n=1}^{n} A_{ni_n}B_{i_n\sigma(n)}\right) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{n} A_{1i_1}A_{2i_2} \ldots A_{ni_n} \sum_{\sigma perm(n)}^{n} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} B_{i_1\sigma(1)}B_{i_2\sigma(2)} \ldots B_{i_n\sigma(n)} =$ A második szumma csak akkor nem 0 ha az i_k értékek különbözőek, ekkor azonban permutációt

alkotnak amit μ-vel is jelölhetünk.

$= \sum_{\mu \in perm(n)}^{n} A_{1\mu(1)} A_{2\mu(2)} \dots A_{n\mu(n)} \sum_{\sigma perm(n)}^{n} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)} B_{\mu(1)\sigma(1)} B_{\mu(2)\sigma(2)} \dots B_{\mu(n)\sigma(n)} =$
$detA \cdot detB$

A determináns szemléletesen előjeles térfogat:

$\mathbb{R}$ $u=(a)$ $V=a$ (térfogat=hossz)

$\mathbb{R}^2$ $u_1=(x_1,y_1)$ és $u_2=(x_2,y_2)$ (térfogat=terület) $V = \|u_1\| \cdot \|u_2\| \cdot \sin\alpha = \|u_1 \times u_2\| =$
$|x_1y_2 - x_2y_1| = \left|det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right|$

$\mathbb{R}^3$ $u_1=(x_1,y_1,z_1)$; $u_2=(x_2,y_2,z_2)$ és $u_3=(x_3,y_3,z_3)$ $V = |< u_1, u_2 \times u_3 >| = \left|det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\right|$

4. Mátrixok

Def.: A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ A nyoma: $\mathrm{Tr}\, A \coloneqq \sum_{k=1}^{n} A_{kk}$

Def.: A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ A tranzponáltja: $[A^T]_{kl} \coloneqq A_{lk}$

Def.: A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ A adjungáltja: $[A^*]_{kl} \coloneqq \overline{A_{lk}}$

Def.: Egységmátrix: E: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $v \to v$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Def.: A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertálható ha ∃ B: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ úgy hogy BA=AB=E. Ha invertálható, akkor A inverze A^{-1}.

Áll.: A,B: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; Tulajdonságok:

- Tr(A+B)=TrA+TrB
- Tr(λA)=λ·TrA
- Tr(AB)=Tr(BA)
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(\lambda A)^T=\lambda \cdot A^T$
- $(AB)^T=B^T \cdot A^T$
- $A^{T^T} = A$
- (A+B)*=A*+B*
- $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} \cdot A^*$
- (AB)*=B*A*
- $A^{**} = A$

Biz.: (néhány)

- $Tr(A+B) = \sum_{k=1}^{n} (A+B)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} A_{kk} + B_{kk} = \mathrm{Tr}\, A + \mathrm{Tr}\, B$
- $Tr(AB) = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ki} \cdot B_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} \cdot A_{ki} = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} =$
  $Tr(BA)$

- $[(A+B)^*]_{kl} = \overline{(A+B)_{lk}} = \overline{A_{lk}} + \overline{B_{lk}} = [A^*]_{kl} + [B^*]_{kl}$
- $[(AB)^*]_{kl} = \overline{(AB)_{lk}} = \overline{\sum_{i=1}^{n} A_{li} \cdot B_{ik}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_{il}} \cdot \overline{B_{ki}} = \sum_{i=1}^{n} (A^*)_{il} \cdot (B^*)_{ki} = \sum_{i=1}^{n} (B^*)_{ki} \cdot (A^*)_{il} = (B^*A^*)_{kl}$

Áll.: A^{-1} egyértelmű: $AA_1^{-1} = A_1^{-1}A = E$ és $AA_2^{-1} = A_2^{-1}A = E \Rightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1}$

Biz.: $AA_1^{-1}A_2^{-1} = A_1^{-1}AA_2^{-1} = EA_2^{-1} \Rightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1}$

Áll.: det E=1

Biz.: $detE \coloneqq \sum_{\sigma \epsilon perm(n)} \varepsilon_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)} \cdot E_{1\sigma(1)} \cdot E_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot E_{n\sigma(n)}$ csak egyetlen permutációra nem 0 az érték {1, 2, …, n} vagyis $detE = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$

Áll.: Ha A invertálható akkor det A≠0.

