Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2018. április 23.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x - y| \leq 2$. Van-e G-nek olyan feszítőfája, amely

a) tartalmazza G-nek az összes olyan $\{x, y\}$ élét, amelyre $x, y \leq 3$ teljesül;

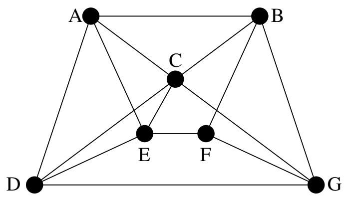
b) tartalmazza G-nek az összes olyan $\{x, y\}$ élét, amelyre $|x - y| = 2$ teljesül?

* * * * *

a) Az $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ és $\{2, 3\}$ élek (három hosszú) kört alkotnak G-ben. (1 pont)
Mivel egy fa (a fa definíciója szerint) nem tartalmazhat kört, ezért ilyen feszítőfa nincs. (2 pont)

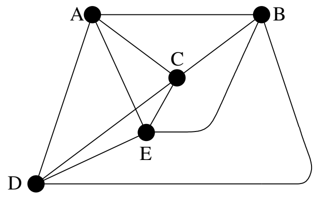
b) A feladatban megadott élek (a $V(G)$ csúcshalmazon) két komponensű, de körmentes gráfot alkotnak: ez az $1-3-5-7-9$ és a $2-4-6-8-10$ utakból áll. (1 pont)
Vegyünk hozzá ehhez az élhalmazhoz egy tetszőleges olyan élet, amelynek az egyik végpontja páros, a másik páratlan (például: $\{1, 2\}$). (1 pont)
Ezzel nyilván nem hoztunk létre kört (hiszen a behúzott él két végpontja között nem volt út),(2 pont)
de a kapott gráf már összefüggő (hiszen most már a $V(G)$ bármely két csúcsa között van út).(2 pont)
Mivel $V(G)$ a kapott élhalmazzal körmentes és összefüggő gráfot alkot, ezért feszítőfa. Így a válasz itt igen. (1 pont)
Ha egy megoldó behúz egy helyesen választott élet, a kapott gráfot lerajzolja, majd minden további indoklás nélkül kijelenti, hogy ez feszítőfa, az a b) feladatért járó pontok közül legföljebb 3-at kapjon. Ha viszont egy megoldó a rajz alapján nem csak kijelenti, hogy feszítőfát kapott, hanem indoklásként leírja, hogy a gráf körmentes, összefüggő és minden csúcsot tartalmaz, akkor a b) feladatból járó 7 pontból akár 6-ot is megkaphat; ha a feszítőfa tulajdonságait csak részben sorolja fel, akkor az hiányzó tulajdonságonként a 6-ból egy-egy pont veszteséget jelentsen.

2. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.



* * * * *

Hagyjuk el a gráfból a $\{C, G\}$ és $\{F, G\}$ éleket. (2 pont)
A keletkező gráfban F és G foka 2 lesz, ezeket „olvasszuk össze” egyetlen éllé: (2 pont)



A kapott gráf a K_5 (az 5 csúcsú teljes gráf), mert bármely két csúcsa szomszédos. (2 pont)
Mivel a feladatbeli gráf tartalmaz K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot, ezért a Kuratowski-tétel (annak a „könnyű iránya”) szerint nem síkbarajzolható. (4 pont)
Megjegyezzük, hogy a gráf $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot is tartalmaz (például az $\{A, E\}$, $\{B, C\}$, $\{C, D\}$ és $\{F, G\}$ élek elhagyásával, majd az így másodfokúvá vált F éleinek összeolvasztásával kaphatunk ilyet), így a feladatnak más jó megoldása is van. A K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráf létezését nem feltétlen szükséges a fenti részletességgel indokolni: elegendő, ha egy megoldó a rajzán jelzi (például áthúzással) az elhagyandó éleket és összeolvasztandó csúcsokat. Azonban egy teljes pontszámot érő megoldásban ezeknek a lépéseknek valamilyen formában mindenképp jelezve kell lenni. Ha például egy megoldó csak három „H” és három „K” betűt helyez a rajzára, de nem mutatja, hogyan keletkezik ezekből a $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráf, az a pontozásban jelzett első 6 pontból legföljebb 2-t kaphat.

