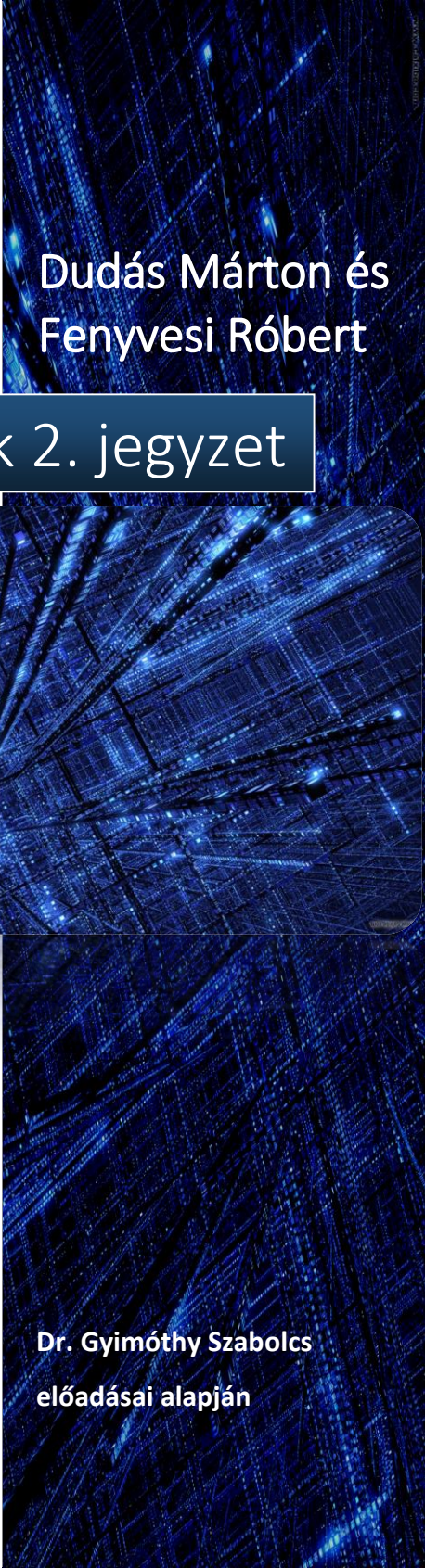




Dudás Márton és  
Fenyvesi Róbert

## Jelek és rendszerek 2. jegyzet

Dr. Gyimóthy Szabolcs  
előadásai alapján

A jegyzet a Jelek és rendszerek II. tárgyhoz készült, mely a Jelek és rendszerek I. című tárgy folytatása, és célja, hogy a hallgatók a folytonos idejű rendszerek analíziséhez szükséges módszereket elsajátítsák, valamint megismerkedjenek a diszkrét idejű jelfolyam hálózatokkal is.

A jegyzet **Dr. Gyimóthy Szabolcs** tanár úr előadásai alapján készült, kiegészítő példákkal, és a tananyaghoz tartozó érdekességekkel, a modulációs témakörben tartott előadásokért **Dr. Seller Rudolf** tanár urat illeti köszönet. A tárgyhoz tartozó irodalom hivatalosan a **Dr. Fodor György: Hálózatok és rendszerek** című könyv.

## Tartalom

|                                                                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. FOLYTONOS IDEJŰ, LINEÁRIS, INVARIÁNS RENDSZEREK PERIODIKUS ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTA (TANANYAGBÓL KIKERÜLT FEJEZET) .....</b> | <b>4</b>  |
| I. A PERIODIKUS JEL .....                                                                                                      | 4         |
| II. FOURIER-SOR .....                                                                                                          | 6         |
| III. LINEÁRIS INVARIÁNS RENDSZER GERJESZTÉS-VÁLASZ KAPCSOLATA PERIODIKUS ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTBAN .....                          | 14        |
| <b>2. JELEK ÉS RENDSZEREK ÁLTALÁNOS LEÍRÁSA A FREKVENCIATARTOMÁNYBAN .....</b>                                                 | <b>19</b> |
| I. FOLYTONOS IDEJŰ JELEK FOURIER TRANSZFORMÁCIÓJA .....                                                                        | 19        |
| II. JELÁTVITEL VIZSGÁLATA FREKVENCIATARTOMÁNYBAN .....                                                                         | 29        |
| <b>3. ANALÍZIS A KOMPLEX FREKVENCIATARTOMÁNYBAN .....</b>                                                                      | <b>35</b> |
| I. LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ (1785, HEAVISIDE(1880-1887)) .....                                                                   | 35        |
| II. A TRANSZFORMÁCIÓ „MEGFORDÍTÁSA” .....                                                                                      | 41        |
| III. KIRCHHOFF-TÍPUSÚ HÁLÓZATOK ANALÍZISE S-TARTOMÁNYBAN .....                                                                 | 45        |
| IV. ÁTVITELI FÜGGVÉNY .....                                                                                                    | 48        |
| <b>4. RENDSZERJELLEMZŐ FÜGGVÉNYEK .....</b>                                                                                    | <b>51</b> |
| I. RENDSZERTULAJDONSÁG (ISMÉTLÉS) .....                                                                                        | 51        |
| II. A HÁROM „H” .....                                                                                                          | 51        |
| III. SPECIÁLIS TULAJDONSÁGÚ RENDSZEREK .....                                                                                   | 53        |
| <b>5. DISZKRÉT IDEJŰ JELEK, RENDSZEREK ÉS HÁLÓZATOK VIZSGÁLATA .....</b>                                                       | <b>58</b> |
| I. DÍ JELEK .....                                                                                                              | 58        |
| II. A DÍ RENDSZER .....                                                                                                        | 61        |
| III. A DÍ JELFOLYAM-HÁLÓZAT .....                                                                                              | 61        |
| <b>6. AZ IMPULZUSVÁLASZ ÉS ALKALMAZÁSA .....</b>                                                                               | <b>63</b> |
| I. AZ IMPULZUSVÁLASZ — $hk$ .....                                                                                              | 63        |
| II. A VÁLASZ KIFEJEZÉSE AZ IMPULZUSVÁLASZ SEGÍTSÉGÉVEL .....                                                                   | 64        |
| <b>7. A RENDSZEREGYENLET .....</b>                                                                                             | <b>65</b> |
| I. DEFINÍCIÓ .....                                                                                                             | 65        |
| II. KANONIKUS HÁLÓZATOK .....                                                                                                  | 66        |
| III. MEGOLDÁS FOKOZATOS BEHELYETTESÍTÉSSEL (LÉPÉSRŐL LÉPÉSRE) .....                                                            | 66        |
| IV. VÁLASZIEL SZÁMÍTÁSA $hk$ SEGÍTSÉGÉVEL .....                                                                                | 67        |
| V. GERJESZTÉS-VÁLASZ STABILITÁS .....                                                                                          | 68        |
| VI. VÁLASZIEL SZÁMÍTÁSA KÖZVETLENÜL ÖSSZETEVŐKRE BONTÁSSAL .....                                                               | 69        |
| <b>8. AZ ÁLLAPOTVÁLTOZÓS LEÍRÁS .....</b>                                                                                      | <b>70</b> |
| I. AZ ÁLLAPOTVÁLTOZÓS LEÍRÁS .....                                                                                             | 70        |

