# Alkalmazott mesterséges intelligencia (AMI)

http://www.mit.bme.hu/oktatas/targyak/vimibb01

## **OTTHON ÁTNÉZNI a 4. ea. ELŐTT!!!** (2023. ősz)

# Bizonytalan tudás, valószínűségszámítás

http://mialmanach.mit.bme.hu/aima/ch13

Jegyzet 13. fejezet

Előadó: Pataki Béla

a fóliák
Dobrowiecki Tadeusz és
Hullám Gábor anyagainak
felhasználásával készültek


https://www.esrcheck.com/2023/06/05/artificial-intelligence-ai-experts-sign-statement-on-ai-risk/

BME I.E. 414, 463-26-79
pataki@mit.bme.hu,
http://www.mit.bme.hu/general/staff/pataki

# Bizonytalan tudás

## Lehetséges okok

•„Lazaság/lustaság” **-** a részletes kapcsolatok megfogalmazása túl nehéz, a használatuk szintén nehézkes (véges erőforrások)

•Elméleti ismeret hiánya **-** adott problématerületnek az elméleti feltárása még nem zárult le, vagy soha nem lehet lezárni

•Gyakorlati ismeret hiánya **-** nem minden, a szabályokban hivatkozott, feltétel ismert a szabályok alkalmazásakor (pl. zajos méréseket végzünk, nem ismerjük a pontos értékeket, egyes értékeket egyáltalán nem ismerünk)

# Bizonytalan tudás

- Példa:

$$\forall p.\, Tünet(p, Fogfájás) \rightarrow Van(p, Fogszuvasodás) \vee$$
$$Van(p, Ínysorvadás) \vee Van(p, Bölcsességfogn\acute{\acute{o}}) \vee \ldots$$

$$\exists p.\, Van(p, Fogszuvasodás) \rightarrow Tünet(p, Fogfájás)$$

- Fogfájás és fogszuvasodás közötti kapcsolat egyik irányban sem feltétlen logikai következmény. (Pl. több különböző oka lehet a fogfájásnak.)

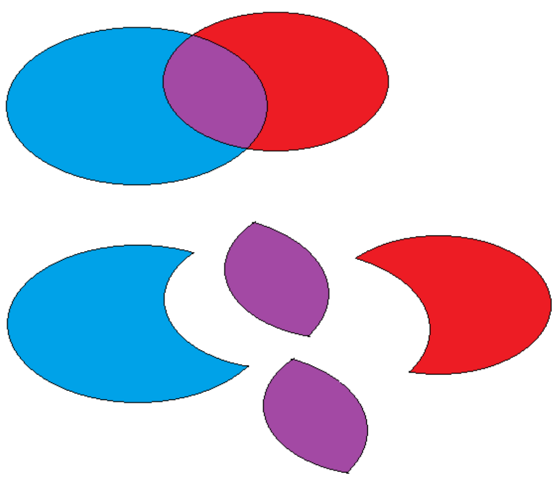
- Az ágens tudása legjobb esetben is csak egy bizonyos mértékű hiedelmet jelent az adott állítással kapcsolatban.

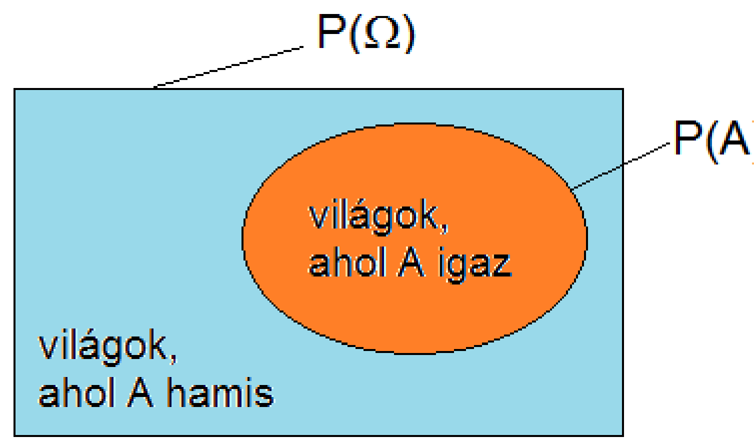
# Valószínűségi axiómák

1. Minden valószínűség 0 és 1 közé esik $0 \leq P(A) \leq 1$ .

2. A biztosan igaz állítás valószínűsége 1,
   a biztosan hamis állításé 0. $P(\textsc{Igaz}) = 1$ ; $P(\textsc{Hamis}) = 0$

3. Diszjunkció valószínűsége: $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$






Valószínűségi axiómákból bizonyítható pl., hogy:

$P(\neg A) = 1 - P(A)$

$P(A) = P(A \wedge B) + P(A \wedge \neg B)$ stb.