Biz.: 1=det $(A \cdot A^{-1})$=det A·det A^{-1} vagyis $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$

<u>Módszer</u> az invertálásra egy példán keresztül: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ det A=2 ⇒ minden egyes helyre almátrix képzés ⇒ $\begin{pmatrix} (4) & (2) \\ (1) & (1) \end{pmatrix}$ ⇒ almátrixok determinánsa ⇒ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ⇒ sakktábla szerűen ±1-el való szorzás ⇒ $\begin{pmatrix} +4 & -2 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$ ⇒ tranzponálás ⇒ $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ⇒ A determinánsával való osztás ⇒
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Pl.: $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$; det P = 1 = det P^{-1}

Ez az eljárás azonban hosszadalmas. Gondoljunk csak bele hogy egy 5·5-ös mátrix determinánsának kiszámolásához $\frac{5!}{2}$ 2·2-es mátrix determinánsát kell kiszámolni. Ezek alapján vezessünk be egy egyszerűbb módszert (Gauss-elimináció):

1x+3y+3z=a 1x+4y+3z=b 2x+7y+7z=c	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
x+3y+3z=a y+0z=b-a y+z=c-2a	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

x+3y+3z=a y=b-a z=-a-b+c	$\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$
x+3y=4a+3b-3c y=b-a z=-a-b+c	$\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&-3\\-1&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$
x=7a-3c y=b-a z=-a-b+c	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0&-3\\-1&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}7&0&-3\\-1&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}=P^{-1}$$

5. Sajátérték és sajátvektor

Def.: A: V→V lineáris leképezés. Az A sajátértéke λ∈ℝ(vagy ℂ), ha ∃ v∈V v≠0 úgy hogy Av=λv. Ekkor v az A λ sajátértékhez tartozó sajátvektora.

Av = λEv ⇒ (A-λE)v = 0 nem injektív (v-t és 0-t is 0-ba viszi) tehát nem invertálható, vagyis determinánsa 0. Ezt a mátrix karakterisztikus egyenletének is nevezik: $\det(A-\lambda E)=0$. Ebből már könnyen kiszámítható a sajátérték.

Pl.: $A=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}-\lambda&2&-2\\2&1-\lambda&0\\-2&0&-1-\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow$

det(A-λE) = λ(1-λ)(1+λ)-4(1-λ)+4(1+λ)=0 ⇒ $-\lambda^3+\lambda(1+4+4)=0$ ⇒ $9\lambda-\lambda^3=0$ ⇒ $\lambda_1=0$; $\lambda_2=3$; $\lambda_3=-3$.

Határozzuk meg a sajátvektorokat: $v_1=(x,y,z)\Rightarrow\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ⇒ y-z=0; 2x+y=0;

2x+z=0 ⇒ $v_1=(-1,2,2)$ hasonlóan λ_2-re: $\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\3y\\3z\end{pmatrix}$ ⇒ $v_2=(-2,-2,1)$; λ_3-ra:

$v_3=(2,-1,2)$.

Áll.: A=A* önadjungált mátrix tulajdonságai:

- ∀ sajátértéke valós
- $\lambda_1\neq\lambda_2$; $Av_1=\lambda_1 v_1$; $Av_2=\lambda_2 v_2$ ⇒ v_1 merőleges v_2-re
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$-hez tartozó $v_1, \dots, v_n$ sajátvektorok bázist alkotnak

Biz.:

- $<Av,v>=<\lambda v,v>=\bar{\lambda}<v,v>=\bar{\lambda}\|v\|^2$ és $<v,A^*v>=<v,Av>=<v,\lambda v>=\lambda<v,v>=\lambda\|v\|^2\Rightarrow\bar{\lambda}=\lambda\Rightarrow\lambda\in\mathbb{R}$
- $<Av_1,v_2>=<\lambda_1 v_1,v_2>=\lambda_1<v_1,v_2>$ és $<v_1,Av_2>=<v_1,\lambda_2 v_2>=\lambda_2<v_1,v_2>\Rightarrow(\lambda_1-\lambda_2)<v_1,v_2>=0$ $\lambda_1\neq\lambda_2$ ⇒ $<v_1,v_2>=0$ $v_1\neq0$ $v_2\neq0$ ⇒ v_1 merőleges v_2

Az előző példánkba szemmel láthatóan egy önadjungált mátrix szerepelt. A v_2,v_1,v_3 vektorok bázist alkotnak. Készítsük el belőlük az S mátrixot: $S = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ majd az inverzét: $S^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Az $A' = S^{-1}AS$ képletből (áttérés más bázisra) a következőt kapjuk: $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Ezt a megállapítást általánosíthatjuk. Ha A n·n-es önadjungált mátrix melynek sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ és bázist alkotó sajátvektorai $v_1, \ldots, v_n$ akkor a belőlük képezett S mátrix hatására az $S^{-1}AS$ szorzat egy diagonális mátrixot alkot, melynek főátlójában a sajátértékek helyezkednek el és ezt a mátrixot jelöljük D-vel. Ekkor kimondható, hogy $A=SDS^{-1}$ és $A^k = SD^kS^{-1}$, így a hatványozás könnyen számolható.

