Jelek és rendszerek

1. házi feladat

Érvényes: 2012/2013. tavaszi félév

Név	
Neptun kód	
Házi feladat kódja	
Beadási határidő	Lásd a "Számonkérés rendje" c. táblázatban
Gyakorlatvezető neve:	. . . . (**kitöltendő!**)

Megjegyzések: *A házi feladat megoldását a* ***feladatlappal együtt*** *kell beadni. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni,* ***nem elegendő a végeredményeket közölni!*** *A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE, stb.), de* ***a megoldás elvi lépéseit*** *ekkor is* ***részletesen*** *ismertetni kell.*

	a	b	c	d	$\sum$	Javító
1.1	/ 0,4	/ 0,4	/ 0,6	/ 1,6	/ 3	
1.2	/ 2,4	/ 0,6	/ 1,6	–	/ 4,6	
1.3	/ 1,6	/ 0,8	–	–	/ 2,4	
					/ 10*	

* a házi feladat végső pontszáma a részpontok összegéből kerekített egész szám.

1.1 Tekintse az alábbi impulzusválasszal adott *FI* illetve *DI* rendszert!

$$\begin{aligned} h(t) &= 4\delta(t) + \varepsilon(t)\left\{6e^{-0{,}2t} + (-4)\cdot e^{-0{,}3t}\right\} \\ h[k] &= 4\varepsilon[k](0{,}5)^k\cos(0{,}3k + (-0{,}5)) \end{aligned}$$

(a) Gerjesztés-válasz stabilis-e a *FI* illetve az *DI* rendszer? Indokolja válaszát! (0,2+0,2 pont)

(b) Változtasson meg egyetlen paramétert úgy, hogy a rendszer stabilitása ellenkezőjére változzon! (0,2+0,2 pont)

(c) A *DI* rendszer gerjesztése az alábbi bemeneti jel. Számítsa ki a válaszjelet $k = 0$-ra, $k = 1$-re és $k = 2$-re! (0,6 pont)

$$u[k] = 6\left\{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6]\right\}$$

(d) Számítsa ki a *FI* illetve a *DI* rendszer válaszjelének formuláját, ha a gerjesztés az alábbi bemeneti jel! (0,8+0,8 pont)

$$\begin{aligned} u(t) &= 3 \\ u[k] &= 3(-4)^k \end{aligned}$$

1.2 Tekintse az alábbi állapotváltozós leírással adott *FI* illetve *DI* rendszert!
A *FI* rendszer állapotváltozós leírása:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}1 \\ -0{,}3 & -0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + (0{,}4)u(t) \end{aligned}$$

A *DI* rendszer állapotváltozós leírása:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -0{,}73 \\ 4 & -1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} u[k] \\ y[k] &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + (1{,}5)u[k] \end{aligned}$$

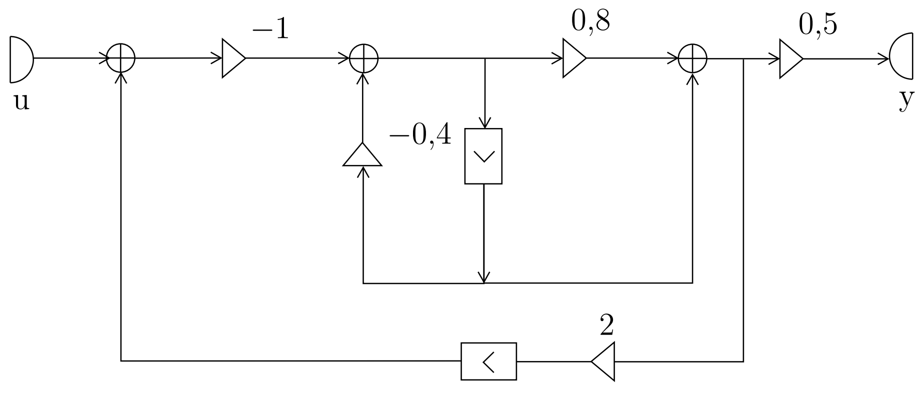
(a) Számítsa ki és ábrázolja mindkét rendszer impulzusválaszát! (1,2+1,2 pont)

(b) Az állapotegyenlet lépésről lépésre történő megoldásával számítsa ki a *DI* rendszer impulzusválaszának numerikus értékét $k = 0, 1$ és 2-ra, és vesse össze a formulából behelyettesítéssel kapott értékekkel! (0,6 pont)

(c) Számítsa ki és ábrázolja a válaszjelet, ha a rendszerek gerjesztése az alábbi bemeneti jel! (0,8+0,8 pont)

$$\begin{aligned} u(t) &= \varepsilon(t)\left\{4 + (-2) \cdot e^{-1{,}4t}\right\} \\ u[k] &= 6\left\{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6]\right\} \end{aligned}$$

1.3 Tekintse az alábbi közös jelfolyam hálózattal adott *DI* illetve *FI* rendszert!



(a) Adja meg mindkét rendszer állapotváltozós leírását normál alakban! (0,8+0,8 pont)

(b) Vizsgálja meg a *DI* illetve az *FI* hálózat stabilitását! (0,4+0,4 pont)