# Események – véletlen kísérlet

- **Elemi esemény:** minden lehetséges kimenetel ($e_1, e_2, \ldots, e_n$), amiről egy kísérlet elvégzése után eldönthető, hogy bekövetkezett vagy sem $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n = \emptyset$
- **Eseménytér:** egy kísérlet összes kimenetele, az összes elemi esemény halmaza (Ω). $e_1 U\, e_2\, U \ldots U\, e_n = \Omega$
- **Véletlen esemény:** az eseménytér egy részhalmaza
- **Biztos esemény:** a kísérlet során biztosan (minden kimenetelnél) bekövetkezik.
- **Ellentett esemény**: akkor és csak akkor következik be, ha az eredeti esemény nem következik be

# Valószínűségi állítások

binális **Esemény** = Igaz , P(Esemény = Igaz) rövid jelölés P(Esemény)

többértékű (kategorikus) Például az **Időjárás** az egyik értéket veszi fel az alábbi 4 lehetségesből {Napos, Esős, Felhős, Havazás}

P(Időjárás = Esős)

Folytonos változó Például **Hőmérséklet** = 22.1 ºC, **Hőmérséklet** < 22 ºC

P(Hőmérséklet < 22 ºC)

**Feltételes valószínűség**: P(A,B) = P(A | B) .P(B)

P(A | B) = P(A,B) / P(B)

# Valószínűségi állítások átalakítása

Láncszabály: P(A,B,C,D,E) = P(A | B,C,D,E) P(B,C,D,E) =

= P(A | B,C,D,E) P(B | C,D,E) P(C,D,E) =

…

= P(A | B,C,D,E) P(B | C,D,E) P(C | D,E) P(D | E) P(E)

Teljesen általánosan:

$$P(X_1 X_2 X_3 \ldots X_N) = P(X_1 X_2 X_3 \ldots X_{N-1})\, P(X_N \mid X_1 X_2 \ldots X_{N-1})$$

$$= P(X_1 X_2 X_3 \ldots X_{N-2})\, P(X_{N-1} \mid X_1 X_2 \ldots X_{N-2})\, P(X_N \mid X_1 X_2 \ldots X_{N-1})$$

$$= \ldots = \prod_{i=2}^{N} P(X_i \mid X_1 X_2 \ldots X_{i-1}) \cdot P(X_1)$$

# Bayes-tétel

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{N} P(B|A_i)P(A_i)}, \quad \bigcup_{i=1}^{N} A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_k = \varnothing$$

Miért fontos a Bayes-tétel?

Sokszor rendelkezünk kauzális (ok-okozati) tudással:

Ok | Okozat


| | | |
|---|---|---|
| Betegség | Tünet | $P(tünet \mid betegség)$ |
| Tűz | Riasztás | $P(riasztás \mid tűz)$ |

# Bayes-tétel

Viszont sokszor„ellentétes irányban” szeretnék következtetni, tehát evidenciák (tények, amik most következmények) alapján az ok(ok)ra


| | | |
|---|---|---|
| $P(betegség \mid tünet)$ | Betegség | Tünet |
| $P(tűz \mid riasztás)$ | Tűz | Riasztás |

# Bayes-tétel jelentősége

Lehetővé teszi a valószínűségi állítások átalakítását

- Így kiszámíthatóvá válnak nehezen becsülhető mennyiségek
- Oksági irány: általában könnyebb becsülni
- Diagnosztikai irány: általában nehezebb

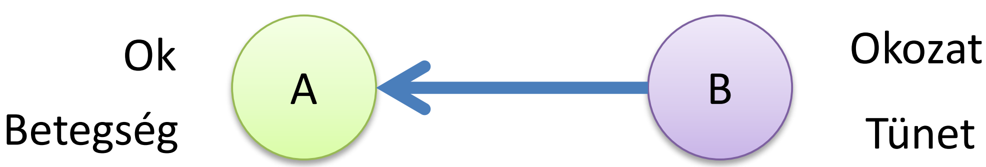

Mi a Tünet létrejöttének valószínűsége a Betegség ismeretében?

Mi a Betegség kialakulásának a valószínűsége?

$$P(Betegség \mid Tünet) = \frac{P(Tünet \mid Betegség)P(Betegség)}{P(Tünet)}$$

Mi a Betegség meglétének valószínűsége a Tünet ismeretében?