6. Lineáris egyenletrendszerek

Def.: Lineáris egyenletrendszer: A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $c \in \mathbb{R}^m$; Ax = c és x=?.

Pl.: $\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow Ax = c \Leftrightarrow x = (x_1,x_2,x_3)$; $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Speciális esetek:

- Egy lineáris egyenletrendszer homogén ha c=0 ⇒ Ax=0
- A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ⇒ A n·n-es mátrix; x és c is n komponensű; n ismeretlen és n egyenlet van.

Megoldható ha ∃ A^{-1} vagyis det A≠0 ekkor, $x=A^{-1}c$ tehát ∃ egyértelmű megoldás. Megoldáshoz használjuk a Gauss-eliminációt.

Pl.: $\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{matrix} \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4,5 & -1,5 & 0,5 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -3,5 & 1,5 & -0,5 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4,5 & -1,5 & 0,5 \end{matrix} \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4,5 & -1,5 & 0,5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4,5 & -1,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

Az $\begin{matrix} x_1 + tx_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = a \end{matrix}$ egyenletrendszerben hogyan válasszuk meg a és t értékét úgy hogy 0-1-∞ megoldása legyen? $\begin{matrix} x_1 + tx_2 = 1 \\ (1-2t)x_2 = a-2 \end{matrix}$

- Nincs megoldás, ha 1-2t=0 és a-2≠0 vagyis $t = \frac{1}{2} \wedge$ a≠2
- 1 megoldás van, ha 1-2t≠0 vagyis $t \neq \frac{1}{2}$
- Végtelen sok megoldás van, ha 1-2t=0 ∧ a-2=0 vagyis $t = \frac{1}{2} \wedge$ a=2

7. Az $\mathbb{R}^n$ topológiája

Def.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A nyílt, ha $\forall$ $a \in A$-hoz $\exists$ $r>0$ melyre $B_r(a) \subseteq A$. (Minden pontja belső pont)

Def.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A zárt, ha $\mathbb{R}^n \setminus A$ nyílt.

Def.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A korlátos, ha $\exists$ $a \in A$ melyhez $\exists$ $r>0$ melyre $A \subseteq B_r(a)$.

Def.: A kompakt, ha minden nyílt fedésének $\exists$ véges részbefedése.

Heine-Bovel tétel: Ha $A \subseteq \mathbb{R}^n$ akkor igaz az, hogy kompakt $\Leftrightarrow$ korlátos és zárt.

Def.: Az s: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens és konvergál x-hez ha $\forall$ $\varepsilon>0$-hoz $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ melyre $\forall$ $n>N$ $\|s_n - x\| < \varepsilon$.

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; a torlódási pontja Dom f-nek; $A \in \mathbb{R}^m$. Az f határértéke a-ban A, ha $\forall$ $\varepsilon>0$-hoz $\exists$ $\delta>0$, hogy ha $0 < \|x-a\| < \delta$ akkor $\|f(x) - A\| < \varepsilon$.

8. A $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények folytonossága

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in$ Dom f. f folytonos a-ban ha $\forall$ $\varepsilon>0$-hoz $\exists$ $\delta>0$ hogy ha $\|x-a\| < \delta$ akkor $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ vagy az átviteli elv alapján $\forall$ $x_n \to a$ sorozatra $\Rightarrow$ $f(x_n) \to f(a)$. f folytonos, ha $\forall$ $a \in$ Dom f-re folytonos.

Boltzano-Tétel: Ha f folytonos H összefüggő nyílt halmazon $a,b \in H$ és $c \in [f(a), f(b)]$ $\Rightarrow$ $\exists$ $k \in H$ melyre $f(k)=c$.

Weierstrass I: Ha H kompakt halmaz és f folytonos függvény akkor f(H) is kompakt halmaz. II: Ha H kompakt halmaz és f folytonos függvény akkor f felveszi az infinumát és a suprénumát a H halmazon. ($\exists$ $\alpha,\beta \in H$ melyre $f(\alpha) = \mathrm{INF}_{x \epsilon H}\, f(x)$ és $f(\beta) = \mathrm{SUP}_{x \epsilon H}\, f(x)$)

Def.: f:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény egyenletes folytonos $H \subset D_f$ halmazon ha $\forall$ $\varepsilon>0$-hoz $\exists$ $\delta>0$ hogy $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ha $\|x_1 - x_2\| < \delta$; $x_1, x_2 \in D_f$.