|                                                                                    |            |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| II. ÁLLAPOTEGYENLETEK TRANSZFORMÁLÁSA .....                                        | 70         |
| III. RENDSZER LEÍRÁSA ÁLLAPOTVÁLTOZÓKKAL .....                                     | 71         |
| IV. AZ ÁLLAPOTEGYENLETEK MEGOLDÁSA .....                                           | 73         |
| V. ASZIMPTOTIKUS STABILITÁS .....                                                  | 75         |
| VI. LESLIE-MODELL (1945) .....                                                     | 77         |
| <b>9. SZINUSZOS ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOT .....</b>                                      | <b>79</b>  |
| I. A DI SZINUSZOS JEL .....                                                        | 79         |
| II. RENDSZERANALÍZIS SZINUSZOS ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTBAN .....                        | 81         |
| <b>10. PERIODIKUS ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOT .....</b>                                    | <b>84</b>  |
| I. A DI PERIODIKUS JEL .....                                                       | 84         |
| II. DISZKRÉT FOURIER-SOR (DFT – DISCRETE FOURIER TRANSFORM) .....                  | 85         |
| III. VÁLASZJEL SZÁMÍTÁSA .....                                                     | 87         |
| <b>11. DI JELEK ÉS RENDSZEREK ÁLTALÁNOS LEÍRÁSA A FREKVENCIATARTOMÁNYBAN .....</b> | <b>88</b>  |
| I. DI FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ .....                                                 | 88         |
| II. RENDSZERANALÍZIS .....                                                         | 92         |
| <b>12. DI RENDSZEREK ANALÍZISE KOMPLEX FREKVENCIATARTOMÁNYBAN .....</b>            | <b>94</b>  |
| I. A $Z$ -TRANSZFORMÁCIÓ (DI LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ) .....                         | 94         |
| II. INVERZ TRANSZFORMÁCIÓ .....                                                    | 99         |
| III. ÁTVITELI FÜGGVÉNY .....                                                       | 100        |
| IV. A HÁLÓZAT TRANSZFORMÁLÁSA Z-TARTOMÁNYBA .....                                  | 101        |
| V. AZ ÁLLAPOTEGYENLETEK TRANSZFORMÁLÁSA .....                                      | 102        |
| VI. DI RENDSZERJELLEMZŐ FÜGGVÉNYEK (ÖSSZEFOGLALÁS) .....                           | 103        |
| VII. SPECIÁLIS TULAJDONSÁGÚ RENDSZEREK .....                                       | 104        |
| VIII. VIZSGAPÉLDA .....                                                            | 106        |
| <b>13. MINTAVÉTELEZÉS ÉS JELREKONSTRUKCIÓ .....</b>                                | <b>108</b> |
| I. MINTAVÉTELEZÉS IDŐTARTOMÁNYBAN .....                                            | 108        |
| II. MINTAVÉTELEZÉS LEÍRÁSA FREKVENCIATARTOMÁNYBA .....                             | 110        |
| III. A MINTAVÉTELI TÉTEL .....                                                     | 111        |
| IV. JELREKONSTRUKCIÓ .....                                                         | 113        |
| <b>14. DISZKRÉT IDEJŰ SZIMULÁCIÓ .....</b>                                         | <b>117</b> |
| I. FELADATKITŰZÉS .....                                                            | 117        |
| II. SZIMULÁCIÓ IMPULZUSVÁLASZ ALAPJÁN .....                                        | 118        |
| III. SZIMULÁCIÓ A $H_{cs}$ VAGY $H_{cj\omega}$ ALAPJÁN .....                       | 119        |
| IV. ADOTT JELTÍPUSRA OPTIMÁLIS SZIMULÁTOR .....                                    | 121        |
| V. PÉLDÁK .....                                                                    | 122        |
| <b>15. ANALÓG MODULÁCIÓ (TANANYAGBÓL KIKERÜLT FEJEZET) .....</b>                   | <b>125</b> |
| I. MODELL .....                                                                    | 125        |
| II. AMPLITÚDÓMODULÁCIÓ .....                                                       | 127        |
| III. SZÖG-MODULÁCIÓ .....                                                          | 133        |
| IV. PÉLDÁK .....                                                                   | 136        |
| <b>16. DIGITÁLIS MODULÁCIÓ (TANANYAGBÓL KIKERÜLT FEJEZET) .....</b>                | <b>138</b> |
| I. MODELL .....                                                                    | 138        |
| II. BILLENTYŰZÉS .....                                                             | 138        |
| III. KITERJESZTÉS TÖBB BITRE .....                                                 | 140        |
| IV. QAM (QUADRATURE AMPITUDE MODULATION) .....                                     | 142        |
| V. QAM MODULÁCIÓ ÉS DEMODULÁCIÓ .....                                              | 143        |
| <b>KÖSZÖNJÜK A FIGYELMET, SOK SIKERT KÍVÁNUNK MINDENKINEK A VIZSGÁN! .....</b>     | <b>145</b> |

# 1. Folytonos idejű, lineáris, invariáns rendszerek periodikus állandósult állapota (tananyagból kikerült fejezet)

## I. A periodikus jel

Adott  $x(t)$  jel periodikus, ha létezik olyan  $T$  érték, melyre minden  $t$  esetén  $x(t + T) = x(t)$ . A lehetséges  $T$  értékek minimumát az  $x(t)$  jel periódusidejének nevezzük.

Jellemzői:

a.  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , az alapkörfrekvencia, míg  $f_0 = \frac{1}{T}$  az alapfrekvencia.

b. (Egyszerű) középérték:

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Megadja az egy periódusra vonatkozó átlagértéket.

Ha  $x(t) = i(t)$  periodikus áram, akkor  $Q_T = I_0 \cdot T$  – egy periódus alatt átáramló töltés nettó értéke.

c. Váltakozó összetevő:

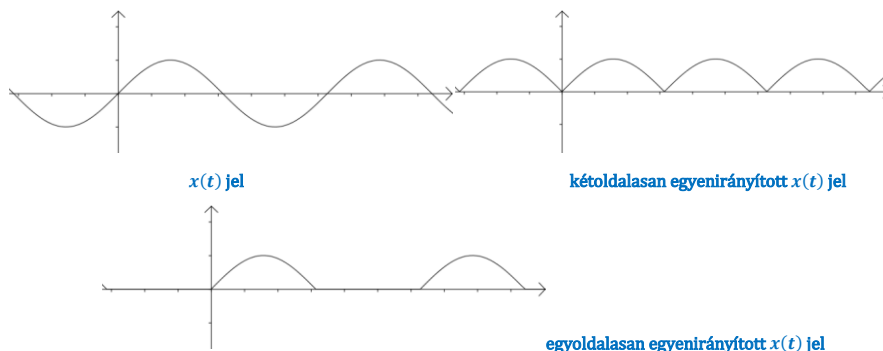
$\tilde{x}(t) = x(t) - X_0$  Egy konstans jel váltakozó összetevője zérus.

d. Abszolút középérték:

$$X_a = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt$$

Ahol  $|x(t)|$  a kétoldalasan egyenirányított (full rectified)  $x(t)$  jel.