Mi a Tünet létrejöttének a valószínűsége?



# Bayes-tétel jelentősége

Mi a Tünet létrejöttének valószínűsége a Betegség ismeretében?

Mi a Betegség kialakulásának a valószínűsége?

$$P(Betegség \mid Tünet) = \frac{P(Tünet \mid Betegség)P(Betegség)}{P(Tünet)}$$

Mi a Betegség meglétének valószínűsége a Tünet ismeretében?

Mi a Tünet létrejöttének a valószínűsége?

*a posteriori* valószínűség (poszterior)

Likelihood

*a priori* valószínűség (prior)

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

Normalizációs konstans

(lásd később)

**1. példa:**

Három betegség okozhatja a hajhullást: B1, B2 és B3. Mindhárom betegségben a népesség 10-10%-a szenved. Azt tapasztaltuk, hogy a B1 betegségben szenvedők 20%-nál lép fel hajhullás, a B2 betegségben szenvedők 30%-nál és a B3 betegségben szenvedők 50%-nál.
A vizsgált páciensnél hajhullást tapasztalunk. Mekkora valószínűséggel szenved az illető a B2 betegségben?

| | |
|---|---|
| **A.** | **0,03** |
| **B.** | **0,023** |
| **C.** | **1,3** |
| **D.** | **0,3** |

# Az 1. példa megoldása

$$P(Betegség\,|\,Tünet) = \frac{P(Tünet\,|\,Betegség)P(Betegség)}{P(Tünet)}$$

$$P(B2\,|\,Tünet) =$$

$$= \frac{P(Tünet\,|\,B2)P(B2)}{P(Tünet\,|\,B1)P(B1) + P(Tünet\,|\,B2)P(B2) + P(Tünet\,|\,B3)P(B3)}$$

Mivel mindhárom betegség esetén azonos a P(Betegség) és a P(Tünet), ezért ugyanolyan arányt fog képviselni a három betegségre a $P(Betegség\,|\,Tünet)$, mint a $P(Tünet\,|\,Betegség)$. Tehát hajhullás esetén

$$P(B2\,|\,Hajhullás) = 0,3 \quad \text{azaz} \quad (30\%)$$

# Bayes-tétel – műveletek

Az $A$ lehetséges értékei: $\{v_1, v_2, v_3, ....., v_N\}$

$$P(A = v_k) = P_k \longleftarrow \text{jelölés}$$

$$P(A = v_k) \wedge P(A = v_j) = 0, \quad k \neq j$$

$$P(A = v_1) \vee P(A = v_2) ... \vee P(A = v_N) = 1$$

$$P(A = v_1) \vee P(A = v_2) ... \vee P(A = v_k) = \sum_{i=1}^{k} P_i$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(B \mid A_i) P(A_i)$$

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A) P(A)}{\sum_{i=1}^{N} P(B \mid A_i) P(A_i)}}$$

Pl. ha A egy bináris valószínűségi változó:

$$P(A = 1 \mid B = 1) = \frac{P(B = 1 \mid A = 1) \cdot P(A = 1)}{P(B = 1 \mid A = 0) \cdot P(A = 0) + P(B = 1 \mid A = 1) \cdot P(A = 1)}$$

# Bayes-tétel – műveletek

A nevező normálásra szolgál!

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k)P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{N} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

Ugyanis *B* bekövetkezése esetén (is) valamelyik $A_k$ biztosan bekövetkezik, tehát:

$$\sum_{k=1}^{N} P(A_k \mid B) = 1 = \sum_{k=1}^{N} \frac{P(B \mid A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{N} P(B \mid A_i)P(A_i)} = \frac{\sum_{k=1}^{N} P(B \mid A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{N} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

Ezért gyakran nem is írjuk ki a nevezőt, csak jelezzük,hogy van egy normáló tényező (ami azt biztosítja, hogy 1 legyen az elemi események feltételes valószínűségeinek összege):

$$P(A \mid B) = \alpha \cdot P(B \mid A)P(A) \qquad \text{vagy} \qquad P(A_k \mid B) = \alpha \cdot P(B \mid A_k)P(A_k)$$

# Együttes valószínűség-eloszlás

- Az együttes valószínűség-eloszlás P($X_1$, ... ,$X_N$) minden egyes elemiesemény-kombinációhoz (állapothoz) valószínűséget rendel.
- Ha minden vizsgált valószínűségi változó diszkrét, akkor az együttes valószínűség-eloszlás leírható egy *N*-dimenziós táblázattal
- Egy cella = az adott állapot valószínűsége.