Jelek és rendszerek első házi feladat

1. feladat

1.1. Gerjesztés-válasz stabilitás

Folyamatos idejű rendszer

Egy kauzális, lineáris, folytonos idejű rendszer gerjesztés válasz stabil akkor és csak akkor, ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

A vizsgálandó rendszer impulzusválasza:

$$h(t) = 4\delta(t) + \varepsilon(t)(6e^{-0,2t} + (-4)e^{-0,3t})$$

Így, ha az alábbi egyenlőtlenség teljesül, a rendszer GV-stabil:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|4\delta(t) + \varepsilon(t)(6e^{-0,2t} + (-4)e^{-0,3t})\right|\, dt < \infty$$

Ennek az integrálnak a megoldása:

$$4 + \int_{0}^{\infty} \left|6e^{-0,2t} + (-4)e^{-0,3t}\right|\, dt$$

$$4 + \left[\frac{6}{-0,2}e^{-0,2t} + \frac{-4}{-0,3}e^{-0,3t}\right]_0^{\infty}$$

$$4 + 30 - 13,\dot{3} = 20,\dot{6}$$

Mivel a $20,\dot{6} < \infty$ így a rendszer GV-stabil.

Diszkrét idejű rendszer

Egy kauzális, lineáris, folytonos idejű rendszer gerjesztés válasz stabil akkor és csak akkor, ha:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Így, ha az alábbi egyenlőtlenség teljesül, a rendszer GV-stabil:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|4\varepsilon[k] \cdot (0,5)^k \cdot \cos(0,3k - 0,5)\right| < \infty$$

$$4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (0,5)^k \cdot |\cos(0,3k - 0,5)| < \infty$$

Tudjuk, hogy a koszinuszos tag nem rontja el a stabilitást, mivel:

$$0 < |\cos(0,3k - 0,5)| < 1$$

Így gerjesztés-válasz stabil a rendszer, ha a majoráns rendszer stabil:

$$4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (0,5)^k < \infty$$

$$4 \cdot \frac{1}{1 - 0,5} = 4 \cdot \frac{1}{0,5} = 8 < \infty$$

Tehát a rendszer GV-stabil.

1.2. A stabilitás ellenkezőjére váltása

Folyamatos idejű rendszer

A $h(t) = 4\delta(t) + \varepsilon(t)(6e^{10t} + (-4)e^{-0,3t})$ impulzusválaszra a rendszer nem lesz stabil, mivel $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\ dt = \infty$.

Diszkrét idejű rendszer

A $h[k] = 4\varepsilon[k] \cdot (10)^k \cdot \cos(0,3k - 0,5)$ impulzusválaszra a rendszer nem lesz stabil, mivel $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$.

1.3. Diszkrét idejű rendszer válaszjele

A válaszjel:

$$y[k] = h[k] * u[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[k-i] \cdot h[k]$$

k=0:

$$\begin{aligned}
&y[0] = u[0] \cdot h[0] \\
&y[0] = 6\left(\varepsilon[0] - \varepsilon[0-6]\right)\big(4\varepsilon[0] \cdot 0,5^0 \cdot \cos(0,3 \cdot 0 - 0,5)\big) \\
&y[0] = 6(1-0)(4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,8766) \\
&y[0] = 21,062
\end{aligned}$$

k=1:

$$\begin{aligned}
y[1] &= u[0] \cdot h[1] + u[1] \cdot h[0] \\
y[1] &= 6\left(\varepsilon[0] - \varepsilon[0-6]\right)\big(4\varepsilon[1] \cdot 0,5^1 \cdot \cos(0,3 \cdot 1 - 0,5)\big) \\
&\quad + 6\left(\varepsilon[1] - \varepsilon[1-6]\right)\big(4\varepsilon[0] \cdot 0,5^0 \cdot \cos(0,3 \cdot 0 - 0,5)\big) \\
y[1] &= 6(1-0)(4 \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot 0,9801) + 6(1-0)(4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,8776) \\
y[1] &= 32,8236
\end{aligned}$$

k=2:

$$\begin{aligned}
y[2] &= u[0] \cdot h[2] + u[1] \cdot h[1] + u[2] \cdot h[0] \\
y[2] &= 6\left(\varepsilon[0] - \varepsilon[-6]\right)\big(4\varepsilon[2] \cdot 0,5^2 \cdot \cos(0,3 \cdot 2 - 0,5)\big) \\
&\quad + 6\left(\varepsilon[1] - \varepsilon[1-6]\right)\big(4\varepsilon[1] \cdot 0,5^1 \cdot \cos(0,3 \cdot 1 - 0,5)\big) \\
&\quad + 6\left(\varepsilon[2] - \varepsilon[2-6]\right)\big(4\varepsilon[0] \cdot 0,5^0 \cdot \cos(0,3 \cdot 0 - 0,5)\big) \\
y[2] &= 6(1-0)(4 \cdot 1 \cdot 0,5^2 \cdot 0,995) + 6(1-0)(4 \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot 0,9801) + 6(1-0)(4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,8776) \\
y[2] &= 38,7936
\end{aligned}$$

1.4. Válaszjel formulája

A válaszjel kiszámítható az impulzusválasz és a gerjesztés konvolúciójából.