3. A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x - y| = 3$ vagy $|x - y| = 5$. Határozzuk meg a G gráf

a) $\chi(G)$ kromatikus számát;

b) $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

* * * * *

a) Mivel a szomszédos csúcspárok különbsége mindig páratlan (3 vagy 5), ezért minden él egyik végpontja páros, a másik páratlan. (2 pont)
Ebből következően G csúcsai megszínezhetők 2 színnel: a páros számok kapják az egyik, a páratlanok a másik színt. (2 pont)
Mivel G-nek van éle, ezért egy színnel biztosan nem színezhetők a csúcsai. Így $\chi(G) = 2$. (1 pont)

b) Könnyű meggyőződni róla (például G lerajzolásával), hogy G-ben a 4, 5, 6 és 7 csúcsok foka 3, a többié 2. Így a maximális fokszám: $\Delta(G) = 3$. (2 pont)
Az a) feladatban beláttuk, hogy $\chi(G) = 2$, így G páros gráf. (1 pont)
Ezért Kőnig tanult tétele szerint $\chi_e(G) = \Delta(G) = 3$. (2 pont)
A Kőnig-tételre való hivatkozás helyett természetesen teljes értékű megoldást jelent az is, ha valaki megadja G éleinek egy 3 színnel való színezését. Ekkor a színezés megadása önmagában 2 pontot ér, majd ebből és a $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$ összefüggésből a $\chi_e(G) = 3$ következtetés levonása további 1-et.

4. Hagyjuk el a **3.** feladatban definiált G gráfból a $\{3, 8\}$ élt, a kapott gráfot jelöljük H-val. (H csúcshalmaza tehát azonos G-ével, az éleinek a száma viszont eggyel kisebb.)

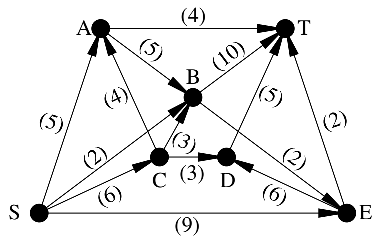
a) Határozzuk meg $\nu(H)$-t, a H-beli független élek maximális számának értékét és adjunk meg H-ban egy maximális független élhalmazt.

b) Határozzuk meg $\alpha(H)$-t, a H-beli független pontok maximális számának értékét és adjunk meg H-ban egy maximális független ponthalmazt.

* * * * *

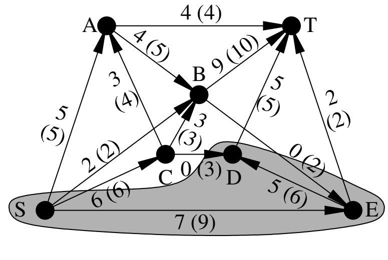
a) H-ban független élhalmazt alkotnak például a $\{2,7\}$, $\{3,6\}$, $\{4,9\}$ és $\{5,8\}$ élek. (1 pont)
A $\{4,5,6,7\}$ csúcsok pedig lefogó ponthalmazt alkotnak H-ban. Erről meggyőződhetünk H lerajzolásával is vagy hivatkozhatunk arra, hogy mivel az $\{1,2,3,8,9,10\}$ halmazban nyilván nincs 3 távolságra lévő pár és az egyetlen 5 távolságra lévő a H élei közül hiányzó $\{3,8\}$, ezért H minden éle tartalmaz 4 és 7 közötti csúcsot. (2 pont)
A megadott négy elemű független élhalmaz miatt $\nu(H) \geq 4$. Hasonlóan, a megadott négy elemű lefogó ponthalmaz miatt $\tau(H) \leq 4$. Ezeket összevetve a tanult $\nu(H) \leq \tau(H)$ összefüggéssel a $4 \leq \nu(H) \leq \tau(H) \leq 4$ becsléseket kapjuk. Így $\nu(H) = 4$ és (például) a fent felsorolt élek maximális független élhalmazt alkotnak. (2 pont)
A fentiekből az is kiderült, hogy $\tau(H) = 4$. Így Gallai tétele miatt $\alpha(H) = 10 - \tau(H) = 6$. (2 pont)
H-ban független ponthalmazt alkotnak az $\{1,2,3,8,9,10\}$ csúcsok (amit fentebb, a $\{4,5,6,7\}$ lefogóságának indoklása közben már megmutattunk). (2 pont)
$\alpha(H) = 6$ miatt tehát ez egy maximális független ponthalmaz. (1 pont)
A fenti mellett számos más, helyes megoldás is elképzelhető. Hivatkozhatunk például a **3.** feladat megoldása alapján arra is, hogy H páros gráf, amelynek a két pontosztálya a páros, illetve a páratlan számok (hiszen a $\{3,8\}$ él elhagyása ezen nem változtat); mivel azonban például az $X = \{2,8,10\}$ halmazra $N(X) = \{5,7\}$, ezért a Hall-tétel szerint H-ban nincs a páros számokat lefedő párosítás, így a megadott 4 élű párosítás valóban maximális. De mondhatjuk egyszerűen azt is, hogy mivel 3 és 8 elsőfokúak, ezért egy öt élű, vagyis teljes párosításban a párjaik csak 6, illetve 5 lehetnének; ezek után a kettő fokú 2 és 9 párjai már csak 7, illetve 4 lehetnének; viszont az így kimaradó 1 és 10 nem szomszédosak, így öt élű párosítás mégsem lehet. $\alpha(H)$ értékének meghatározására történhet úgy is, hogy megadunk egy hat élű lefogó élhalmazt is, majd hivatkozunk a tanult $6 \leq \alpha(H) \leq \varrho(H) \leq 6$ összefüggésekre. Vagy hivatkozhatunk arra is, hogy a Gallai tételek bizonyításakor tanultak szerint egy minimális lefogó ponthalmaz komplementere maximális független csúcshalmaz kell legyen.