*Például* 3 szimptómát vizsgálunk – Sz1, Sz2,Sz3. Az összes olyan kombinációt megadjuk, hogy mekkora a valószínűsége, hogy mindhárom szimptóma fennáll: P(Sz1,Sz2,Sz3), az Sz1 hiányzik, de a másik kettő megvan: P($\neg$Sz1,Sz2,Sz3), az első kettő hiányzik, de a harmadik jelentkezik: P($\neg$Sz1, $\neg$Sz2,Sz3), ……

# Együttes valószínűség-eloszlás

Írjuk le az időjárást két (egy bináris és egy ternáris) változóval:

*időjárás*: {napos, felhős},

*hőmérséklet*: {meleg, közepes, hideg}.

Akkor az együttes eloszlás P(*időjárás*, *hőmérséklet*):

| | Meleg | Közepes | Hideg |
|---|---|---|---|
| Napos | .1 | .2 | .1 |
| Felhős | .05 | .35 | .2 |

- Mivel az elemi események egymást kizáróak, ezek együttes bekövetkezése szükségszerűen hamis tény.
- Az axiómákból következően: **a táblázat elemeinek összege 1.**

# Marginális (és más) eloszlások

$$P(X,Y) = \sum_{z \in dom(Z)} P(X,Y,Z=z)$$

| | Meleg | Közepes | Hideg |
|---|---|---|---|
| P(*hőmérséklet*) = | **.15** | .55 | .3 |

| | Napos | Felhős |
|---|---|---|
| P(*időjárás*) = | .4 | **.6** |

| | Meleg | Közepes | Hideg |
|---|---|---|---|
| Napos | .1 | .2 | .1 |
| Felhős | .05 | .35 | .2 |

**2. példa**

| | Meleg | Közepes | Hideg |
|---|---|---|---|
| Napos | .1 | .2 | .1 |
| Felhős | .05 | .35 | .2 |

Az előzőekben bemutatott együttes eloszlás alapján mit mondhatunk, a P(*hőmérséklet*| *időjárás* = Napos) feltételes eloszlásról?

A. Ha időjárás=Napos, akkor a
   Meleg valószínűsége 0,1 Közepesé 0,2 Hidegé 0,1
B. Ha időjárás=Napos, akkor a
   Meleg valószínűsége 0,15 Közepesé 0,55 Hidegé 0,3
C. Ha időjárás=Napos, akkor a
   Meleg valószínűsége 0,2 Közepesé 0,4 Hidegé 0,2
D. Ha időjárás=Napos, akkor a
   Meleg valószínűsége 0,25 Közepesé 0,5 Hidegé 0,25

# (Marginális) és más - feltételes eloszlások

P(*hőmérséklet* | *időjárás* = Napos) =

| Meleg | Közepes | Hideg |
|---|---|---|
| .25 | .50 | .25 |

Az összegük 1 kell legyen!

P(*időjárás*| *hőmérséklet*) =

| | Meleg | Közepes | Hideg |
|---|---|---|---|
| Napos | .67 | .36 | .33 |
| Felhős | .33 | .64 | .67 |

| | Meleg | Közepes | Hideg |
|---|---|---|---|
| Napos | .1 | .2 | .1 |
| Felhős | .05 | .35 | .2 |

# (Marginális) és más - feltételes eloszlások

P(*hőmérséklet* | *időjárás* = Napos) =

| Meleg | Közepes | Hideg |
|---|---|---|
| .25 | .50 | .25 |

P(*időjárás*| *hőmérséklet*) =

| | Meleg | Közepes | Hideg |
|---|---|---|---|
| Napos | .67 | .36 | .33 |
| Felhős | .33 | .64 | .67 |

Az összegük 1 kell legyen!

| | Meleg | Közepes | Hideg |
|---|---|---|---|
| Napos | .1 | .2 | .1 |
| Felhős | .05 | .35 | .2 |

# Együttes valószínűség-eloszlás

**Jó hír**: együttes eloszlás birtokában minden kérdésre kapunk választ, ami a benne szereplő véletlen változók viszonyára és tulajdonságaira vonatkozik.

**Rossz hír**: nemigen megy 10-nél több változót tartalmazó eloszlások megadása

$P(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ esetén kell $2^N - 1$ független valószínűségérték, exponenciálisan növekvő számú valószínűség ismerete szükséges.