$$y(t) = h(t) * u(t)$$

Folyamatos idejű rendszer

Folyamatos idejű rendszerben a konvolúció így végezhető el:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot u(t-\tau)\ d\tau$$

A vizsgálandó rendszer válaszjele:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 3 \cdot (4\delta(t) + 3\varepsilon(t)(6e^{-0,2\tau} + (-4)e^{-0,3\tau}))\ d\tau$$

$$y(t) = 3 \cdot 4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ d\tau + 3 \cdot 6 \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-0,2\tau}\ d\tau + 3 \cdot (-4) \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-0,3\tau}\ d\tau$$

$$y(t) = 12 + 18 \cdot \left[\frac{e^{-0,2\tau}}{-0,2}\right]_0^{\infty} - 12 \cdot \left[\frac{e^{-0,3\tau}}{-0,3}\right]_0^{\infty}$$

$$y(t) = 12 + 18 \cdot \left(0 - \frac{1}{-0,2}\right) - 12 \cdot \left(0 - \frac{1}{-0,3}\right)$$

$$y(t) = 12 + \frac{18}{-0,2} - \frac{12}{-0,3} = 12 + 90 + 40 = 62$$

Diszkrét idejű rendszer

Diszkrét rendszerben a konvolúció így végezhető el:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[k-i] \cdot h[i]$$

A vizsgálandó rendszer válaszjele:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 3 \cdot (-4)^{k-i} \cdot 4 \cdot \varepsilon[i] \cdot 0,5^i \cdot \cos(0,3i - 0,5)$$

$$y[k] = 12 \cdot (-4)^k \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-4)^{-i} \cdot 0,5^i \cdot \cos(0,3i - 0,5)$$

$$y[k] = 12 \cdot (-4)^k \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{0,5}{-4}\right)^i \cdot \cos(0,3i - 0,5)$$

Mivel $\cos(x) = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$, ezt behelyettesítve:

$$y[k] = 12 \cdot (-4)^k \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-0,125)^i \cdot \frac{e^{j(0,3i-0,5)} + e^{-j(0,3i-0,5)}}{2}$$

$$y[k] = 12 \cdot (-4)^k \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{0,5j}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-0.125)^i \cdot e^{0,3ji} + e^{0,5j} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-0,125)^i \cdot e^{-0,3ji} \right)$$

$$y[k] = 6 \cdot (-4)^k \left(\frac{1}{e^{0,5j}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(-0.125 \cdot e^{0,3j}\right)^i + e^{0,5j} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(-0,125 \cdot e^{-0,3j}\right)^i \right)$$

$$y[k] = 6 \cdot (-4)^k \left(\frac{1}{e^{0,5j}} \cdot \frac{1}{1 - (-0.125 \cdot e^{0,3j})} + e^{0,5j} \cdot \frac{1}{1 - (-0,125 \cdot e^{-0,3j})} \right)$$

$$y[k] = 6 \cdot (-4)^k \cdot 1,5380 = 9,228 \cdot (-4)^k$$

2. feladat

2.1. Impulzusválasz

Folytonos idejű rendszer

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -0,6 & 0,1 \\ -0,3 & -0,2 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,6 \end{bmatrix} \quad \underline{C^T} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0,9 \end{bmatrix} \quad D = 0,4$$

A rendszer sajátértékeinek kiszámítása:

$$\left|\lambda\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}\right|=0$$

$$\left|\lambda\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}\right|=\begin{vmatrix}\lambda+0,6 & -0,1\\ 0,3 & \lambda+0,2\end{vmatrix}=(\lambda+0,6)(\lambda+0,2)-(-0,1)(0,3)$$

$$\lambda^2+0,8\lambda+0,15=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-0,8\pm\sqrt{0,8^2-4\cdot1\cdot0,15}}{2}=\frac{-0,8\pm0,2}{2}$$

$$\lambda_1=-0,3\quad\lambda_2=-0,5$$

A rendszer Lagrange-mátrixai:

$$\underline{\underline{L_1}}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot(\underline{\underline{A}}-\lambda_2\underline{\underline{E}})\qquad\underline{\underline{L_2}}=\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{L_1}}$$

$$\underline{\underline{L_1}}=\frac{1}{-0,3-(-0,5)}\cdot\begin{bmatrix}-0,6+0,5 & 0,1\\ -0,3 & -0,2+0,5\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L_1}}=\begin{bmatrix}-0,5 & 0,5\\ -1,5 & 1,5\end{bmatrix}\qquad\underline{\underline{L_2}}=\begin{bmatrix}1,5 & -0,5\\ 1,5 & -0,5\end{bmatrix}$$

Az impulzusválasz:

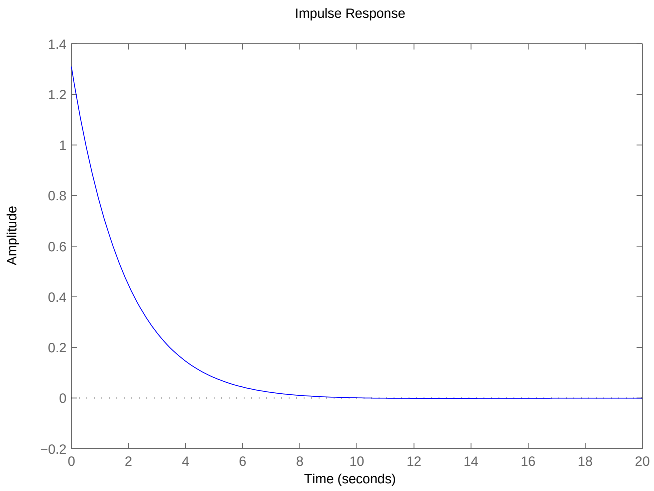
$$h(t)=D\cdot\delta(t)+\varepsilon(t)\cdot\underline{C^T}\cdot e^{\underline{\underline{A}}t}\cdot\underline{B}\qquad e^{\underline{\underline{A}}t}=e^{\lambda_1 t}\cdot\underline{\underline{L_1}}+e^{\lambda_2 t}\cdot\underline{\underline{L_2}}$$

$$h(t)=D\cdot\delta(t)+\varepsilon(t)\cdot\left(\underline{C^T}\cdot e^{\lambda_1 t}\cdot\underline{\underline{L_1}}\cdot\underline{B}+\underline{C^T}\cdot e^{\lambda_2 t}\cdot\underline{\underline{L_2}}\cdot\underline{B}\right)$$

$$h(t)=0,4\cdot\delta(t)+\varepsilon(t)\cdot\left(e^{-0,3t}\cdot\begin{bmatrix}1,1 & 0,9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-0,5 & 0,5\\ -1,5 & 1,5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0,7\\ 0,6\end{bmatrix}+e^{-0,5t}\cdot\begin{bmatrix}1,1 & 0,9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1,5 & -0,5\\ 1,5 & -0,5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0,7\\ 0,6\end{bmatrix}\right)$$

$$h(t)=0,4\cdot\delta(t)+\varepsilon(t)\cdot\left(e^{-0,3t}\cdot\begin{bmatrix}1,1 & 0,9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-0,05\\ -0,15\end{bmatrix}+e^{-0,5t}\cdot\begin{bmatrix}1,1 & 0,9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0,75\\ 0,75\end{bmatrix}\right)$$

$$h(t)=0,4\cdot\delta(t)+\varepsilon(t)\cdot\left(-0,19e^{-0,3t}+1,5e^{-0,5t}\right)$$



A folyamatos idejű rendszer impulzusválasza

Diszkrét idejű rendszer

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}2 & -0.73\\ 4 & -1,2\end{bmatrix}\quad\underline{B}=\begin{bmatrix}0,8\\ -0,5\end{bmatrix}\quad\underline{C^T}=\begin{bmatrix}2 & -2\end{bmatrix}\quad D=1,5$$

A rendszer sajátértékeinek kiszámítása:

$$\left|\lambda\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right| = 0$$

$$\left|\lambda\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}\right| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0,73 \\ -4 & \lambda+1,2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1,2) - (0,73)(-4)$$

$$\lambda^2 - 0,8\lambda + 0,52 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{0,8 \pm \sqrt{0,8^2 - 4\cdot 1\cdot 0,52}}{2} = \frac{0,8 \pm \sqrt{-1,44}}{2}$$

$$\lambda_1 = 0,4 + j0,6 \quad \lambda_2 = 0,4 - j0,6$$

A rendszer Lagrange-mátrixai:

$$\underline{\underline{L_1}} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\cdot(\underline{\underline{A}} - \lambda_2\underline{\underline{E}}) \quad \underline{\underline{L_2}} = \underline{\underline{L_1^*}}$$

$$\underline{\underline{L_1}} = \frac{1}{0,4+j0,6-0,4+j0,6}\cdot\begin{bmatrix} 2-(0,4-j0,6) & -0,73 \\ 4 & -1,2-(0,4-j0,6) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L_1}} = \frac{j}{-1,2}\cdot\begin{bmatrix} 1,6+j0,6 & -0,73 \\ 4 & -1,6+j0,6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L_1}} = \begin{bmatrix} \frac{0,6}{1,2} - \frac{1,6}{-1,2}j & \frac{0,73}{1,2}j \\ \frac{4}{-1,2}j & \frac{0,6}{1,2} + \frac{1,6}{1,2}j \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L_1}} = \begin{bmatrix} 0,5-1,\dot{3}j & 0,608\dot{3}j \\ -3,\dot{3}j & 0,5+1,\dot{3}j \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{L_2}} = \begin{bmatrix} 0,5+1,\dot{3}j & -0,608\dot{3}j \\ 3,\dot{3}j & 0,5-1,\dot{3}j \end{bmatrix}$$