$x(t)$  egyoldalasan egyenirányított, ha értékkészletéből elhagyjuk a negatív értékeket.



- e. Effektív érték (RMS – Root Mean Square, vagyis négyzetes középérték):

$$X_{eff} = X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$$

Fizikai jelentése, egy olyan konstans jel, melynek teljesítménye egy periódus alatt megegyezik az adott jel teljesítményével.

Ha egy Ohmos ellenállást ( $R$ ) és a rajta átfolyó áramot ( $i(t)$ ) tekintjük, akkor a teljesítményt a következő módon kapjuk  $P_R = RI_{eff}^2$ .

A hálózati feszültség esetén 230V az effektív érték, míg a maximuma 325V.

- f. Alaki jellemzők:

$$\text{Formatényező: } k_f = \frac{X_{eff}}{X_a}$$

$$\text{Csúcsnégyező: } k_m = \frac{X_m}{X_{eff}}, \text{ ahol } X_m = \max\{|x(t)|\}$$

Torzítási tényező (ld. később)

Az alaki jellemzők a szinusztól való eltérés mértékét mutatják meg.

Példa: Számoljuk ki az újonnan definiált értékeket az  $x(t) = \hat{X} \cos(\omega_0 t)$  jelre!

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}; \omega_0 = \frac{2\pi}{T}; f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Gyakran használjuk számítások során a következőt:  $\omega_0 \cdot T = 2\pi$ .

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{X} \cos(\omega_0 t) dt = \frac{\hat{X}}{T} \left[ \sin \frac{\omega_0}{T} t \right]_0^T = \frac{\hat{X}}{T} (\sin 2\pi - \sin 0) = 0$$

$$\tilde{x}(t) = x(t) - X_0 = \hat{X} \cos(\omega_0 t)$$

$$X_a = \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{X} \cos(\omega_0 t)| dt = \frac{\hat{X}}{T} \int_0^T |\cos(\omega_0 t)| dt = \frac{\hat{X}}{T} \int_0^T \cos(\omega_0 t) dt = \frac{\hat{X}}{T} \left[ \sin \frac{\omega_0}{T} t \right]_0^T = \frac{\hat{X}}{T} (\sin 2\pi - \sin 0) = \frac{2}{\pi} \hat{X}$$

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} = \sqrt{\frac{\hat{X}^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_0 t) dt} = \sqrt{\frac{\hat{X}^2}{T} \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2\omega_0 t)}{4\omega_0} \right]_0^T} = \sqrt{\frac{\hat{X}^2}{T} \left( \frac{T}{2} + \frac{\sin(4\pi)}{4} - \frac{\sin(0)}{4} \right)} = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}$$

$$k_f = \frac{X_{eff}}{X_a} = \frac{\frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi} \hat{X}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$k_m = \frac{X_m}{X_{eff}} = \frac{\hat{X}}{\frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

## II. Fourier-sor

A két végén rögzített húr problémáját d'Alembert, Bernoulli és Euler Fourier-sorfejtéssel oldották meg, míg Fourier a testek hőáramlását tudta így módon modellezni.

Alap elképzelés, hogy egy periodikus jelet bontunk fel adott frekvenciájú szinuszok és koszinuszok összegére.

### 1. Alakjai:

#### a. Matematikai valós alak (ld.: Matematika A2a):

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [X_k^A \cos(k\omega_0 t) + X_k^B \sin(k\omega_0 t)], \text{ ahol } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \text{ a jel egyszerű középértéke}$$

$$X_k^A = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$X_k^B = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

#### b. Mérnöki valós alak:

A matematikai valós alakban megismert azonos frekvenciájú koszinuszok és szinuszok helyettesíthetők egyetlen szinusszal, vagy koszinusszal és egy fázistolással, mely egyszerűsíti számításainkat.

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \rho_k), \text{ ahol}$$

$$\hat{X}_k = \sqrt{(X_k^A)^2 + (X_k^B)^2}$$

$$\rho_k = -\arctan \frac{X_k^B}{X_k^A}$$

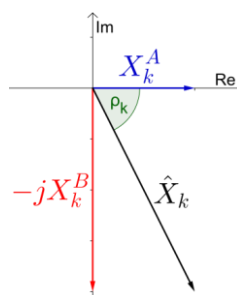
$$X_k^A = \hat{X}_k \cos \rho_k$$

$$X_k^B = \hat{X}_k \sin \rho_k$$

$X_0$  a jel egyszerű középértéke

$\hat{X}_1 \cos(\omega_0 t + \rho_1)$  a jel alapharmonikusa

$\hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \rho_k)$  a jel  $k$ . felharmonikusai



A mérnöki valós alak egy lehetséges elképzelése

### Kiegészítő tananyag

A matematika és mérnöki alak ekvivalenciája trigonometrikus azonosságok alapján bizonyítható:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [X_k^A \cos(k\omega_0 t) + X_k^B \sin(k\omega_0 t)] = \\
 &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{(X_k^A)^2 + (X_k^B)^2} \left[ \frac{X_k^A}{\sqrt{(X_k^A)^2 + (X_k^B)^2}} \cos(k\omega_0 t) + \frac{X_k^B}{\sqrt{(X_k^A)^2 + (X_k^B)^2}} \sin(k\omega_0 t) \right] \\
 &\left( \frac{X_k^A}{\sqrt{(X_k^A)^2 + (X_k^B)^2}} \right)^2 + \left( \frac{X_k^B}{\sqrt{(X_k^A)^2 + (X_k^B)^2}} \right)^2 = 1 \rightarrow \exists \xi, \cos(\xi) \\
 &= \frac{X_k^A}{\sqrt{(X_k^A)^2 + (X_k^B)^2}} \\
 x(t) &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{(X_k^A)^2 + (X_k^B)^2} [\cos(\xi) \cos(k\omega_0 t) + \sin(\xi) \sin(k\omega_0 t)] \\
 &= \\
 &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{(X_k^A)^2 + (X_k^B)^2} [\cos(k\omega_0 t - \xi)] \\
 \text{Tehát:} \\
 \hat{X}_k &:= \sqrt{(X_k^A)^2 + (X_k^B)^2}
 \end{aligned}$$

### c. Komplex alak:

Az együtthatók számítása egyszerűsödik a komplex alak bevezetésével, valamint komplex értékű jeleket (pl.: feszültségeket, áramokat, vagy elektromágneses hullámokat) is kezelhetünk.