Térjünk vissza a tankönyv példájához:

$$\forall p.\, Tünet(p, Fogfájás) \rightarrow Van(p, Fogszuvasodás) \vee$$
$$Van(p, Ínysorvadás) \vee Van(p, Bölcsességfognő) \vee \ldots$$

$$\exists p.\, Van(p, Fogszuvasodás) \rightarrow Tünet(p, Fogfájás)$$

- Fogfájás és fogszuvasodás közötti kapcsolat egyik irányban sem feltétlen logikai következmény. (Pl. több különböző oka lehet a fogfájásnak.)
- Az ágens tudása legjobb esetben is csak egy bizonyos mértékű hiedelmet jelent az adott állítással kapcsolatban.

- Tegyük fel, hogy fogorvos a szondával (= a hegyes fémizé) beleakad a fogunkba.

# Feltételes függetlenség

**Mind a fogfájásnak, mind a szonda lyukba akadásának közvetlen (közös) oka lehet a fogszuvasodás.**

Amint **tudjuk**, hogy fogszuvasodás fennáll, nem hisszük, hogy a szonda lyukba akadásának valószínűsége a fogfájástól fog függeni.

Hasonlóképpen, a szonda találata nem befolyásolja annak valószínűségét, hogy a szuvasodás fogfájást okoz.

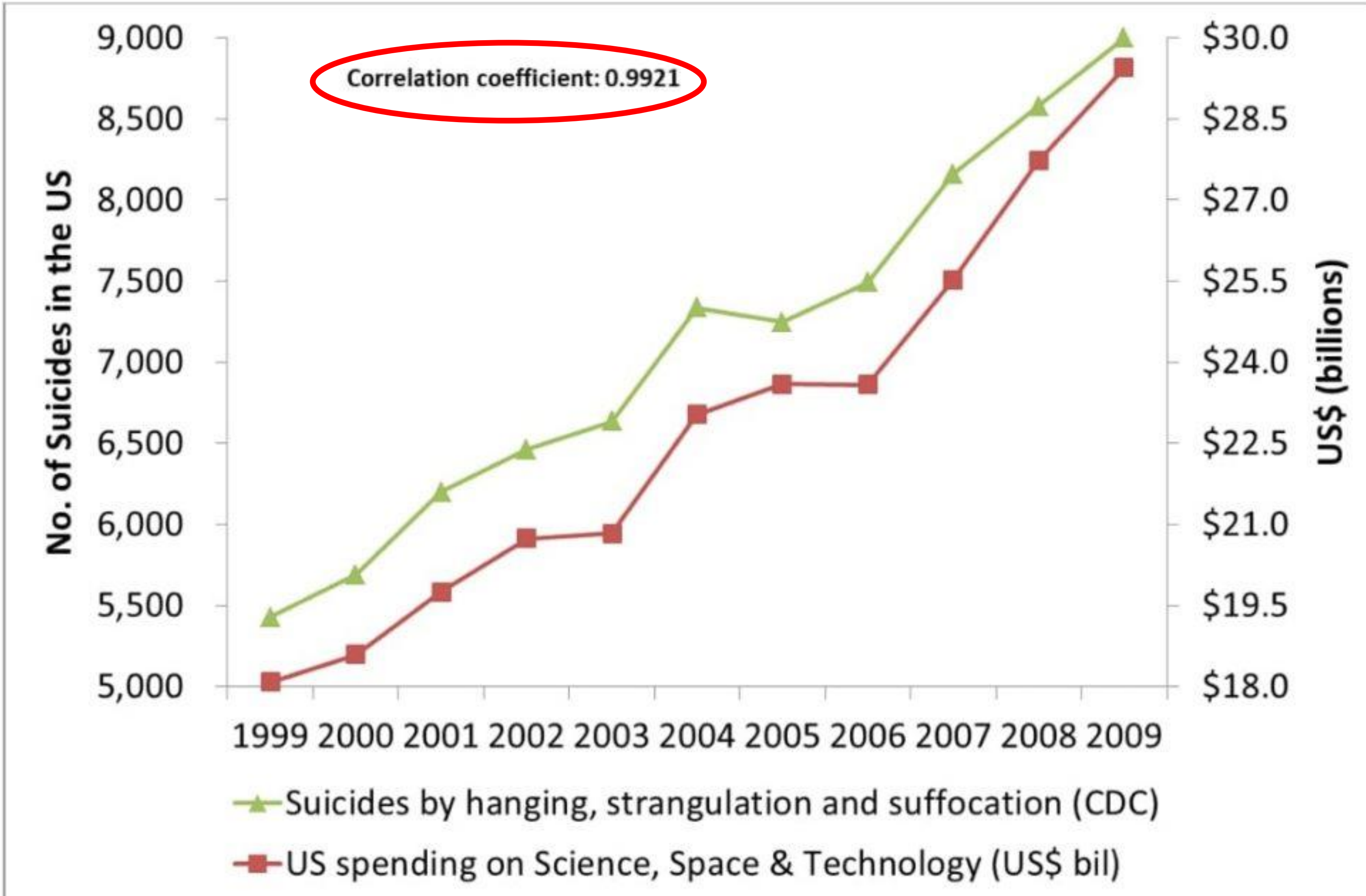
$$P(Akad \mid Ffáj \wedge Fogsz) = P(Akad \mid Fogsz)$$