Heine-Tétel: Kompakt halmazon folytonos függvény egyenletesen is folytonos.

9. A $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények parciális deriválás

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $x=(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. f-nek x_k változó szerinti parciális deriváltja $a=(a_1, \ldots, a_n)$ helyen $\frac{\partial f}{\partial x_k} = f'_{x_k} = \partial_k f = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_k + h, \ldots a_n) - f(a_1, \ldots a_n)}{h}$ ha $\exists$ és véges.

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}^n$, f deriválható a-ban ekkor $(GRADf)(a) \coloneqq \big((\partial_1 f)(a), \ldots, (\partial_n f)(a)\big)$ n elemű vektor az f függvény gradiense a-ban.

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n-szer deriválható függvény a pont körüli Taylor-polinomja: $T_{n,a}^f(x) \coloneqq \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^n (\partial i_1 \partial i_2 \ldots \partial i_n f)(a) \cdot (x-a)_{i_1} \cdot \ldots \cdot (x-a)_{i_k}$

Def.: f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ felület a pontbeli érintősíkja az elsőfokú Taylor-polinom. $z = \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) = f(a) + \big((\partial x f)(a)\big)(x - a_x) + \big((\partial y f)(a)\big)(y - a_y)$

10. A $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények deriválás

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; a∈Int Dom f; A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés. f deriváltja az a pontban A, ha $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{\|x-a\|} = 0$. Jel: (Df)(a):=A.

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Df: {a∈$\mathbb{R}^n$ | ahol létezik a deriváltja}→Lin($\mathbb{R}^n$,$\mathbb{R}^m$) vagyis Df olyan függvény, hogy a↦(Df)(a).

Def.: f függvény deriválható, ha Dom Df = Dom f.

Deriválhatóság szükséges feltételei:

- Parciálisan deriválható ∀ változóra
- Folytonos

Deriválhatóság elégséges feltétele:

- **T.:** f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és a∈Int Dom f. f differenciálható a-ban ha ∀ változóra a parciális deriváltak léteznek és folytonosak a valamely környezetében. f differenciálható Dom f-en ha ∀ változóra a parciális deriváltak léteznek és folytonosak Dom f-en.

T.: f,g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; c∈$\mathbb{R}$; a∈$\mathbb{R}^n$. Ha f és g is deriválható a-ban akkor

- f+g is deriválható a-ban: D(f+g)(a) = (Df)(a)+(Dg)(a)
- c·f is deriválható a-ban: D(c·f)(a) = c·(Df)(a)

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; a∈$\mathbb{R}^n$; a∈Int Dom f; e∈$\mathbb{R}^n$ és ||e||=1 ekkor $(DEf)(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te)-f(a)}{t}$ az f függvény a pontbeli e iránymenti deriváltja.

T.: Ha f deriválható a-ban akkor ∀ v irányba létezik az iránymenti derivált. Ha ||v||=1 akkor $(DEf)(a) = < GRADf(a), v >$

11. Lokális szélsőérték

Def.: f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a∈$\mathbb{R}^n$. f-nek lokális maximuma van a-ban ha ∃ r∈$\mathbb{R}^+$ hogy ∀ x∈Br(a)⋂Dom f ⇒ f(x)≤f(a). f-nek lokális minimuma van a-ban ha ∃ r∈$\mathbb{R}^+$ hogy ∀ x∈Br(a)⋂Dom f ⇒ f(x)≥f(a). f-nek szigorúan lokális maximuma van a-ban ha ∃ r∈$\mathbb{R}^+$ hogy ∀ a≠x∈Br(a)⋂Dom f ⇒ f(x)<f(a). f-nek szigorúan lokális minimuma van a-ban ha ∃ r∈$\mathbb{R}^+$ hogy ∀ a≠x∈Br(a)⋂Dom f ⇒ f(x)>f(a).

Def.: A: $V^n \to \mathbb{R}$ mátrix

- pozitív ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ (sajátértékei pozitívak vagy nullák)
- pozitív definit ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$
- negatív ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \leq 0$
- negatív definit ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_n < 0$
- indefinit ha ∃ $\lambda_p<0$ és $\lambda_q>0$ is

T.: f: (V, || ||)→$\mathbb{R}$; a∈Int Dom f. Ha f-nek lokális szélsőértéke van a-ban akkor (Df)(a)=0.