Belátható, hogy valós jelekre ekvivalens az eddigi alakokkal a következő:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^C e^{jk\omega_0 t} \\
 X_k^C &= \frac{1}{T} \int_0^T \bar{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt
 \end{aligned}$$

Ha  $\bar{x}(t)$  valós, tehát  $\bar{x}(t) = (\bar{x}(t))^*$ , akkor  $X_{-k}^C = (X_k^C)^*$  konjugált párok.

### Kiegészítő tananyag

$$X_{-k}^C = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{x}(t) e^{-j(-k)\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{x}(t) e^{jk\omega_0 t} dt = \left( \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{(\bar{x}(t))^*}_{=\bar{x}(t)} e^{-jk\omega_0 t} dt \right)^* = (X_k^C)^*$$

Valós jelekre a következő áttérések igazak az alakok közt:

$$\begin{aligned}
 X_0 &= X_0^C \\
 \hat{X}_k &= 2|X_k^C| \\
 \rho_k &= \arg(X_k^C)
 \end{aligned}$$

### Kiegészítő tananyag

Áttérések bizonyítása:

$$\begin{aligned} X_k^C &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \stackrel{\text{Euler-alak}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) (\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t)) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt - j \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{X_k^A}{2} - \frac{X_k^B}{2} j \\ \hat{X}_k &= \sqrt{(X_k^A)^2 + (X_k^B)^2} = 2|X_k^C| \\ \rho_k &= \arg(X_k^C) \text{ (ld.: korábbi ábra)} \end{aligned}$$

## 2. Fourier polinom és konvergencia:

### a. $N$ -ed rendű közelítés:

Közelítsük a jel Fourier-sorát az első  $N$  darab tagjával:

$$x(t) \approx x_N(t) := \sum_{k=-N}^N X_k^C e^{jk\omega_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^N \hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \rho_k)$$

**Komplex esetben az összegzés –  $N$ -től  $N$ -ig végezendő!**

Definiáljuk a négyzetes középhibát a közelítés hibájának becsléséhez:

$$H_N = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t) - x_N(t)|^2 dt}, \text{ ezt nevezhetjük a hiba energiatartalmának}$$

A hiba mértékét más módon is mérhetjük, például:

$$\text{Abszolút hiba, } h_N = \max |x(t) - x_N(t)|$$

### b. Konvergencia jellege és sebessége:

$\lim_{N \rightarrow \infty} H_N = 0$ , az előbbieken bevezetett négyzetes középhiba, minden periodikus jel esetén tart nullához.

Az abszolút hiba azonban csak folytonos periodikus jelek esetén tart nullához, azaz  $\lim_{N \rightarrow \infty} h_N = 0 \Leftrightarrow x(t) \in C[a, b]$  és  $\exists T, \forall t \text{-re, } x(t - T) = x(t)$ .

Ha  $x(t)$   $m$ -szer folytonosan deriválható, akkor  $\hat{X}_k = O\left(\frac{1}{k^{m+2}}\right)$ , azaz  $\frac{1}{k^{m+2}}$  rendben tartanak az együtthatók nullához, tehát

$$\lim_{N \rightarrow \infty} k^{m+1} \hat{X}_k = 0$$

Pár esetet megvizsgálva:

$$m = 0 \text{ (pl.: háromszögjel)} \rightarrow \hat{X}_k = \frac{1 - (-1)^k}{k^2 \pi^2} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$m = -1 \text{ (pl.: négyszögjel)} \rightarrow \hat{X}_k = \frac{1 - (-1)^k}{jk\pi} = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$m = -2 \text{ (pl.: } T\text{-ként periodikus } \delta(t) \rightarrow \delta(t - nT)) \rightarrow \hat{X}_k = O(1)$$



### 3. Dirichlet-féle középértéktétel és Gibbs-effektus:

Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik szakadással rendelkező jelek Fourier-sora és Fourier-polinomja.

Tegyük fel, hogy  $x(t)$ -nek véges (elsőfajú) szakadása van  $t_1$ -ben, tehát

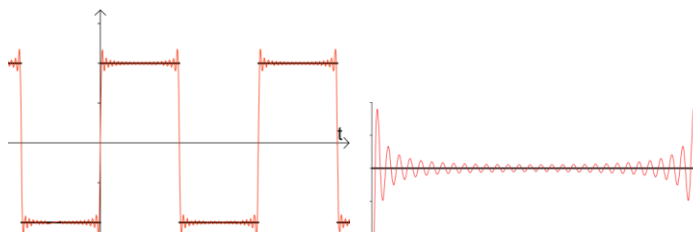
$$x(t_1 - 0) \neq x(t_1 + 0); x(t_1 - 0), x(t_1 + 0) \in \mathbb{R}$$

Dirichlet középértéktétele szerint ekkor a Fourier-sor a szakadási helyen felveszi a kétoldali határértékek számtani közepét.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t_1) = \frac{x(t_1 - 0) + x(t_1 + 0)}{2}$$

Fourier-polinomos közelítésben az elsőfajú szakadási helyeken túllövés, Gibbs-effektus lép fel, melynek mértéke a következő szerint közelíthető:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |x(t_1 \pm 0) - x_N(t_1 \pm 0)| \cong 0.089 \cdot |x(t_1 + 0) - x(t_1 - 0)|$$



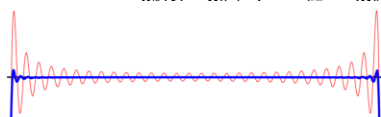
szakadással rendelkező jel Fourier-polinomja

a túllövés kinagyítvva

#### Kiegészítő tananyag

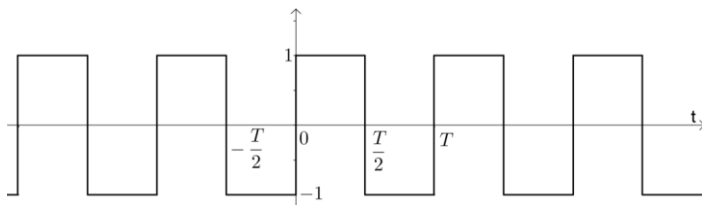
A túllövés mértéke csökkenthető Lánosz Kornél módszerével:

$$x_N(t) = X_0 + \sum_{k=1}^N \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)}{\frac{k\pi}{N+1}} [X_0^A \cos(k\omega_0 t) + X_k^B \sin(k\omega_0 t)]$$



a túllövés Lánosz-féle  $\sigma$  közelítéssel

Példa: Fejtsük sorba az 50%-os kitöltési tényezőjű, 0 középvértékű négyszögjelet:



50%-os kitöltési tényezőjű, 0 középvértékű négyszögjel

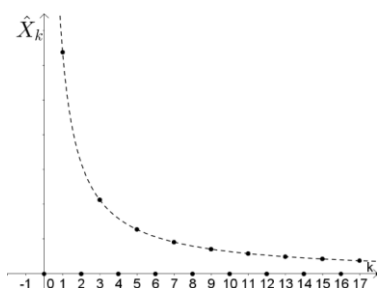
$$X_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \left( \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-1) dt \right) = 0$$

Ami természetesen a szimmetriából következik, és ránézésre is megmondható.