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be).



* * * * *

Az alábbi ábrán látható folyam értéke 20. (3 pont)
Az ugyancsak az ábrán látható vágás (tehát az $\{S, D, E\}$ halmaz és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az $\{S, D, E\}$ halmazból a maradék csúcsok halmazába menő élek összkapacitása) szintén 20. (4 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, ezért a 20 értékű vágás bizonyítja, hogy a 20 értékű folyam maximális. (3 pont)
A folyam maximalitása mellett lehet annak megmutatásával is érvelni, hogy a 20 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út. Az utolsó 3 pont annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális. (De sem „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális" mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak, sem az algoritmus puszta futtatása.)



6*. Felsorolhatók-e az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaz összes négy elemű részhalmazai egyetlen sorozatban úgy, hogy a sorozatban egymás mellett álló részhalmazoknak mindig legyen legalább két közös eleme (és a sorozat minden részhalmazt pontosan egyszer tartalmazzon)?

* * * * *

A rövidség kedvéért használjuk a $H = \{1, 2, \ldots, 10\}$ jelölést.
A G gráf csúcshalmaza álljon a H összes négy elemű részhalmazából. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő részhalmazoknak van legalább két közös eleme. A feladat azt kérdezi, hogy létezik-e G-ben Hamilton-út. (1 pont)
G csúcsainak száma a H négy elemű részhalmazainak száma, vagyis $\binom{10}{4} =$ (1 pont)
$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$ (1 pont)
Válasszuk ki a G egy tetszőleges U csúcsát (vagyis a H egy négy elemű részhalmazát).
G-nek $\binom{6}{4}$ olyan csúcsa van, amely U-tól diszjunkt, hiszen a hat elemű $(H \setminus U)$-ból kell négy elemű részhalmazt választani. (1 pont)
Továbbá G-nek $4 \cdot \binom{6}{3}$ olyan csúcsa van, amelynek U-val pontosan egy közös eleme van. Valóban, ez az egyetlen közös elem négyféleképpen válaszható ki U-ból, de bármelyiket is választottuk, a $H \setminus U$ hat eleme közül $\binom{6}{3}$-féleképpen válaszható mellé további három. (1 pont)
Mivel $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ és $4 \cdot \binom{6}{3} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 80,$ (1 pont)
ezért G-nek $209 - 80 - 15 = 114$ olyan (U-tól különböző) csúcsa van, amelynek U-val legalább két közös eleme van. (1 pont)
Mindebből tehát az következik, hogy G-ben minden csúcs foka 114. (1 pont)
Mivel $114 \geq \frac{210}{2} = 105$ (és G egyszerű gráf), ezért Dirac tétele szerint G-ben van Hamilton-kör, így Hamilton-út is. A feladat szövegének megfelelő sorozat tehát létezik. (2 pont)
A feladat megoldható közvetlenül, bármilyen előismeret nélkül is egy, a feladat feltételeinek megfelelő konkrét sorozat megkonstruálásával. Ha tehát egy megoldó világosan leír egy ilyen sorozatot és meggyőzően érvel amellett, hogy az helyes, az nyilván maximális pontot ér. Lehet részpontszámot adni nem teljesen tökéletes konstrukcióért is, de csak akkor, ha az teljesen világosan le van írva és némi (nem túl sok) további munkával hibátlanná tehető lett volna. Azonban nem adható pontszám olyan vázlatos, nem végigvitt konstrukcióért, amelynek a leírásából nem derül ki egyértelműen, hogy hogyan sorolta volna fel az összes négy elemű részhalmazt; vagy ha egyáltalán nem világos, hogy az a felsorolás miért lett volna jó vagy azzá tehető.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2018. május 14.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot éro megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Legyen G egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható gráf. Mutassuk meg, hogy ha G-ből töröljük két éldiszjunkt (vagyis közös élet nem tartalmazó) feszítőfájának éleit, akkor a kapott gráf biztosan nem lesz összefüggő.

