

1. (15 p) Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^2 - (3 + 2i)z + 1 + 3i = 0$$

Megoldás:

Ez egy másodfokú egyenlet, így alkalmazhatjuk a megoldóképletet:

$$z_{1,2} = \frac{3 + 2i \pm \sqrt{(3 + 2i)^2 - 4(1 + 3i)}}{2} =$$

$$\frac{3 + 2i \pm \sqrt{(9 + 12i - 4) - 4 - 12i}}{2} = \frac{3 + 2i \pm \sqrt{1}}{2},$$

azaz a két gyök a $z_1 = 2 + i$ és a $z_2 = 1 + i$.

2. (15 p) Hol van inflexiós pontja az $f(x) = e^{-2x}(x^2 - 3x + 4)$ függvénynek?

Megoldás:

A konvexitás vizsgálatához a második deriváltat kell kiszámítanunk, így

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-2x}(x^2 - 3x + 4) + e^{-2x}(2x - 3) = e^{-2x}(-2x^2 + 6x - 8 + 2x - 3) = \\ &= e^{-2x}(-2x^2 + 8x - 11), \end{aligned}$$

innen inflexiós pont ott lehet, ahol

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2e^{-2x}(-2x^2 + 8x - 11) + e^{-2x}(-4x + 8) = e^{-2x}(4x^2 - 16x + 22 - 4x + 8) = \\ &= e^{-2x}(4x^2 - 20x + 30) = 0 \end{aligned}$$

Mivel e^x pozitív minden valós x -re, az $4x^2 - 20x + 30 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, azaz $2x^2 - 10x + 15 = 0$ -t. Innen

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 120}}{4} = \frac{10 \pm \sqrt{-20}}{4} =$$

mivel ennek az egyenletnek nincsen valós gyöke, így a függvénynek nincs inflexiós pontja.

3. (20 p) Legyen $f(x) = 3 \arcsin(3 - 2x) + \pi$. $D_f = ?$ $R_f = ?$ Indokolja meg, hogy miért invertálható $f(x)$! $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$

Megoldás:

$\arcsin(x)$ értelmezési tartománya a $[-1, 1]$ intervallum, innen

$$-1 \leq 3 - 2x \leq 1$$

$$-4 \leq -2x \leq -2$$

$$2 \geq x \geq 1,$$

azaz $D_f = [1, 2]$. Másrészt $\arcsin(x)$ felvesz minden $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ közötti számot amint x végigfut a teljes értelmezési tartományon. Így $\arcsin(3-2x)$ is, innen $f(x)$ értékkészlete $\left[-3\frac{\pi}{2} + \pi, 3\frac{\pi}{2} + \pi\right] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Egy folytonos függvény pontosan akkor invertálható, ha szigorúan monoton. Mivel

$$f'(x) = 3 \frac{-2}{\sqrt{1 - (3-2x)^2}} < 0 \quad x \in (1, 2)$$

így $f(x)$ szigorú monoton csökken, a teljes értelmezési tartományán, tehát invertálható. Továbbá $D_{f^{-1}} = R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ és $R_{f^{-1}} = D_f = [1, 2]$.

4. (15 p) Számítsa ki az alábbi függvények deriváltját!

$$f(x) = (x + \cosh(7x^3) + 4)^5 \quad g(x) = \frac{x^2 - 2}{\sinh(x) + 3}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(x + \cosh(7x^3) + 4)^4 (1 + \sinh(7x^3) \cdot 7 \cdot 3 \cdot x^2 + 0) \\ g'(x) &= \frac{2x(\sinh(x) + 3) - (x^2 - 2) \cosh(x)}{(\sinh(x) + 3)^2} \end{aligned}$$

5. (15 p) Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int \frac{3x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \\ \frac{3}{2} \int (2x + 2)(x^2 + 2x + 2)^{-\frac{1}{2}} dx &= 3\sqrt{x^2 + 2x + 2} + C, \end{aligned}$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós konstans.

6. (20 p) Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$$\int_0^1 (3x - 2) e^{5x-1} dx \quad \int_0^1 e^{|5x-1|} dx$$

Megoldás:

$\int_0^1 (3x - 2) e^{5x-1} dx$ kiszámításához parciális integrálást kell alkalmaznunk. Legyen $f = 3x - 2$ és $g' = e^{5x-1}$ ekkor $f' = 3$ és $g = \frac{e^{5x-1}}{5}$. Innen:

$$\int_0^1 \underbrace{(3x - 2)}_g \underbrace{e^{5x-1}}_{f'} dx = \left[\underbrace{(3x - 2)}_g \underbrace{\frac{e^{5x-1}}{5}}_f \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{3}_{g'} \underbrace{\frac{e^{5x-1}}{5}}_f dx =$$

$$\frac{e^4}{5} + 2\frac{e^{-1}}{5} - \frac{3}{5} \left[\frac{e^{5x-1}}{5} \right]_0^1 = \frac{e^4}{5} + 2\frac{e^{-1}}{5} - \frac{3e^4}{25} + \frac{3e^{-1}}{25}$$

A második integrál kiszámításához fel kell bontanunk az abszolút értéket. Ehhez: $5x - 1 > 0$ ha $x > \frac{1}{5}$, innen

$$\int_0^1 e^{|5x-1|} dx = \int_0^{\frac{1}{5}} e^{-5x+1} dx + \int_{\frac{1}{5}}^1 e^{5x-1} dx = \left[\frac{e^{-5x+1}}{-5} \right]_0^{\frac{1}{5}} + \left[\frac{e^{5x-1}}{5} \right]_{\frac{1}{5}}^1 =$$

$$\frac{1}{-5} - \frac{e^{-1}}{-5} + \frac{e^4}{5} - \frac{1}{5}.$$

7. (+15 p) (Ezen feladat megoldása nem szükséges a maximum pontszám eléréséhez.)
Konvergens-e az alábbi improprius integrál? Ha igen, mennyi az értéke?

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx$$

Megoldás:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx = \int_1^{\infty} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} dx =$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x+3} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x+3} dx =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [\ln|x+2| - \ln|x+3|]_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{|x+2|}{|x+3|} \right]_1^N =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{N+2}{N+3} \right| - \ln \frac{3}{4} = \ln 1 - \ln \frac{3}{4} = -\ln \frac{3}{4},$$

azaz az integrál konvergens, és az értéke $-\ln \frac{3}{4}$.

8. (15 p) **Az alábbi feladatot csak a 40% eléréséhez javítjuk ki.** Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

$$a_n = \frac{2^{2n+3} + 8 \cdot 4^n}{n^2 + 3n + 2^{4n-1}}$$

Megoldás:

$$a_n = \frac{2^{2n+3} + 8 \cdot 4^n}{n^2 + 3n + 2^{4n-1}} = \frac{8 \cdot 4^n + 8 \cdot 4^n}{n^2 + 3n + \frac{1}{2} 16^n} = \frac{4^n}{16^n} \frac{8+8}{n^2 \left(\frac{1}{16}\right)^n + 3n \left(\frac{1}{16}\right)^n + \frac{1}{2}} =$$

$$\overbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}^{\rightarrow 0} \frac{16}{\underbrace{n^2 \left(\frac{1}{16}\right)^n}_{\rightarrow 0} + \underbrace{3n \left(\frac{1}{16}\right)^n}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{2}} \rightarrow 0 \cdot \frac{16}{0+0+\frac{1}{2}} = 0.$$