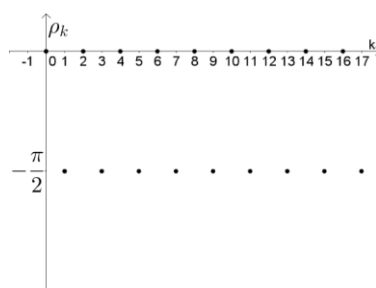
Komplex alakot használva:  $X_k^C = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt,$

$$\begin{aligned} X_k^C &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-jk\omega_0 t} dt - \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \frac{e^{-jk\pi} - 1 - e^{-jk2\pi} + e^{-jk\pi}}{-jk\omega_0} = \\ &= \frac{1 - \cos k\pi}{jk\pi} = \frac{1 - (-1)^k}{jk\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_k^C &= \begin{cases} 0, k = 2n \\ -\frac{2j}{k\pi}, k = 2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \hat{X}_k &= \begin{cases} 0, k = 2n \\ \frac{4}{k\pi}, k = 2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \rho_k &= \begin{cases} 0, k = 2n \\ -\frac{\pi}{2}, k = 2n+1, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned} \quad x(t) = 0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \frac{\sin[(2k+1)\omega_0 t]}{\cos[(2k+1)\omega_0 t - \frac{\pi}{2}]}$$



Fourier-együtthatók



Fázisszögek

4. Parseval-tétele:

$$\text{Ha } x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) \text{ és } y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \cos(k\omega_0 t + \beta_k)$$

$$\text{akkor: } \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t)dt = X_0 Y_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \hat{Y}_k \cos(\alpha_k - \beta_k)$$

Kiegészítő tananyag

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} x(t)y(t) &= X_0 Y_0 + X_0 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \cos(k\omega_0 t + \beta_k) + Y_0 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \hat{X}_k \hat{Y}_l \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) \cos(l\omega_0 t + \beta_l) \\ \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t)dt &= \frac{1}{T} \int_0^T X_0 Y_0 dt + \frac{1}{T} \int_0^T X_0 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \cos(k\omega_0 t + \beta_k) dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T Y_0 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \hat{X}_k \hat{Y}_l \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) \cos(l\omega_0 t + \beta_l) dt \end{aligned}$$

Szükségünk lesz az egyes integrálok értékére, melyeket levezetünk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T X_0 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \cos(k\omega_0 t + \beta_k) dt &= \frac{X_0}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \int_0^T \cos(k\omega_0 t + \beta_k) dt = \\ &= \frac{X_0}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \frac{[\sin(2k\pi + \beta_k) - \sin \beta_k]}{k\omega_0} = 0 \\ \frac{1}{T} \int_0^T Y_0 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) dt &= 0 \text{ az előző alapján} \\ \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \hat{X}_k \hat{Y}_l \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) \cos(l\omega_0 t + \beta_l) dt &= \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^T \hat{X}_k \hat{Y}_l \cos(k\omega_0 t + \alpha_k) \cos(l\omega_0 t + \beta_l) dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^T \hat{X}_k \hat{Y}_l \frac{\cos((k-l)\omega_0 t + \alpha_k - \beta_l) + \cos((k+l)\omega_0 t + \alpha_k + \beta_l)}{2} dt = \\ &= \left\{ \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^T \hat{X}_k \hat{Y}_l \frac{\cos(\alpha_k - \beta_l) + \cos(2k\omega_0 t + \alpha_k + \beta_l)}{2} dt, \text{ ha } k = l \right. \\ &\quad \left. \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \hat{X}_k \hat{Y}_l \frac{\sin[\alpha_k - \beta_l + 2\pi(k-l)] - \sin[\alpha_k - \beta_l]}{k-l} + \frac{\sin[\alpha_k + \beta_l + 2\pi(k-l)] - \sin[\alpha_k + \beta_l]}{k+l}}{2T\omega_0} = 0 \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} T \hat{X}_k \hat{Y}_k \frac{\cos(\alpha_k - \beta_k)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \hat{Y}_k \cos(\alpha_k - \beta_k) \end{aligned}$$

a. Felhasználásai:

A jel effektív értéke kifejezhető harmonikus összetevőinek effektív értékével:

Legyen  $y(t) = x(t)$ , ekkor Parseval-tétel alapján:

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = X_{eff}^2 = X_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k^2 = X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\hat{X}_k}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$X_{eff} = \sqrt{X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\hat{X}_k}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (X_{eff}^{(k)})^2}$$

A jel effektív értékét közelíthetjük is ilyen módon:

$$X^{(0)}(t) = X_0 \rightarrow X_{eff}^{(0)} = X_0$$

$$X^{(n)}(t) = \hat{X}_n \cos(k\omega_0 t + \rho_n) \rightarrow X_{eff}^{(n)} = \frac{\hat{X}_n}{\sqrt{2}}$$

$$X_{eff} \cong X_{N,eff} := \sqrt{\sum_{k=0}^N (X_{eff}^{(k)})^2}$$

Példa: Határozzuk meg az  $R = 10\Omega$  ellenálláson folyó áram effektív értékét, ha feszültségének időfüggvénye:

$$u(t) = \left[ 80 + 120 \cos(\omega_0 t) + 40 \cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \right] V$$

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R} = \frac{\sqrt{80^2 + \left(\frac{120}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{40}{\sqrt{2}}\right)^2}}{10\Omega} = 12 A$$

Sorfejtés hibáját a már definiált kifejezéseken kívül becsülhetjük az effektív értékek segítségével is, az alábbi képlettel:

$$\varepsilon_N = \frac{X_{eff} - X_{N,eff}}{X_{eff}} \cdot 100\%$$

Háromszög jel esetén például, a 3-ad rendű közelítés hibája:

$$\varepsilon_3 \cong 0.015\%$$

Torzítási tényező (THD-total harmonic distortion, klirrfaktor):

$$THD_x (= k_x) = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} (X_{eff}^{(k)})^2}}{X_{eff}^{(1)}} = \frac{\sqrt{X_{eff}^2 - (X_{eff}^{(1)})^2 - (X_{eff}^{(0)})^2}}{X_{eff}^{(1)}}$$

Klirrfaktort gyakran úgy definiálják, hogy az alapharmonikus effektív értéke helyett a jel effektív értéke szerepel a nevezőben.

Nemlineáris elemek esetén, periodikus, de nem szinuszos jelek felharmonikusainak teljesítményét viszonyítja az alapharmonikus vagy a teljes jel teljesítményéhez.