Az impulzusválasz:

$$h[k] = D\cdot\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot\underline{C}^T\cdot\underline{\underline{A}}^{k-1}\cdot\underline{B} \qquad \underline{\underline{A}}^{k-1} = \lambda_1^{k-1}\cdot\underline{\underline{L_1}} + \lambda_2^{k-1}\cdot\underline{\underline{L_2}}$$

$$h[k] = D\cdot\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot\left(\underline{C}^T\cdot\lambda_1^{k-1}\cdot\underline{\underline{L_1}}\cdot\underline{B} + \underline{C}^T\cdot\lambda_2^{k-1}\cdot\underline{\underline{L_2}}\cdot\underline{B}\right)$$

$$\underline{C}^T\cdot\underline{\underline{L_1}}\cdot\underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0,5-1,\dot{3}j & 0,608\dot{3}j \\ -3,\dot{3}j & 0,5+1,\dot{3}j \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0,8 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4j & -1-1,45j \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0,8 \\ -0,5 \end{bmatrix} = 1,3+3,925j = \sqrt{1,3^2+3,925^2}\cdot e^{j\left(\arctan\left(\frac{3,925}{1,3}\right)\right)} = 4,1347\cdot e^{j1,251}$$

$$\underline{C}^T\cdot\underline{\underline{L_2}}\cdot\underline{B} = \left(\underline{C}^T\cdot\underline{\underline{L_1}}\cdot\underline{B}\right)^* = 1,3-3,925j = 4,1347\cdot e^{-j1,251}$$

$$\lambda_1 = 0,4+j0,6 = \sqrt{0,4^2+0,6^2}\cdot e^{j\left(\arctan\left(\frac{0,6}{0,4}\right)\right)} = 0.7211 * e^{j0,9828}$$

$$\lambda_2 = 0,4-j0,6 = 0.7211 * e^{-j0,9828}$$

$$h[k] = 1,5\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot\left(\left(0.7211\cdot e^{j0,9828}\right)^{k-1}\cdot 4.1347\cdot e^{j1,251} + \left(0.7211 * e^{-j0,9828}\right)^{k-1}\cdot 4.1347\cdot e^{-j1,251}\right)$$

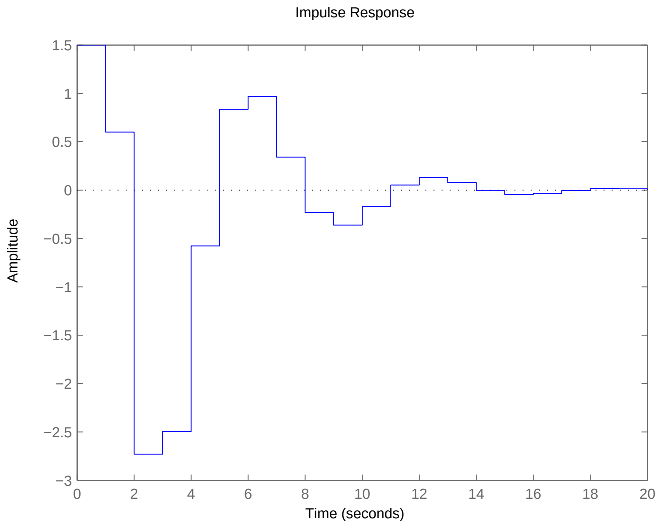
$$h[k] = 1,5\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot 2\cdot Re\{\left(0.7211\cdot e^{j0,9828}\right)^{k-1}\cdot 4.1347\cdot e^{j1,251}\}$$

$$h[k] = 1,5\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot 2\cdot 4.1347\cdot 0.7211^{k-1}\cdot Re\{\left(e^{j(0,9828(k-1)+1,251)}\right)$$

$$h[k] = 1,5\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot 8,2694\cdot 0.7211^{k-1}\cdot\cos(0,9828(k-1)+1,251)$$

$$h[k] = 1,5\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot 11,4677\cdot 0.7211^{k}\cdot\cos(0,9828k+0,2682)$$

$$h[k] = 1,5\delta[k] + \varepsilon[k-1]\cdot 2\cdot\sqrt{1,3^2+3,925^2}\cdot\sqrt{0,4^2+0,6^2}^{k-1}\cdot\cos\left(\arctan\left(\frac{0,6}{0,4}\right)\cdot(k-1) + \arctan\left(\frac{3,925}{1,3}\right)\right)$$



A diszkrét idejű rendszer impulzusválasza

2.2. Diszkrét idejű rendszer válasza adott értékre

k	$u[k]$	$y[k]=h[k]$	$x_1[k]$	$x_2[k]$
-1	0	0	0	0
0	1	1,5	0	0
1	0	2,6	0,8	-0,5
2	0	-3,67	1,965	3,8

A kiszámolás menete:
k=0:

$$\begin{bmatrix} x_1[1] \\ x_2[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

$$y[0] = 1,5 \cdot 1 = 1,5$$

k=1:

$$\begin{bmatrix} x_1[2] \\ x_2[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0,73 \\ 4 & -1,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,8 \\ -0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,965 \\ 3,8 \end{bmatrix}$$

$$y[1] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,8 \\ -0,5 \end{bmatrix} = 2,6$$

k=2:

$$y[2] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,965 \\ 3,8 \end{bmatrix} = -3,67$$