$$P(Ffáj \mid Akad \wedge Fogsz) = P(Ffáj \mid Fogsz)$$

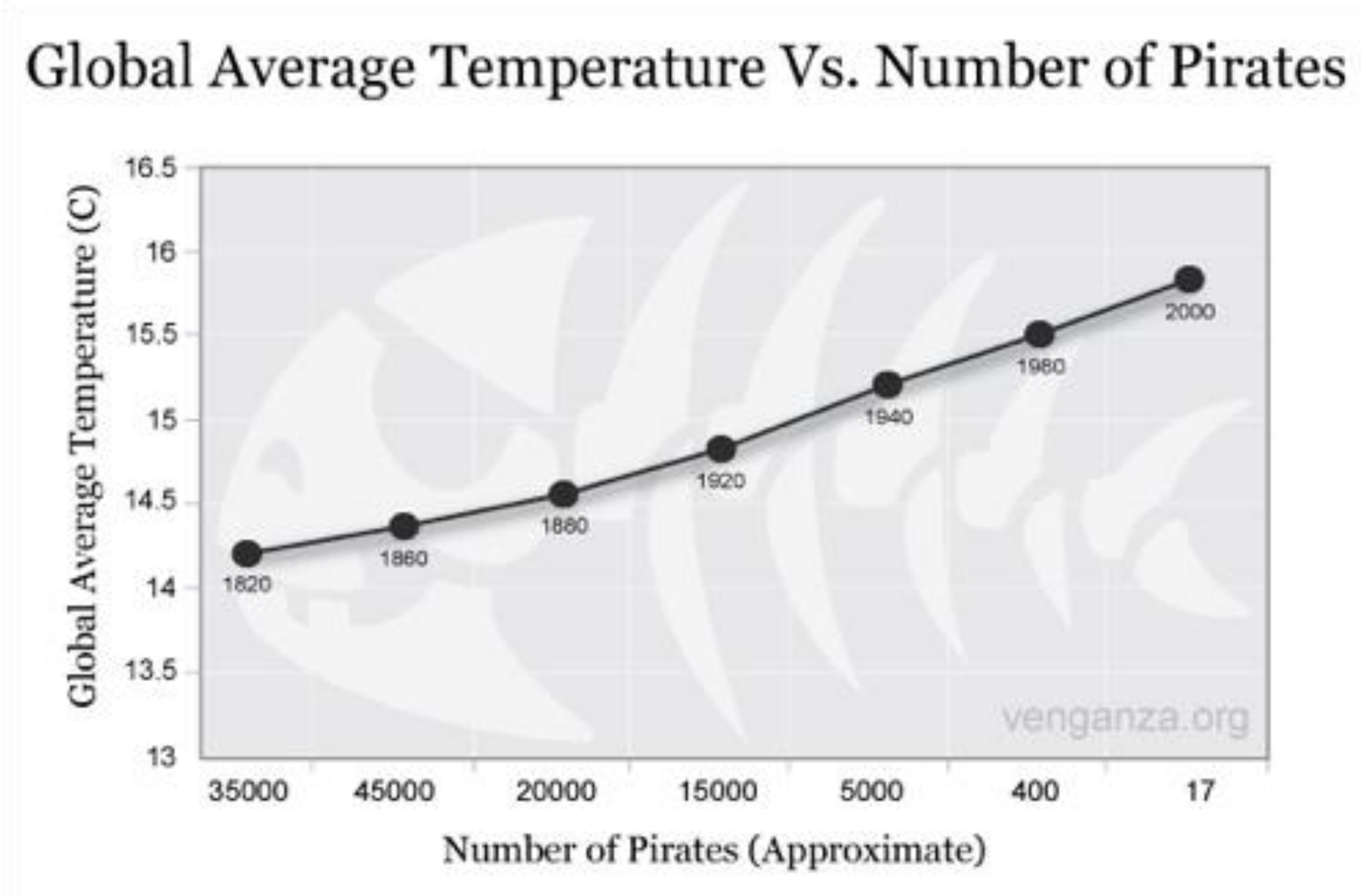
A *Fogszuvasodás* ténye esetén a *Fogfájás* és *Akad* között fennáll a **feltételes függetlenség**.