## 5. Sorfejtés numerikus módszerrel:

## a. FFT (Fast Fourier Transformation):

Vegyünk a jelből  $L$  darab mintát, ezeket tekinthetjük egy  $L$  dimenziós vektor koordinátáinak. Mivel a jel komplex értékű is lehet, ezért legyen  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  két  $L$  dimenziós komplex koordinátájú vektor ( $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{C}^L$ ). Ekkor  $\underline{b}$ -t, mint  $\underline{a}$  gyors Fourier-transzformáltját, a következő képpen kapjuk:

$$\underline{b} = FFT(\underline{a}) \rightarrow \underline{b}_{k+1} = \sum_{m=0}^{L-1} \underline{a}_{m+1} e^{-jkm\frac{2\pi}{L}}, k = 0, \dots, L-1$$

Tehát  $\underline{b}$  ( $k+1$ ). koordinátája kifejezhető  $\underline{a}$ -ból a fenti kifejezés alapján. Az algoritmus hatékony, ha  $L = 2^n$ . A MATLAB utasítás:  $y=fft(x)$ .

Jól látható, hogy az FFT algoritmus egy lineáris transzformáció, mátrixa:

$$\underline{FFT} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{L}} & \dots & e^{-j(L-1)\frac{2\pi}{L}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j(L-1)\frac{2\pi}{L}} & \dots & e^{-j(L-1)^2\frac{2\pi}{L}} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebből } \underline{b} = \underline{FFT} \cdot \underline{a}.$$

Ha el akarjuk végezni a mátrixszorzást, az  $L^2$  darab szorzást és  $L(L-1)$  összeadást eredményez. Csökkenthetjük a műveletek számát, ha közelebből megvizsgáljuk a koordinátákat. A művelet végrehajtásának ideje  $O(L^2)$ -ről  $O(L \cdot \log_2 L)$ -re csökkenthető. Legyen  $L = 2^n$  és definiáljuk a  $p(x) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i x^i$  polinomot. Ezen polinom előáll, mint  $p(x) = (a_0 + a_2 x^2 + \dots) + x(a_1 + a_3 x^2 + \dots) = p_e(x^2) + x p_o(x^2)$ .

$$\text{Legyen } \omega_L = e^{-j\frac{2\pi}{L}}, \text{ ekkor } \begin{cases} b_i = p_e(\omega_N^{2i}) + \omega_N^i p_o(\omega_N^{2i}) \\ b_{\frac{L}{2}+i} = (b_i)^* \end{cases}, i = 0, \dots, \frac{L}{2} - 1.$$

Ezt a módszert Danielson-Lánczos algoritmusnak nevezik, mellyel elég csak a  $b_i$ -k felét kiszámolni, mivel a többi már konjugált párként adódik.

## b. Fourier-sorfejtés:

Bontsuk fel a periodikus időfüggvény egy  $T$  periódusát  $L$  darab apró  $\Delta t$  egységekre. Ekkor:

$$T = L \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{T}{L}$$

Közelítsük a komplex alakú Fourier-együtthatót a következő módon, használva az előző egyenlőségeket:

$$X_k^C = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \cong \frac{1}{L \cdot \Delta t} \sum_{i=0}^{L-1} x(i \cdot \Delta t) e^{-jk\frac{2\pi}{L} i \Delta t} = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{x\left(i \cdot \frac{T}{L}\right) e^{-j\frac{2k\pi}{L} i}}{L}$$

Ha az előző pontból  $\underline{a}_{i+1} = x(i \cdot \Delta t)$ , és  $\underline{b}$ -t  $\frac{FFT(\underline{a})}{L}$  alakban definiáljuk, akkor  $X_k^C = \underline{b}_{k+1}$ ,  $k = 0, \dots, L-1$ . Valójában elég az algoritmusnak csak  $k \cong \frac{L}{2}$ -ig futnia, mivel  $b_{L-k} = (b_k)^*$

### III. Lineáris invariáns rendszer gerjesztés-válasz kapcsolata periodikus állandósult állapotban

#### 1. Válaszjel számítása:

Adott frekvenciájú gerjesztés esetén a linearitásból következően a válasz is ugyanolyan frekvenciájú periódikus jel. Matematikailag:

$$\begin{array}{c} FI, LI \\ x(t) \xrightarrow{H(j\omega)} y(t) \end{array} \quad x(t+T) = x(t), \forall t \xrightarrow{\text{linearitás}} y(t+T) = y(t), \forall t$$

Vegyünk egy tetszőleges periódikus gerjesztést, melyet közelítsünk a Fourier-polinomjával. Ekkor a válaszban csak ugyanolyan frekvenciájú tagok fordulhatnak elő. A gerjesztés-válasz kapcsolatot a következőképpen írhatjuk le.

A gerjesztés egyes felharmonikusainak feleltessünk meg egy-egy komplex értéket, így a komplex számítási módot alkalmazhatjuk. Minden frekvencián meghatározhatjuk a rendszer átviteli tényezőjét, mely szintén egy komplex érték. A válasz adott frekvenciájú összetevői a megfelelő komplex értékek szorzatából fejezhetők ki. Tehát matematikailag:

$$x(t) \cong X_0 + \sum_{k=1}^N \hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \rho_{x,k}) \rightarrow \bar{X}_k = \begin{cases} X_0, & k=0 \\ \hat{X}_k e^{j\rho_{x,k}}, & k \geq 1 \end{cases}$$

$$\bar{H}_k = H(j\omega)|_{\omega=k\omega_0} = H(jk\omega_0), \text{ ekkor}$$

$$\bar{Y}_k = \bar{H}_k \cdot \bar{X}_k \rightarrow \hat{Y}_k \cos(k\omega_0 t + \rho_{y,k})$$

$$\hat{Y}_k = |H(jk\omega_0)| \cdot \hat{X}_k$$

$$\rho_{y,k} = \rho_{x,k} + \arg(H(jk\omega_0))$$

Szuperpozíció elvét használva:

$$y(t) \cong Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \cos(k\omega_0 t + \rho_{y,k})$$

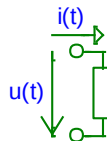
$$y(t) \cong X_0 \cdot H(j0) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k H(jk\omega_0) \cos[k\omega_0 t + (\rho_{x,k} + \arg(H(jk\omega_0)))]$$

#### 2. Lineáris kétpólus teljesítményei periodikus állapotban:

$$\forall t, u(t+T) = u(t) \leftrightarrow \forall t, i(t+T) = i(t)$$

a. Pillanatnyi teljesítmény:  $P(t) = u(t)i(t)$

b. Hatásos teljesítmény: Parseval tétel segítségével



$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{U}_k \hat{I}_k \cos(\alpha_k - \beta_k)$$

$\varphi_k, f_{\text{fáziszög}}$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} P_k, \text{ A teljesítmény nem minden esetben szuperponálható, de}$$

ebben az esetben, szinuszos állandósult állapotban igen.