T.: f: (V, || ||)→$\mathbb{R}$; 1<n∈$\mathbb{N}$; a∈Int Dom ($D^{(n)}$f). Ha ∀ i<n-re ($D^{(i)}$f)(a)=0 és ($D^{(n)}$f)(a)≠0 akkor

- ha n páros és $(D^{(n)}f)(a)<0$ akkor f-nek lokális maximuma van a-ban
- ha n páros és $(D^{(n)}f)(a)>0$ akkor f-nek lokális minimuma van a-ban
- ha $(D^{(n)}f)(a)$ lineáris leképezés pozitív definit akkor szigorúan lokális minimuma van a-ban
- ha $(D^{(n)}f)(a)$ lineáris leképezés negatív definit akkor szigorúan lokális maximuma van a-ban

Young-Tétel: A parciális deriválás sorrendje felcserélhető. **Pl.:** $f''_{yx} = f''_{xy}$

Kétváltozós eset:

Ott lehet szélsőértéke egy kétváltozós függvénynek ahol $(\partial x f)(a) = 0$ és $(\partial y f)(a) = 0$.

Vizsgáljuk a további parciális deriváltakat, készítsünk egy ilyen mátrixot: $D^2 f \coloneqq \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$.

Ha $\det((D^2 f)(a)) > 0$ akkor ott van lokális szélsőérték, $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ esetén lokális minimum, $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ esetén pedig lokális maximum van. Ha $\det((D^2 f)(a)) < 0$ ott nincs lokális szélsőérték. Ha $\det(D^2 f) = 0$ akkor nem eldönthető.

12. Integrálás

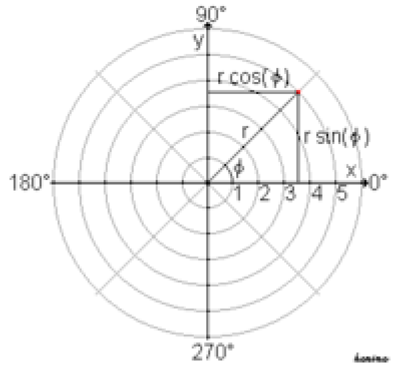
Koordináta transzformáció 3 változóra

x,y,z→u,v,w x = x(u,v,w); y = y(u,v,w); z = z(u,v,w)

Jacobi determináns: $J = det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$ dv = dx dy dz = |J| du dv dw

Polár koordináta-rendszer:

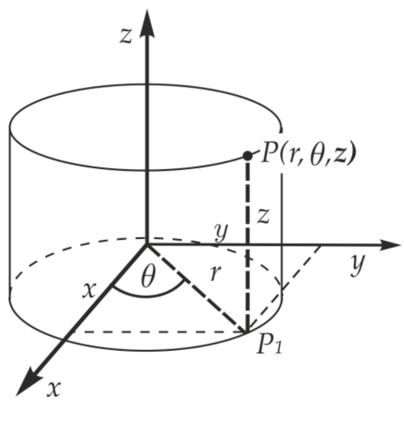
(x, y)→(r, φ)	(r, φ)→(x, y)
$x = r\cos\varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\sin\varphi$	$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$



r∈[0,R]; φ∈[0,2π]; Jacobi-determináns: r

Hengerkoordináta-rendszer:

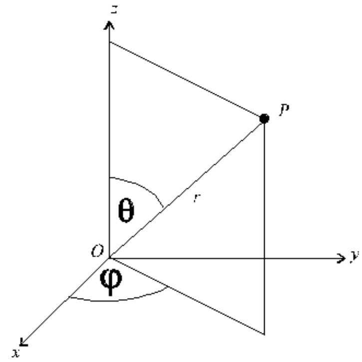
(x, y, z)→(r, φ, z)	(r, φ, z)→(x, y, z)
$x = r\cos\varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\sin\varphi$	$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$
z=z	z=z



r∈[0,R]; φ∈[0,2π]; z∈[-∞,∞] Jacobi-determináns: r

Gömbi koordináta-rendszer:

(x, y, z)→(r, φ, θ)	(r, φ, θ)→(x, y, z)
$x = r\cos\varphi\sin\theta$	$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$y = r\sin\varphi\sin\theta$	$\varphi = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$
$z = r\cos\theta$	$\theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$



r∈[0,R]; φ∈[0,2π]; θ∈[0,π[Jacobi-determináns: $r^2\sin\theta$

Az integrálás eddig is valamilyen területet/térfogatot számolt ki, ez továbbra sem változik. Szemléletesen, ha egy függvény x,y koordinátákhoz hozzárendel egy z számot akkor egy felületet kapunk, az ez alatti térfogatot a kettes integrállal számolhatjuk. Ha egy függvény az x,y,z térkoordinátákhoz rendel egy számot, akkor ennek a testnek a térfogatát a hármas integrállal számolhatjuk ki. Például ha egy testnek minden egyes pontjához hozzárendeljük az adott pont sűrűségét (sűrűség eloszlás függvény ρ(x,y,z)) akkor x,y,z-hez tartozó hármas integrállal megkapjuk a test súlyát: $m(v) = \iiint_v \rho(x,y,z)dv$, de könnyedén számolhatunk nyomást, tehetetlenségi nyomatékot és valószínűséget is ilyen eljárással.

Integrálás felcserélése egy példán: K:={(x,y)∈$\mathbb{R}^2$ | 0≤x≤1; 0≤y≤x} és f(x,y)=x^2y

1. Bejárás: előbb x alapján x∈[0,1] majd y alapján y∈[0,x] ⇒ $\int f = \int_0^1\int_0^x x^2y\,dydx = \int_0^1\left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^1\frac{x^4}{2} - 0\,dx = \left[\frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{10}$
2. Bejárás: előbb y alapján y∈[0,1] majd x alapján x∈[y,1] ⇒ $\int f = \int_0^1\int_y^1 x^2y\;dxdy = \int_0^1\left[\frac{x^3}{3}y\right]_y^1 dy = \int_0^1\frac{y}{3} - \frac{y^4}{3}dy = \left[\frac{y^2}{6} - \frac{y^5}{15}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{5-2}{30} = \frac{1}{10}$

13. Sorok

Def.: a: ℕ→ℝ/ℂ/(V; ‖ ‖) sorozat. Az a sorozatból képzett sor: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Az a sor n-edik részletösszege: $\alpha_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor a sorösszeg: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty}\alpha_n$.

Def.: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens ha $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k = c$ valós szám, amely c számot a sor határértékének nevezzük. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor divergens ha $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergens.

Def.: a: ℕ→ℂ $\sum_n a_n$ sor abszolút konvergens ha $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| < \infty$.

Geometria sor: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ sor konvergens ha $|q| < 1$ és határértéke $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Harmonikus sor: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ sor divergens.

Biz.: $\alpha_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$; $\alpha_n > \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx = \ln(n+1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\alpha_n \geq \lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty$. Alulról becsültem egy olyan sorozattal, ami végtelenhez tart tehát divergens.

Áll.: Ha $\sum_n a_n$ sor abszolút konvergens akkor konvergens is.

Biz.: $\alpha_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ és $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| = A$; A∈$\mathbb{R}_0^+$. Ha ε>0 ⇒ ∃ N∈ℕ N<n ekkor $\sum_{k=n}^{\infty}|a_k| < \varepsilon$. Ha m>n>N ⇒ $|\alpha_m - \alpha_n| = |\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m}|a_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty}|a_k| < \varepsilon \Rightarrow \forall$ ε>0-hoz ∃ N∈ℕ és m,n>N melynél $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$ ekkor α Cauchy-sorozat, ami konvergens.

Áll.: Majoráns-minoráns kritérium: Végy két sorozatot melynek elemei pozitívak vagy nullák. a,b: ℕ→$\mathbb{R}_0^+$.

- Ha ∀n∈ℕ-re $a_n \leq b_n$ és $\sum_{k=0}^{n} b_k < \infty$ akkor $\sum_{k=0}^{n} a_k < \infty$
- Ha ∀n∈ℕ-re $a_n \leq b_n$ és $\sum_{k=0}^{n} a_k = \infty$ akkor $\sum_{k=0}^{n} b_k = \infty$

Biz.: $\alpha_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$; $\beta_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$ $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$

- ∃ $\lim_{n\to\infty} \beta_n = B$ α_n sorozat monoton növő és felülről korlátos ($\alpha_n \leq B$) ⇒ ∃ határérték ⇒ konvergens
- $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$ és $\alpha_n \leq \beta_n$ ⇒ $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty$ Hasonlóan visszavezettük sorozatokra.