* * * * *

Ha G n csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor az előadáson látottak szerint legfeljebb $3n-6$ éle lehet. (2 pont)
G bármely feszítőfájának $n-1$ éle van, (2 pont)
így ha két éldiszjunkt feszítőfa éleit töröljük G-ből, akkor annak élszáma $(2n-2)$-vel csökken, (2 pont)
vagyis legfeljebb $n-4$ lesz. (1 pont)
Tudjuk, hogy egy összefüggő, n csúcsú gráfnak legalább $n-1$ éle van (pl. mert van feszítőfája – e megjegyzés hiányáért ne vonjunk le pontot), (2 pont)
így a maradék gráf biztosan nem összefüggő. (1 pont)

2. A $K_{3,3}$ teljes páros gráfba behúzunk két nem csatlakozó élet úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Határozzuk meg G kromatikus számát.

* * * * *

Legyen a páros gráf két osztálya $A = \{a, b, c\}$ és $B = \{x, y, z\}$. Az új éleket vagy A-n, vagy B-n belül kell behúzni, különben a gráf nem maradna egyszerű (hiszen az A és B közti élek mind szerepelnek G-ben). (1 pont)
Mivel az új élek nem csatlakozók, egyik osztályba sem húzhatunk be kettőt (mivel 3 csúcson nem lehet két független élet behúzni). (1 pont)
Tegyük fel (anélkül, hogy az az általánosság rovására menne), hogy az ab és xy éleket húztuk be. A kapott gráfban van egy 4 csúcsú klikk, melyet az a, b, x, y pontok alkotnak, (2 pont)
így a keresett kromatikus szám legalább 4. (2 pont)
4 színnel való jó színezést nem nehéz megadni: az a, c csúcsokat színezzük 1-esre, az x, z pontokat

2-esre, b-t 3-asra, y-t pedig 4-esre. (2 pont)
A gráf kromatikus száma így legfeljebb 4, (1 pont)
a fentiek figyelembevételével tehát pontosan 4. (1 pont)

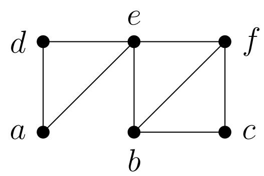
Ha valaki magyarázat nélkül lerajzolja a kapott gráfot és (helyesen) meghatározza a kromatikus számát, az az utolsó 8 pontot kapja meg.

3. Egy 20 csúcsú fában 11 csúcs foka 1 és a maradék 9 csúcs foka is azonos. Határozzuk meg a fa élkromatikus számát.

* * * * *

Legyen a maradék csúcsok foka x, a fa csúcsainak fokszámösszege ekkor $9x + 11$. (2 pont)
Ez a szám azonos az élek számának kétszeresével, (1 pont)
vagyis 38-cal, hiszen minden 20 csúcsú fának 19 éle van. (2 pont)
Innen $x = 3$ adódik. (1 pont)
A fák páros gráfok, (1 pont)
hiszen nincs bennük páratlan kör. (1 pont)
Kőnig tétele szerint minden páros gráf élkromatikus száma azonos a maximális fokszámmal, a keresett élkromatikus szám tehát 3. (2 pont)