Impulzusválasz formulából

A 2.1 pontban kiszámolt impulzusválasz formulával az eredmény megegyezik:

$$h[0] = 1,5\delta[0] + \varepsilon[-1] \cdot 2 \cdot \sqrt{1,3^2 + 3,925^2} \cdot \sqrt{0,4^2 + 0,6^2}^{-1} \cdot \cos\left(\arctan\left(\frac{0,6}{0,4}\right) \cdot (-1) + \arctan\left(\frac{3,925}{1,3}\right)\right) = 1,5$$

$$h[1] = 1,5\delta[1] + \varepsilon[0] \cdot 2 \cdot \sqrt{1,3^2 + 3,925^2} \cdot \sqrt{0,4^2 + 0,6^2}^{0} \cdot \cos\left(\arctan\left(\frac{0,6}{0,4}\right) \cdot (0) + \arctan\left(\frac{3,925}{1,3}\right)\right) = 2,6$$

$$h[2] = 1,5\delta[2] + \varepsilon[1] \cdot 2 \cdot \sqrt{1,3^2 + 3,925^2} \cdot \sqrt{0,4^2 + 0,6^2}^{1} \cdot \cos\left(\arctan\left(\frac{0,6}{0,4}\right) \cdot (1) + \arctan\left(\frac{3,925}{1,3}\right)\right) = -3,67$$

2.3. Válaszjel gerjesztésre

Folytonos idejű rendszer

$$h(t) = 0,4 \cdot \delta(t) + \varepsilon(t) \cdot \left(-0,19e^{-0,3t} + 1,5e^{-0,5t}\right)$$

$$u(t) = \varepsilon(t) \cdot \left(4 - 2 \cdot e^{-1,4t}\right)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot u(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t-\tau) \cdot \left(4 - 2 \cdot e^{-1,4(t-\tau)}\right) \cdot \left(0,4 \cdot \delta(\tau) + \varepsilon(\tau) \cdot \left(-0,19e^{-0,3\tau} + 1,5e^{-0,5\tau}\right)\right) \quad d\tau$$

A zárójelek kibontása után:

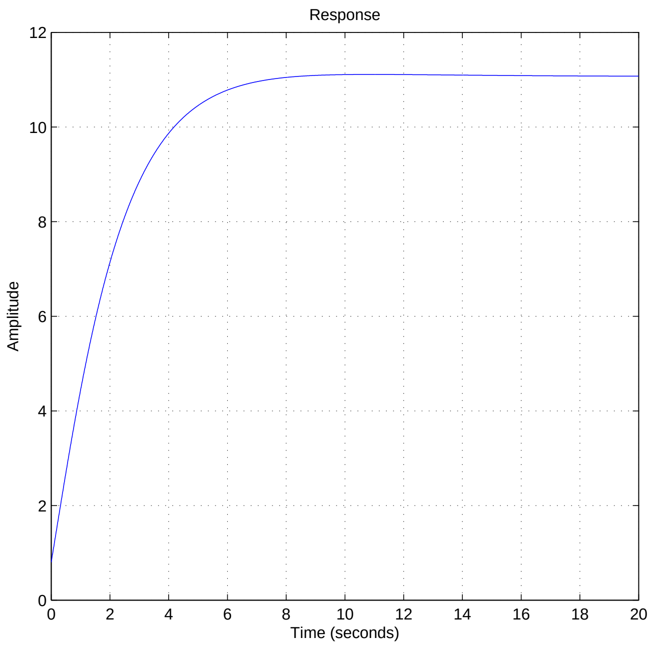
$$\begin{aligned}
y(t) =& 0,4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\varepsilon(t-\tau)\left(4 - 2 \cdot e^{-1,4(t-\tau)}\right) \quad d\tau \\
&+ (-0,19) \cdot 4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau) \cdot e^{-0,3\tau} \quad d\tau \\
&+ (-0,19) \cdot (-2) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)e^{-1,4t} \cdot e^{1,4\tau} \cdot e^{-0,3\tau} \quad d\tau \\
&+ 1,5 \cdot 4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)e^{-0,5\tau} \quad d\tau \\
&+ 1,5 \cdot (-2) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)e^{-1,4t} \cdot e^{1,4\tau} \cdot e^{-0,5\tau} \quad d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) =& 0,4 \cdot \delta(0)\varepsilon(t-0)\left(4 - 2 \cdot e^{-1,4(t-0)}\right) \\
&- 0,76 \cdot \int_0^t e^{-0,3\tau} \quad d\tau + 0,38 \cdot e^{-1,4t} \cdot \int_0^t e^{1,1\tau} \quad d\tau \\
&+ 6 \cdot \int_0^t e^{-0,5\tau} \quad d\tau - 3 \cdot e^{-1,4t} \cdot \int_0^t e^{0,9\tau} \quad d\tau
\end{aligned}$$

$$y(t) = 0,4 \cdot \varepsilon(t)\left(4 - 2 \cdot e^{-1,4t}\right) - 0,76 \cdot \left[\frac{e^{-0,3\tau}}{-0,3}\right]_0^t + 0,38 \cdot e^{-1,4t} \cdot \left[\frac{e^{1,1\tau}}{1,1}\right]_0^t + 6 \cdot \left[\frac{e^{-0,5\tau}}{-0,5}\right]_0^t - 3 \cdot e^{-1,4t} \cdot \left[\frac{e^{0,9\tau}}{0,9}\right]_0^t$$

$$y(t) = \varepsilon(t)\left(1,6 - 0,8e^{-1,4t}\right) + \varepsilon(t)\left(2,9\dot{8}\dot{7}e^{-1,4t} - 15,\dot{3}e^{-0,5t} + 2,\dot{8}\dot{7}e^{-0,3t} + 9,4\dot{6}\right)$$

$$y(t) = \varepsilon(t)\left(11,0\dot{6} + 2,1\dot{8}\dot{7}e^{-1,4t} - 15,\dot{3}e^{-0,5t} + 2,\dot{8}\dot{7}e^{-0,3t}\right)$$