Áll.: Cauchy-féle gyök kritérium: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} ha < 1\ akkor\ abszolut\ konvergens \\ ha > 1\ akkor\ divergens\ a\ sor \end{cases}$

Biz.: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$; q∈ℝ. ∃ N hogy, ha n>N, akkor $\sqrt[n]{|a_n|} < q \Rightarrow |a_n| < q^n$. Ekkor teljesül az hogy $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k| = \sum_{k=0}^{N+1}|a_k| + \sum_{k=N+2}^{\infty}|a_k| \leq \sum_{k=0}^{N+1}|a_k| + \sum_{k=0}^{\infty} a^k < \infty$ mert az első tag csak egy szám, a második pedig egy abszolút konvergens sor. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > q > 1$ q∈ℝ. ∃ N hogy, ha n>N, akkor $\sqrt[n]{|a_n|} > q \Rightarrow |a_n| > q^n > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ vagyis nem lehet konvergens.

Áll.: a: ℕ→ℂ\{0}. Ha $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = Q$ és Q∈$\mathbb{R}_0^+$ akkor $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q$. (A hányados kritérium azt mondja, hogy a képletből ugyanaz az eredmény fog kijönni, mint a gyök kritériumból, tehát itt is igaz, hogy azt kell vizsgálni, hogy Q kisebb vagy nagyobb, mint 1, viszont az is látszik, hogy a gyökkritérium erősebb.)

Biz.: A<Q, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > A$. ∃ N melyhez ∀ n>N hogy $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > A \Rightarrow |a_{n+1}| > A \cdot |a_n| \Rightarrow$ $|a_{n+2}| > A \cdot |a_{n+1}| > A^2 \cdot |a_n| \Rightarrow |a_{n+m}| > A^m \cdot |a_n| \Rightarrow |a_{n+m}| > A^{m+n} \cdot |a_n| \frac{1}{A^n} \Rightarrow |a_k| > A^k \cdot \frac{|a_n|}{A^n} \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} > A \cdot \sqrt[k]{\frac{|a_n|}{A^n}} \Rightarrow liminf \sqrt[k]{|a_k|} \geq A$ ∀ A-ra. Hasonlóan B>Q-ra, egy bizonyos N-től kezdve $|a_{n+m}| < B^m \cdot |a_n| \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} < B \cdot \sqrt[k]{\frac{|a_n|}{B^n}} \Rightarrow limsup \sqrt[k]{|a_k|} \leq B$ ∀ B-re, amiből következik, hogy $iminf \sqrt[k]{|a_k|} = limsup \sqrt[k]{|a_k|} = Q$ tehát konvergens.

14. Függvénysorozatok és függvénysorok

Def.: Ha T egy halmaz, és ∀ n∈ℕ számhoz rendelünk egy f_n: T→ℝ függvényt akkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy függvénysorozat.

Def.: ∀ n∈ℕ f_n: T→ℝ pontonkénti határfüggvénye:
$f := \{t \in T | \forall\ n \in \mathbb{N}, t \in \mathrm{Dom} f_n\, és\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(t)\}$ ekkor t↦$\lim_{n\to\infty} f_n(t)$. (Ha t benne van az

értelmezési tartományban és a függvények t helyen felvett értékeiből előálló sorozatnak létezik határérték akkor ez az f határfüggvény legyen minden ilyen t pontban ez a határérték.)

Def.: T halmaz; ∀ n∈ℕ-hoz f_n: T→ℝ; $f \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n$ és A⊆T. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez ha ∀ ε>0-hoz ∃ N∈ℕ melyre ∀ n>N és ∀ t∈A-ra $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$.

Def.: Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat <u>egyenletesen konvergens</u> ha egyenletesen konvergál a T=Domf=Domf_n halmazon. Jele: $f_n \rightrightarrows f$

Def.: A függvény sorokat hasonlóan állítjuk elő függvénysorozatokból, mint ahogy számsorozatokból számsorokat. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ <u>függvénysor</u>. f_n: ℝ→ℝ ⇒ $\sum_{k=0}^{N} f_k$: ℝ→ℝ hogy x↦$\sum_{k=0}^{N} f_k\,(x)$. Tehát $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ olyan függvénysor mely minden valós x-hez melyekre teljesül, hogy ∀ k∈ℕ-re x∈Domf_k és hogy ∃ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ hozzárendel, úgy hogy x↦$\sum_{k=0}^{\infty} f_k\,(x)$.

Def.: $\sum_k f_k$ <u>egyenletesen konvergens</u>, ha $\alpha_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f_k$ $\alpha_n \rightrightarrows g$

<u>Weierstrass tétel</u>: A⊆ℝ; f_n: A→ℝ. Ha ∃ a: ℕ→ℝ sorozat hogy ∀ k∈ℕ-re és ∀ x∈A-ra $|f(x)| \le a_k$ és $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ akkor $\sum_k f_k$ egyenletesen konvergens.