(Ettől még pl. $P(Akad \mid Ffáj)$ vagy $P(Ffáj \mid Akad)$ értelmes!)

Gyakran célszerű valami mögöttes közös okra gyanakodni, mert az, hogy két dolog összefüggeni *látszik*, nem jelenti azt, hogy ok-okozati összefüggés van köztük. Néhány bizarr „összefüggés”

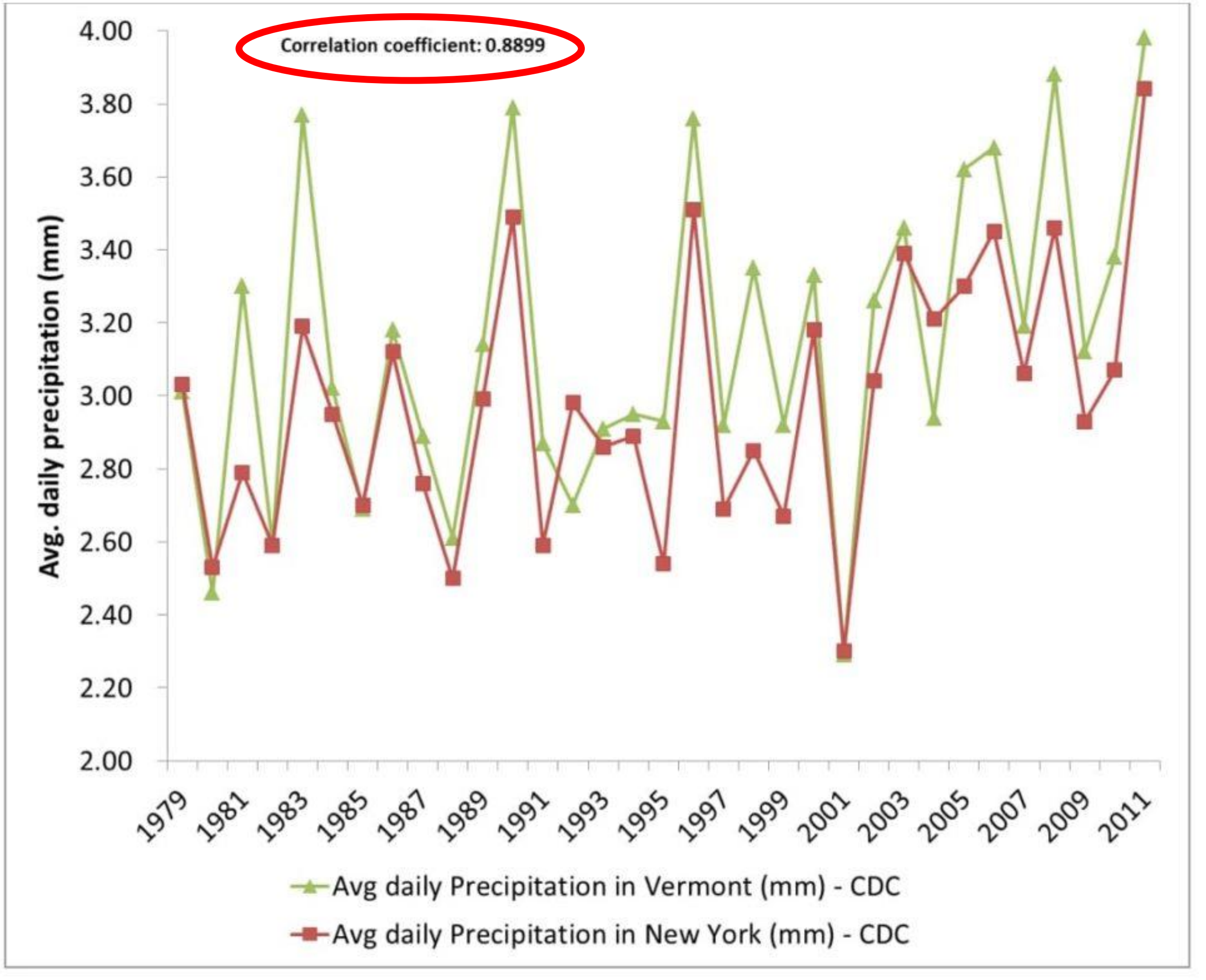



Több mint 99%-os korrelációt mutat az USA-ban a tudományra költött pénzek és bizonyos típusú öngyilkosságok adatsora… (http://www.tussursilk.com/tag/causation/)