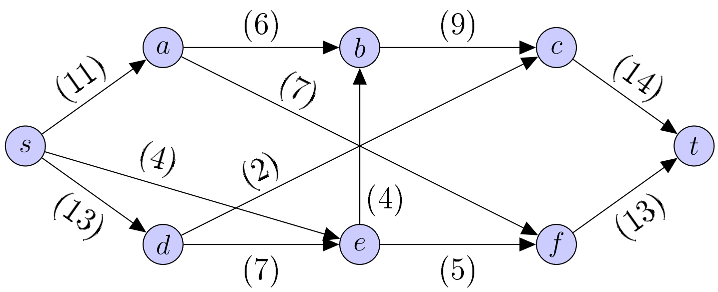
4. Döntsük el, hogy az alábbi gráf intervallumgráf-e.



* * * * *

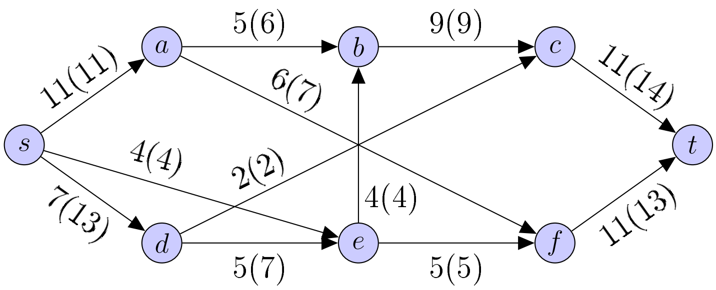
A gráf intervallumgráf lesz, ennek belátásához meg kell adni egy alkalmas intervallumrendszert. Ha ez szerepel, akkor adjunk 10 pontot.

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális s-t vágást.



* * * * *

Az alábbi ábrán látható folyam értéke 22.



(3 pont)

Az $\{s, d, e\}$ csúcsok és a többi csúcsok között futó élek alkotta vágás kapacitása szintén 22. (3 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás kapacitása, ezért a 22 kapacitású vágás bizonyítja, hogy a 22 értékű folyam maximális és a 22 értékű folyam bizonyítja, hogy a 22 kapacitású vágás minimális. (2+2 pont)

A folyam maximalitása mellett lehet annak megmutatásával is érvelni, hogy a 22 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út. Az utolsó 2+2 pont annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. (De sem „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális" mondat – további kiegészítés híján – nem tekintendő (érdemi) indoklásnak, sem az algoritmus puszta futtatása.)

6*. Adjunk meg olyan gráfot, melyből tíz alkalmas élet törölve a kromatikus szám tízzel csökken és határozzuk meg az ilyen gráfok csúcsszámának minimumát.

* * * * *

Ilyen gráf lesz például a 20 csúcsú teljes gráf. (1 pont)
Ebből tíz független élet törölve ugyanis a kromatikus szám 20-ról 10-re csökken. (1 pont)
A tíz él törlése után kapott gráfban a törölt élek végpontjai kaphatják ugyanazt a színt, így a kromatikus szám legfeljebb 10, (1 pont)
másrészt még mindig van a gráfban 10 méretű klikk, így 10 színre szükség is van a színezéshez. (1 pont)
A keresett minimális csúcsszám a 20 lesz. Láttuk, hogy 20 csúcs már elég, (1 pont)
most belátjuk, hogy ennél kevesebb viszont nem. Legyen a törlések utáni gráf G, ehhez tíz alkalmas élet adva az eredeti gráfot kapjuk vissza, melynek a kromatikus száma $\chi(G) + 10$ kell legyen. (1 pont)
Ha az eredeti gráfnak (és így G-nek is) legfeljebb 19 csúcsa volna, akkor a törölt élek között lesz két olyan, melyeknek van közös csúcsa. (2 pont)
Ha G egy jó színezésében ezt a csúcsot egy új, addig nem használt színnel színezzük, és ugyanezt tesszük a bevett további 8 él valamelyik végpontjával is, akkor az eredeti gráf egy jó színezését kapjuk $\chi(G) + 9$ színnel, ami lehetetlen. (2 pont)