A folytonos idejű rendszer válasza adott gerjesztésre

Diszkrét idejű rendszer

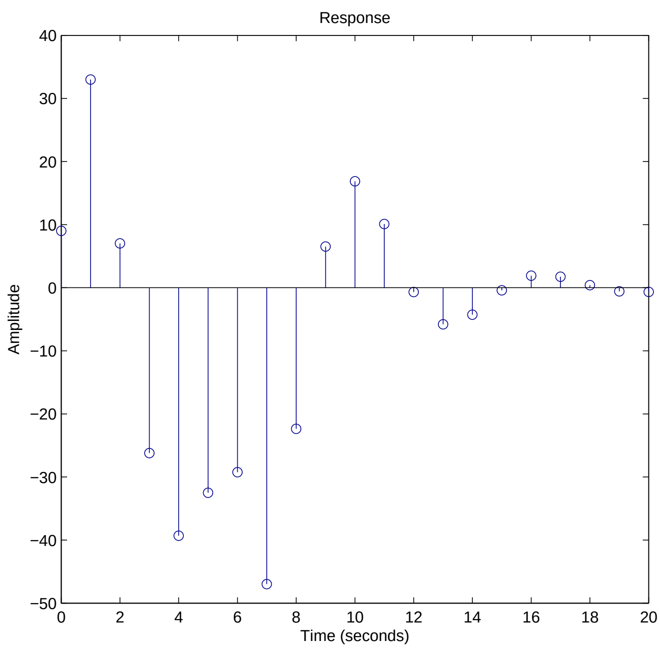
$$h[k] = 1,5\delta[k] + \varepsilon[k-1] \cdot 8,2694 \cdot 0.7211^{k-1} \cdot \cos(0,9828(k-1) + 1,251)$$
$$u[k] = 6(\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6])$$
$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[k-i] \cdot h[i]$$

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 6(\varepsilon[k-i] - \varepsilon[k-i-6]) \cdot \big(1,5\delta[i] + \varepsilon[i-1] \cdot 8,2694 \cdot 0.7211^{i-1} \cdot \cos(0,9828(i-1) + 1,251)\big)$$

A zárójeleket kibontva:

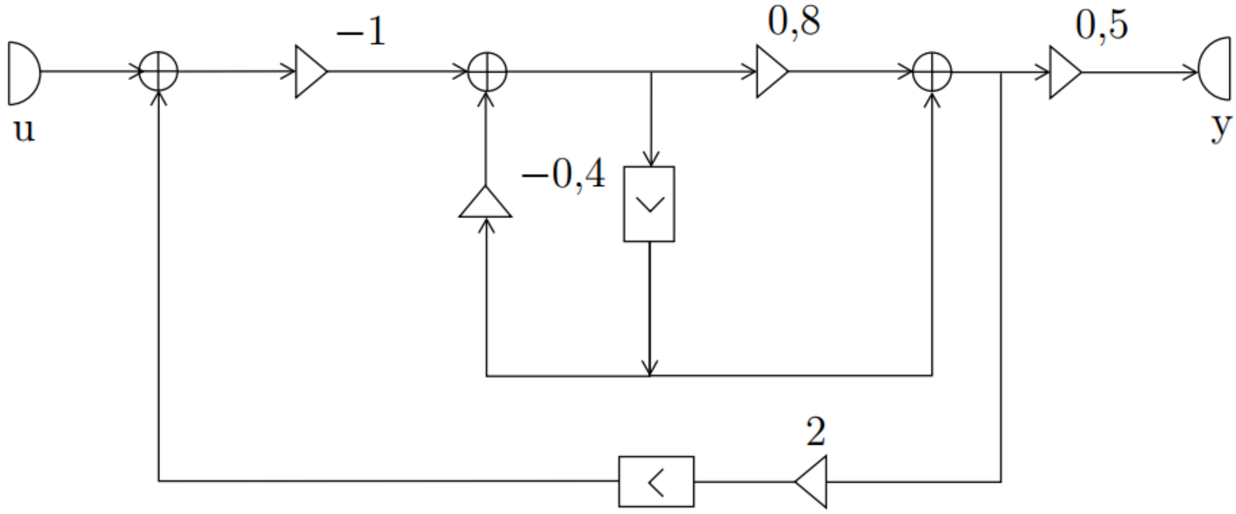
$$\begin{aligned} y[k] = & \sum_{i=-\infty}^{\infty} 6(\varepsilon[k-i] - \varepsilon[k-i-6]) \cdot 1,5\delta[i] \\ & + \sum_{i=-\infty}^{\infty} 6\varepsilon[k-i]\varepsilon[i-1] \cdot 8,2694 \cdot 0.7211^{i-1} \cdot \cos(0,9828(i-1) + 1,251) \\ & - \sum_{i=-\infty}^{\infty} 6\varepsilon[k-i-6]\varepsilon[i-1] \cdot 8,2694 \cdot 0.7211^{i-1} \cdot \cos(0,9828(i-1) + 1,251) \\ y[k] = & \, 9 \cdot (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6]) \\ & + 49,6164 \cdot \sum_{i=1}^{k} 0.7211^{i-1} \cdot \cos(0,9828(i-1) + 1,251) \\ & - 49,6164 \cdot \sum_{i=1}^{k-6} 0.7211^{i-1} \cdot \cos(0,9828(i-1) + 1,251) \\ y[k] = & \, 9 \cdot (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6]) + 49,6164 \cdot \sum_{i=k-5}^{k} 0.7211^{i-1} \cdot \cos(0,9828(i-1) + 1,251) \end{aligned}$$

