Régi vizsgazárthelyi megoldásokkal

1. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok ? Válaszát indokolja !

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n^3})$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

MO. a) $\ln(1+\frac{1}{n^3}) \sim \frac{1}{n^3}$ konvergens b) $\frac{1}{n^{1+1/n}} \sim \frac{1}{n}$ divergens.

2. a) Igaz-e, hogy az $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ sorozat egyenletesen konvergens az egész $\mathbf{R}$–en?

b) Igaz-e, hogy minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n'(x) = \Big(\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)\Big)'$?

MO. $f_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0 \rightsquigarrow |f_n(x)| = |r_n(x)| = \left|\dfrac{\sin nx}{n}\right| \le \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén, így egyenletesen konvergens az egész $\mathbf{R}$–en. b) Nem, nem létezik a $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n'(x)$, mert $f_n'(x) = \cos nx$.

3. Oldja meg az $y' + 4xy = x$, $y(0) = 1$ kezdeti érték problémát!

MO. A homogén: $y' + 4xy = 0 \rightsquigarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int 4x\,dx \rightsquigarrow \ln|y| = -2x^2 + c \rightsquigarrow$
$y = ce^{-2x^2}$, vagyis a homogén általános megoldása: $y_{há} = ce^{-2x^2}$. Az inhomogén az állandók variálásával:
$y = c(x)e^{-2x^2} \rightsquigarrow c'e^{-2x^2} - 4xce^{-2x^2} + 4xce^{-2x^2} = x \rightsquigarrow c'e^{-2x^2} = x \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow c' = xe^{2x^2} \rightsquigarrow c = \displaystyle\int xe^{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}e^{2x^2} \rightsquigarrow y = \frac{1}{4}e^{2x^2}e^{-2x^2} = \frac{1}{4}$. Így az inhomogén egy partikuláris megoldása: $y_{ip} = \dfrac{1}{4}$, amivel az inhomogén általános megoldása: $y_{iá} = y_{há} + y_{ip} =$
$= \dfrac{1}{4} + ce^{-2x^2}$. A kezdeti értékhez ebből: $1 = y(0) = \frac{1}{4} + ce^0 \rightsquigarrow c = \frac{3}{4} \rightsquigarrow$
$y = \frac{1}{4}(1 + 3e^{-2x^2})$.

4. Adja meg a háromdimenziós vektorok terének egy olyan bázisát, melyben az $x + y + z = 0$ síkra való tükrözés operátorának mátrixa diagonálmátrix és határozza meg ezt a mátrixot!

MO. A sajátértékekbôl álló bázisok a kívánt tulajdonságuak, az operátornak a síkba esô és arra merôleges vektorok sajátvektorai, tehát egy megfelelô bázis két lineárisan független síkbeli és egy arra merôleges vektorból (egy normálvektorból) áll ; ilyen például: $\{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\}$. Mivel a tükrözés ezek közül az első kettőt, melyek a síkba esnek változatlanul hagy, az utolsót pedig (-1)–szeresére változtatja, a báziselemek képeinek oszlopvektorai ebben a bázisban: $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Folytonosak-e az alább definiált f függvény parciális deriváltjai az origóban ?

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \quad \text{az origón kívül és} \quad f(0,0) = 0$$

MO. $f_x(x,y) = \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ az origón kívül és $f_x(0,0) = 0$, $f_y(x,y) = \dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ az origón kívül és $f_y(0,0) = 0$ Ezek nem folytonosak, mert $f_x(x,0) = 0 \ne \dfrac{1}{2} = f_x(x,x)$, $f_y(x,x) = 0 \ne 1 = f_y(x,0)$.

6. Határozza meg az $x^2 - 2x + y^2 = 0$ körlap azon részének területét, mely az $y = x$ és az $y = -x$ egyenesek közé esik !

MO. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{2\cos\varphi} r\,dr\,d\varphi = 2\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\varphi} r\,dr\,d\varphi = 4\int_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\,d\varphi = 4\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi =$

$\displaystyle= 2\varphi + \sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} + 1\,.$