Áll.: a,b∈ℝ. Ha f_n∈C([a,b],ℝ) és $f_n \rightrightarrows f$, akkor $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$. (Mindhárom feltétel nagyon fontos(folytonosság, zárt intervallum, egyenletes konvergencia) és másképpen: $\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$) <u>limes és integrálás felcserélése</u> függvénysorozat esetén.

Biz.: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \le \int_a^b |f_n - f| \le \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$

T.: Ha

- f_n:]a,b[→ℝ differenciálható
- ∃ x_0∈]a,b[melyhez ∃ $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ (legalább egy pontban létezik a határfüggvény)
- $f_n' \rightrightarrows g$ az]a,b[-n (f_n deriváltjának ∃ határfüggvénye és egyenletesen konvergál hozzá)

akkor

- ∃ $f \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n$, $f_n \rightrightarrows f$]a,b[-n (létezik a teljes határfüggvény és egyenletesen konvergens f_n)
- ∀ x∈]a,b[-ra $f'(x) = \lim_{n\to\infty} {f'}_n(x)$ (a <u>deriválás is felcserélhető</u> függvénysorozatoknál, másképpen: $(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} {f'}_n$)

Áll.: Ha g_n∈C([a,b],ℝ) és $\sum_k g_k \rightrightarrows \sum_{k=0}^{\infty} g_k$ akkor $\int_a^b (\sum_{k=0}^{\infty} g_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b g_k\right)$ függvénysor <u>integrálja felcserélhető</u> egy függvénysorozat integráljának összegezésére.

Biz.: $f_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} g_k$

T.: Ha

- g_n:]a,b[→ℝ differenciálható
- ∃ x_0∈]a,b[melyre ∃ $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ (legalább egy pontban konvergens a függvénysor)

- $\sum g'_n \rightrightarrows G$ (a függvénysor deriváltja egyenletesen konvergens)

akkor

- $\exists\ g := \sum_{n=0}^{\infty} g_n$, $\sum g_n \rightrightarrows g$]a,b[-n (létezik a teljes függvénysor és egyenletesen konvergens $\sum g_n$)
- g differenciálható]a,b[-n, $g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g'_k(x)$ (a függvénysor deriválható és nem más mint a függvénysorozat deriváltjainak összege)

15. Hatványsorok

Def.: Az a: ℕ→ℂ sorozat által meghatározott hatványsor: $Pa(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k$

Def.: Az a: ℕ→ℂ sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara:

$$Ra := \begin{cases} \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\ ha\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0, \infty \\ \infty\ ha\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ 0\ ha\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \end{cases}$$

Cauchy-Hadamard tétel: Adott a: ℕ→ℂ sorozat és a hozzá tartozó konvergencia sugár (Ra). Ha $|z| < Ra$ akkor Pa(z) konvergens. Ha $|z| > Ra$ akkor Pa(z) divergens. (A tétel a $|z| = Ra$ helyen nem mond semmit).

16. Fourier-sorfejtés

Def.: Ha f∈R([0,2π], ℝ) akkor $\big(F(f)\big)(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin kx$ az f függvény Fourier sora, ahol a Fourier együtthatók:

- $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$
- $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$
- $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$

Áll.: f: ℝ→ℝ 2π szerint periodikus és kétszer folytonosan differenciálható, ekkor f Fourier-sora egyenletesen konvergál f-hez.

Biz.: A weierstrass tétel alapján azt kell bizonyítani, hogy $\sum a_k$ és $\sum b_k$ is konvergens. $a_k = \int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \left[f(x)\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\left(\left[-f'(x)\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f''(x)\cos kx\,dx\right) = -\frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} f''(x)\cos kx\,dx$. Mivel f'' folytonos a [0,2π] kompakt halmazon ezért ∃ K szám mellyel fölül lehet becsülni. $|a_k| \leq \frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} K \cdot 1\,dx = \frac{2\pi K}{k^2}$ Tehát konvergens. $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\pi K}{k^2} < \infty$, b_n hasonlóan.

Dirichlet-féle lokalizációs tétel: f: ℝ→ℝ 2π szerint periodikus; a∈ℝ. Ha ∃ $\lim_{x\to a+} f(x)$, ∃ $\lim_{x\to a-} f(x)$ és ∃ δ>0 úgy hogy f monoton]a-δ, a[és]a, a+δ[tartományban, akkor $\big(F(f)\big)(a) = \frac{\lim_{a+} f + \lim_{a-} f}{2}$.