$$y[k] = 9 \cdot (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6]) + 49,6164 \cdot 0.7211^{k-1}\Big(\varepsilon[k-6] \cdot \frac{\cos(0,9828(k-6) + 1,251)}{0.7211^5}$$
$$+\varepsilon[k-5] \cdot \frac{\cos(0,9828(k-5) + 1,251)}{0.7211^4} + \varepsilon[k-4] \cdot \frac{\cos(0,9828(k-4) + 1,251)}{0.7211^3} + \varepsilon[k-3] \cdot \frac{\cos(0,9828(k-3) + 1,251)}{0.7211^2}$$
$$+\varepsilon[k-2] \cdot \frac{\cos(0,9828(k-2) + 1,251)}{0.7211} + \varepsilon[k-1] \cdot \cos(0,9828(k-1) + 1,251) \Big)$$



A diszkrét idejű rendszer válasza adott gerjesztésre

3. feladat



Az adott rendszer

3.1. Állapotváltozós leírás normál alakban

Folyamatos idejű rendszer

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -0,4x_1(t) - x_2(t) - u(t) \\ x_2'(t) &= 2(x_1(t) + 0,8x_1'(t)) \\ y(t) &= 0,5 \cdot \frac{x_2'(t)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -0,4x_1(t) - x_2(t) - u(t) \\ x_2'(t) &= 2(x_1(t) + 0,8(-0,4x_1(t) - x_2(t) - u(t))) \\ y(t) &= 0,5(x_1(t) + 0,8(-0,4x_1(t) - x_2(t) - u(t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -0,4x_1(t) - x_2(t) - u(t) \\ x_2'(t) &= 1,36x_1(t) - 1,6x_2(t) - 1,6u(t) \\ y(t) &= 0,34x_1(t) - 0,4x_2(t) - 0,4u(t) \end{aligned}$$

Diszkrét idejű rendszer

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= -0,4x_1[k] - x_2[k] - u[k] \\ x_2[k+1] &= 2(x_1[k] + 0,8x_1[k+1]) \\ y[k] &= 0,5 \cdot \frac{x_2[k+1]}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= -0,4x_1[k] - x_2[k] - u[k] \\ x_2[k+1] &= 2(x_1[k] + 0,8(-0,4x_1[k] - x_2[k] - u[k])) \\ y[k] &= 0,5(x_1[k] + 0,8(-0,4x_1[k] - x_2[k] - u[k])) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= -0,4x_1[k] - x_2[k] - u[k] \\ x_2[k+1] &= 1,36x_1[k] - 1,6x_2[k] - 1,6u[k] \\ y[k] &= 0,34x_1[k] - 0,4x_2[k] - 0,4u[k] \end{aligned}$$

Állapotváltozók mindkét rendszer esetén

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -0,4 & -1 \\ 1,36 & -1,6 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1,6 \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} 0,34 & -0,4 \end{bmatrix} \quad D = -0,4$$

3.2. Stabilitás

$$|\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}| = \begin{vmatrix} -0,4-\lambda & -1 \\ 1,36 & -1,6-\lambda \end{vmatrix} = (-0,4-\lambda)(-1,6-\lambda) - (-1)(1,36)$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$$
$$\lambda_1 = -1 + j \quad \lambda_2 = -1 - j$$

Folyamatos idejű rendszer

A Hurwitz-kritérium szükséges, hogy a rendszer gerjesztés-válasz stabil legyen. A $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ alakra:

$$a > 0$$
$$b > 0$$

$$2 > 0$$
$$2 > 0$$

Látjuk, hogy teljesül a gerjesztés-válasz stabilitás feltétele. A rendszer aszimptotikusan stabil, mert $Re\{\lambda_{1,2}\} = -1 < 0$.

Diszkrét idejű rendszer

Jury-kritérium, ha a karakterisztikus polinom $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ alakú:

$$1 + a + b > 0$$
$$1 - a + b > 0$$
$$|b| < 1$$

$$1 + 2 + 2 = 5 \quad > 0$$
$$1 - 2 + 2 = 1 \quad > 0$$
$$|2| \not< 1$$

A Jury-kritériumnak nem felel meg, így nem gerjesztés-válasz stabil a rendszer. Nem aszimptotikusan stabil a rendszer, mivel $|\lambda_i| = \sqrt{(-1)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2} \not< 1$.