

1. feladat (18 pont)

Írja fel algebrai alakban az $iz^5 - 8z^2 = 0$ egyenlet megoldásait.

Mo. $iz^5 - 8z^2 = z^2(iz^3 - 8)$, így $z_1 = 0$ megoldás **(3p)**. $iz^3 = 8$, ha $z^3 = -8i = 8\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$ **(6p)**, tehát a megoldások $z_2 = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2i$ **(3p)**, $z_3 = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$ **(3p)**, $z_4 = 2\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$ **(3p)**

2. feladat (5+12=17 pont)

a) Adja meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ definícióját!

b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^2 - n - 1} = \infty$!

Mo. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ha minden $P > 0$ számhoz létezik $N(P) \in \mathbb{N}$, melyre $n \geq N(P)$ esetén $a_n > P$. **(5p)**

b) Legyen $P > 0$. Ekkor $n \geq 2$ esetén

$$\sqrt[3]{n^2 - n - 1} > \sqrt[3]{\frac{n^2}{2}} > P, \quad \text{(7p)}$$

$$\text{ha } n^2 > 2P^3 \text{ (3p)}, \text{ így } N(P) = \max\left(2, \left[\sqrt{2P^3}\right] + 1\right). \quad \text{(2p)}$$

3. feladat (17 pont)

Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét:

$$a_n = \left(\frac{n-9}{4+n}\right)^{3n}, \quad b_n = \left(\frac{n-9}{4+n}\right)^{n^3}.$$

Mo.

$$a_n = \left(\frac{\left(1 - \frac{9}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n}\right)^3 \rightarrow e^{-39} \quad \text{(7p)}$$

$b_n = a_n^{\frac{n^2}{3}}$ **(4p)**, így elég nagy n esetén $|b_n| < (e^{-13} + \varepsilon)^{n^2} \rightarrow 0$, ha $\varepsilon < 1 - e^{-13}$ **(4p)**. Így $\lim b_n = 0$ **(2p)**.

4. feladat (23 pont)

Konvergens-e az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$ rekurzióval megadott sorozat? Állítását igazolja, és konvergencia esetén adja meg a határértéket!

Mo. Ha a sorozat korlátos, és monoton, akkor konvergens, és határértéke a sorozat legkisebb felső, vagy legnagyobb alsó korlátja **(3p)**. A lehetséges A határérték kielégíti az $A = 4 - \frac{3}{A}$ egyenletet **(2p)**, vagyis $A = 1$ vagy $A = 3$ **(2p)**. Belátjuk, hogy $1 < a_n < 3$ **(2p)**. $1 < a_1 < 3$, és ha $1 < a_n < 3$, akkor $1 > \frac{1}{a_n} > \frac{1}{3}$, tehát $-3 < -\frac{3}{a_n} < -1$ így $1 = 4 - 3 < a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n} < 3 = 4 - 1$ **(5p)** $a_2 = \frac{5}{2} > a_1$, és ha $a_n < a_{n+1}$, akkor $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_{n+1}}$, és $-\frac{3}{a_n} < -\frac{3}{a_{n+1}}$ tehát $a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n} < 4 - \frac{3}{a_{n+1}} = a_{n+2}$, vagyis a sorozat monoton nő **(5p)**. Mivel $a_n \geq 2$, így a határérték csak 3 lehet **(2p)**. A sorozat tehát monoton és korlátos, így konvergens, tehát határértéke 3. **(2p)**

5. feladat (25 pont)

Adja meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz superiorját, illetve limesz inferiorját. Létezik-e határérték?

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^2 - (-1)^n n^2 + 8}{n^4 + (-1)^n n^4 + 7}}, \quad b_n = \sqrt[n]{\frac{n^2 - (-1)^n n^2 + 8}{n^4 + (-1)^n n^4 + 7}}$$

Mo. Ha n páros:

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{8}{11}} \cdot \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^4} = \sqrt[n]{\frac{8}{11n^4}} \leq a_n = \sqrt[n]{\frac{8}{2n^4 + 7}} \leq \sqrt[n]{\frac{4}{n^4}} = \frac{\sqrt[n]{8}}{(\sqrt[n]{n})^4} \rightarrow 1 \quad (7p),$$

ha pedig n páratlan, akkor

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{2}{7}} (\sqrt[n]{n})^4 = \sqrt[n]{\frac{2n^4}{7}} \leq a_n = \sqrt[n]{\frac{2n^4 + 8}{7}} \leq \sqrt[n]{\frac{10n^3}{7}} = \sqrt[n]{\frac{10}{7}} (\sqrt[n]{n})^4 \rightarrow 1, \quad (5p)$$

így a sorozat egyetlen torlódási pontja 1 **(1p)**, tehát $\limsup a_n = 1 = \liminf a_n = 1 = \lim a_n$ **(2p)**.

Páros n esetén

$$0 \leq b_n = \sqrt[n]{\frac{8}{2n^4 + 7}} \leq \frac{4}{n^2} \rightarrow 0, \quad (3p)$$

páratlan n esetén

$$b_n = \sqrt{\frac{2n^4 + 8}{7}} \geq n^2 \rightarrow \infty, \quad (3p)$$

tehát a két torlódási pont 0 és ∞ (1p), így $\limsup b_n = \infty$ (1p), $\liminf b_n = 0$ (1p), és a sorozat divergens. (1p)

IMSC feladat (4+4= 8 IMSC pont)

a) Igazolja, hogy ha az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat határértéke $A \in \mathbb{R}$, akkor

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^A.$$

b) Igazolja, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = e^{i\alpha}.$$

A bizonyításhoz felhasználhatja, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \alpha$.

Mo. a) Rendőr elvvel dolgozunk. (1p) Minden pozitív ε esetén elegendően nagy n -ekre teljesül, hogy $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, így $\left(1 + \frac{A - \varepsilon}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{A + \varepsilon}{n}\right)^n$, és limeszt véve $e^{A - \varepsilon} \leq \liminf \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \leq \limsup \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \leq e^{A + \varepsilon}$. (2p) Az $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenetet véve megkapjuk a bizonyítandó állítást. (1p)

b) Írjuk fel az alapot exponenciális alakban:

$$1 + \frac{i\alpha}{n} = \rho e^{i\phi}, \quad \text{ahol} \quad \rho = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}, \quad \phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{n}\right). \quad (2p)$$

Ezen az alakon elvégezzük a hatványozást:

$$\left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = \rho^n e^{in\phi} = \left(1 + \frac{\alpha^2/n}{n}\right)^{\frac{n}{2}} e^{in \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{i\alpha},$$

hiszen $\left(1 + \frac{\alpha^2/n}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ az a) állítás miatt, és $e^{in \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{i\alpha}$ az exponenciális függvény folytonossága és a megadott összefüggés miatt. (2p)