Ez is ölég bizarr…. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PiratesVsTemp(en).svg

# Az előző kettő simán buta látszat, ez viszont mutatja, hogy van egy közös mögöttes ok




New York és Vermont határos államok – nyilván nem az egyikben esett csapadék az oka a másikban esett csapadéknak, hanem ugyanazok az időjárási körülmények hatnak a két helyre – közös okuk van.

# Feltételes függetlenség


$$P(Fogszuvasodás)$$

$$P(Akad \mid Fogsz) = \begin{bmatrix} P(Akad \mid Fogsz = 1) \\ P(Akad \mid Fogsz = 0) \end{bmatrix}$$

$$P(Ffáj \mid Fogsz) = \begin{bmatrix} P(Ffáj \mid Fogsz = 1) \\ P(Ffáj \mid Fogsz = 0) \end{bmatrix}$$

# Feltételes függetlenség - alkalmazás

$$P(Fogsz \mid Ffáj \wedge Akad) = P(Fogsz \mid Ffáj, Akad) =$$

$$= \frac{\boxed{P(Ffáj \mid Fogsz \wedge Akad)} \cdot P(Fogsz \wedge Akad)}{P(Ffáj \wedge Akad)} =$$

$$= \frac{\boxed{P(Ffáj \mid Fogsz)}}{P(Akad \mid Ffáj)} \cdot \frac{P(Akad \mid Fogsz) \cdot P(Fogsz)}{P(Ffáj)}$$

$$P(Akad \mid Ffáj \wedge Fogsz) = P(Akad \mid Fogsz)$$

$$P(Ffáj \mid Akad \wedge Fogsz) = P(Ffáj \mid Fogsz)$$

$$P(Fogsz \mid Ffáj \wedge Akad)$$

$$= P(Fogsz) \frac{P(Ffáj \mid Fogsz)}{P(Ffáj)} \frac{P(Akad \mid Fogsz)}{P(Akad \mid Ffáj)}$$

?

# Normalizálás

Még mindig kérdéses a: $P(Akad|Fogfájás)$?!

- várhatóan figyelembe kell venni a tünetek összes lehetséges párosítását (hármasait, stb.), valóságban ez a kifejezés kiesik: a nevezők szorzata: $P(Akad|Fogfájás)\ P(Fogfájás) = P(Akad)$

Ezt az un. **normalizálással** kiküszöbölhetjük, feltéve, hogy pl. a $P(Akad|Fogszuvasodás)$-t megbecsüljük, vagy megmérjük (gyakorisággal).

$$P(Fogsz|Akad) = \frac{P(Akad|Fogsz)P(Fogsz)}{P(Akad)}$$

$$P(Fogsz|Akad) \sim P(Akad|Fogsz)P(Fogsz)$$

# Normalizálás

$$P(Fogsz \mid Akad) = \frac{P(Akad \mid Fogsz)P(Fogsz)}{P(Akad)}$$

$$P(Fogsz \mid Akad) \sim P(Akad \mid Fogsz)P(Fogsz) =$$
$$= \alpha P(Akad \mid Fogsz)P(Fogsz) = C_1\alpha$$

$$P(\neg Fogsz \mid Akad) = \frac{P(Akad \mid \neg Fogsz)P(\neg Fogsz)}{P(Akad)} =$$
$$= \alpha P(Akad \mid \neg Fogsz)P(\neg Fogsz) = C_2\alpha$$

$$P(Fogsz \mid Akad) + P(\neg Fogsz \mid Akad) = (C_1 + C_2)\alpha = 1$$

$$\alpha = (C_1 + C_2)^{-1}$$

# Lehetséges problémák

- Az a priori feltételes és együttes valószínűségek begyűjtése nehéz és költséges
- Az emberek rossz valószínűségbecslők
  (ha nem az események gyakoriságából próbálunk becsülni, hanem szakértőket kérünk szubjektív becslésre)
- A Bayes-szabály sok számítást igényel