Példa: Adja meg a kétpólus hatásos teljesítményét, ha az árama és feszültsége  $i(t) = \left[2 + 5 \sin(\omega t) + 2 \sin\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\right] A$  és

$$u(t) = \left[10 + 3 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 8 \sin(3\omega t)\right] V$$

Csak azon frekvenciájú tagok jönnek számításba, melyek mindkét időfüggvényben megjelennek, így se a kétszeres se a háromszoros frekvenciájú tagokhoz nem párosul hatásos teljesítmény. Tehát:

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{U}_k \hat{I}_k \cos(\alpha_k - \beta_k) = 2 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 16.25 W$$

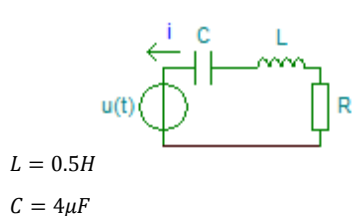
**Felhasználtuk, a fázisszög számításakor hogy  $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$**

Példa: Számítsa ki az  $i(t) = \left[4 \cos(\omega_0 t) + 3 \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{6}\right)\right] A$  áramú soros  $R$ - $L$  kétpólus ( $R = 10\Omega$ ,  $\omega_0 L = 4\Omega$ ) hatásos teljesítményét.

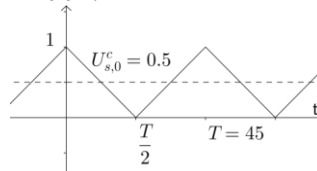
A soros  $RL$  kör egyetlen nem nonenergikus eleme az ellenállás, így a hatásos teljesítmény megegyezik az ellenállás által disszipált teljesítményével:

$$P_{RL} = P_R = R I_{eff}^2 = \frac{R}{2} (4^2 + 3^2) = 125 W$$

Példa: Tekintsük a következő hálózatot. Fejezzük ki a gerjesztés-válasz kapcsolatot a komplex számítási mód segítségével (Átviteli karakterisztika). Határozzuk meg a válasz közelítő értékét az ábrán látható gerjesztésre. Számoljuk ki a rendszer hatásos teljesítményét.



$$R = 10\Omega = 0.01k\Omega$$



A feladat megoldásához az állábi koherens egységrendszert használjuk:

$$\left[ k\Omega, mA, V, \mu F, H, ms, \frac{krad}{s}, mW \right]$$

Átviteli karakterisztika kifejezése:

$$\begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{FI, LI} y(t) \\ \boxed{H(j\omega)} \end{array} \quad \begin{array}{l} x(t) = u_s(t) \\ y(t) = i(t) \end{array}$$

Fenyvesi Róbert és Dudás Márton – Jelek és rendszerek 2.

$$H(j\omega) = \frac{\hat{i}}{\hat{u}} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{L} \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{j\omega R}{L} + \frac{1}{LC}} = 2 \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 0.02j\omega + 0.5}$$



Gerjesztés Fourier-sorfejtése:

Az ábráról leolvastva  $T = 45\text{ms}$ , tehát  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 0.14 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$

Szimmetria okokból  $U_{s,0}^C = 0.5$

$$\begin{aligned} U_{s,k}^C &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u_s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left( \frac{2}{T}t + 1 \right) e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \left( -\frac{2}{T}t + 1 \right) e^{-jk\omega_0 t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left( \left[ \frac{2t e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} - \int \frac{2e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} + \frac{T e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \right]_{-\frac{T}{2}}^0 + \left[ \frac{-2t e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} + \int \frac{2e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} + \frac{T e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \right]_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left( \left[ \frac{(2t+T)jk\omega_0 + 2}{k^2 T \omega_0^2} e^{-jk\omega_0 t} \right]_{-\frac{T}{2}}^0 + \left[ \frac{(-2t+T)jk\omega_0 - 2}{k^2 T \omega_0^2} e^{-jk\omega_0 t} \right]_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{Tjk\omega_0 + 2 - 2e^{-jk\pi} - 2e^{-jk\pi} - Tjk\omega_0 + 2}{k^2 T^2 \omega_0^2} = \frac{4 - (-4)^k}{k^2 4\pi^2} = \frac{1 - (-1)^k}{k^2 \pi^2} \end{aligned}$$

Hány tagot vegyünk figyelembe?

$$U_{s,eff} = \frac{1}{\sqrt{3}} V = 0.57735V$$

$$U_{s,k,eff} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{i=1}^k (U_{eff}^{(k)})^2} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{i=1}^k \frac{\hat{U}_k^2}{2}} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{i=1}^k 2|U_k^C|^2}$$

$$U_{s,3,eff} = 0.57718V, \varepsilon = 0.03\%$$

$$U_{s,5,eff} = 0.57733V, \varepsilon = 0.005\%$$

A gerjesztés közelítése mérnöki valós alakban a következő:

$$u_s(t) \cong 0.5 + \frac{4}{\pi^2} \left( \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{25} \cos(5\omega_0 t) \right)$$

Válaszjel számítása:

| $k$ | $\bar{U}_{s,k} = 2U_{s,k}^C$ | $\omega = k\omega_0$ | $\bar{H}_k = H(jk\omega_0)$ | $\bar{I}_k = \bar{H}_k \bar{U}_{s,k}$ |
|-----|------------------------------|----------------------|-----------------------------|---------------------------------------|
| 0   | 0.5                          | 0                    | 0                           | 0                                     |
| 1   | $\frac{4}{\pi^2}$            | 0.14                 | $0.5811e^{1.56j}$           | $0.2355e^{1.56j}$                     |
| 3   | $\frac{4}{9\pi^2}$           | 0.42                 | $2.5805e^{1.54j}$           | $0.1162e^{1.54j}$                     |
| 5   | $\frac{4}{25\pi^2}$          | 0.7                  | $74.0284e^{0.73j}$          | $1.2030e^{0.73j}$                     |
| 7   | $\frac{4}{49\pi^2}$          | 0.98                 | $4.2896e^{-1.57j}$          | $0.0355e^{-1.57j}$                    |

Az előző oldali táblázat utolsó oszlopában szereplő komplex értékeknek megfelelően az időfüggvényeket a válasz a következő formában adódik:

$$i(t) \cong 0.24 \cos(\omega_0 t + 1.56) + 0.12 \cos(3\omega_0 t + 1.54) + 1.2 \cos(5\omega_0 t + 0.73)$$

Vizsgáljuk meg a választ!  $k = 5$ -nél ( $\omega = 0.7 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$  körfrekvencián) kiugró értéket kapunk, mivel ez a frekvencia közel esik a rendszer rezonanciafrekvenciájához, így az átviteli tényező itt meglehetősen nagy. Az effektív érték alapján számolt hiba gyorsan csökken, mivel a Fourier-polinom effektív értékben gyorsan konvergál. Előfordulhat, hogy bár becslés alapján bizonyos frekvenciák elhagyhatóak, azonban a rendszer átviteli tulajdonságai miatt ez az elhanyagolás mégsem megengedhető.

Ábrázoljuk az  $|\bar{I}(j\omega)| - t$

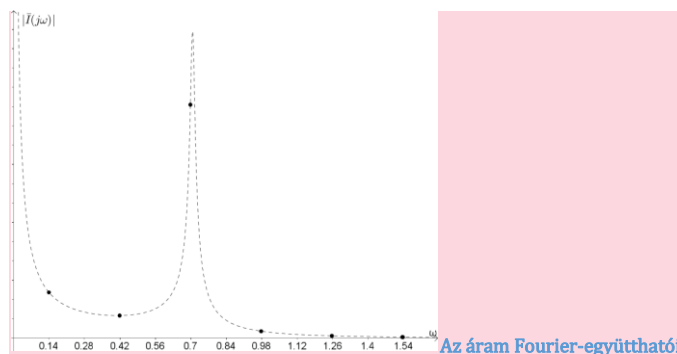
$$\bar{I}(j\omega) = \bar{H}(j\omega)\bar{U}(j\omega)$$

$$U(j\omega) = 2U_k^C \Big|_{k=\frac{\omega}{\omega_0}} \text{ helyettesítéssel kapjuk, mely nem pontos!}$$

$$\bar{I}(j\omega) = 2 \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 0.02j\omega + 0.5} \frac{4}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \pi^2}$$

$$|\bar{I}(j\omega)| = \frac{8}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \pi^2} \sqrt{\frac{\omega^2}{0.0004\omega^2 + (0.5 - \omega^2)^2}}$$

$$|\bar{I}(j\omega)| \text{ maximuma } \omega = 0.707 \frac{\text{krad}}{\text{s}} \text{-nál van}$$



Commented [MD1]:

Hatásos teljesítmény - Parseval tétel alapján

$$P_{RLC} \cong 0.5 \cdot 0 + \frac{1}{2} \frac{4}{\pi^2} \left[ 0.24^2 \cos^2 1.56 + \frac{0.12^2}{9} \cos^2 1.54 + \frac{1.2^2}{25} \cos^2 0.73 \right] = 0.00786 \text{ mW}$$

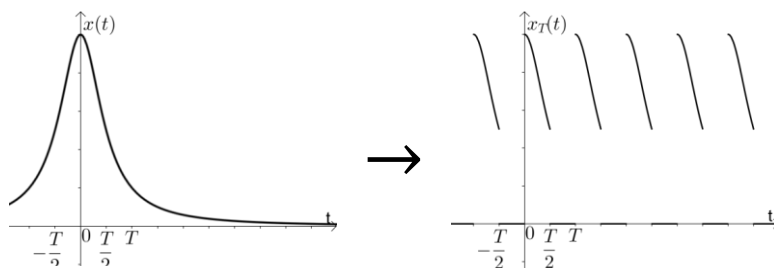
RLC kör egyetlen nem nonenergikus eleme az ellenállás, így a hatásos teljesítmény megegyezik az ellenállás által disszipált teljesítményével:

$$P_{RLC} = P_R = RI_{eff}^2 \cong \frac{R}{2} (0.24^2 + 0.12^2 + 1.2^2) = 0.00756 \text{ mW}$$

## 2. Jelek és rendszerek általános leírása a frekvenciatartományban

### I. Folytonos idejű jelek Fourier transzformációja

Periodikus jeleket már tudunk kezelni a Fourier-sorfejtéssel, azonban alkalmazásaink esetén előforduló jelek nem feltétlenül periodikusak. Az eddig megismert módszereket általánosítjuk a továbbiakban. Feleltessünk meg egy nem periodikus jelnek egy olyan periodikus jelet, mely egy fél periódusban az adott jel, egyébként zérus. Amennyiben a periódusidőt tart végtelenhez, előáll az eredeti függvény.



Nem periodikus jel periódikussá tétele

Tetszőleges, nem periodikus jel

$$x(t) \text{ nem periódikus jel, legyen } x_T(t) = \begin{cases} x\left(\left\{\frac{t}{T}\right\}\right), & kT \leq t \leq (2k+1)\frac{T}{2} \\ 0, & (2k+1)\frac{T}{2} \leq t \leq (k+1)T \end{cases}$$

$x_T(t)$  Fourier-sora:

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{T,k}^C e^{jk\omega_0 t}, \text{ ahol } X_{T,k}^C = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \text{ és } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Vezessük be a következő jelölést:  $X_T(jk\omega_0) := X_{T,k}^C \cdot T$ , ekkor

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X_T(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_T(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$\lim_{T \rightarrow \infty} \omega_0 = 0 (= d\omega)$ , infinitezimálisan kicsi

$\lim_{T \rightarrow \infty} k\omega_0 = \omega$ , folytonossá válik

$\lim_{T \rightarrow \infty} X_T(jk\omega_0) = X(j\omega)$ , ezen közelítések nem teljesen korrektek matematikailag

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_T(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Definiáljuk az előbb levezetett összefüggés értelmében, az Inverz Fourier transzformációt:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}}_{\text{Inverz Fourier transzformáció}}, \text{ ahol } X(j\omega) \text{ az } x(t) \text{ spektruma}$$

A Fourier transzformációt az inverz transzformáció segítségével definiáljuk. A spektrum meglétének elégséges, de nem szükséges feltétele a jel abszolút integrálhatósága, ekkor a spektrumot az alábbi képlettel számolhatjuk:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$  az  $x(t)$  jel spektruma, melynek abszolút értéke a jel amplitúdó spektruma és argumentuma a fázis spektrum.

$X(j\omega)$  - a spektrum

$K(\omega) = |X(j\omega)|$  - az amplitúdó spektrum

$\varphi(\omega) = \arg(X(j\omega))$  - a fázis spektrum

#### Kiegészítő tananyag

Lemmák:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(-(-j\omega)) e^{(-j\omega)t} d\omega = \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{X^*(-j\omega)\} \rightarrow \mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega) \end{aligned}$$

$x(t)$  valós  $\leftrightarrow X(j\omega) = X(-j\omega)^*$  (konjugált párok), ebből adódóan

$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$  - páros függvény és  
 $\arg(X(j\omega)) = -\arg(X(-j\omega))$  - páratlan függvény.

$x(t)$  páros és valós  $\leftrightarrow X(j\omega)$  tisztán valós

$x(t)$  páratlan és valós  $\leftrightarrow X(j\omega)$  tisztán képzetes

#### Kiegészítő tananyag

Bizonyítás:  $x(t)$  valós  $\rightarrow x(t) = x^*(t) \rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X^*(-j\omega)\}$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} - \mathcal{F}^{-1}\{X^*(-j\omega)\} = 0 \rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega) - X^*(-j\omega)\} = 0$$

$$X(j\omega) - X^*(-j\omega) = 0 \rightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x(-t), \text{ tehát } x(t) \text{ páros, akkor } X(j\omega) = X(-j\omega) \\ x(t) \text{ valós} &\rightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega) \end{aligned} \right\} X^*(j\omega) = X(j\omega) \rightarrow X(j\omega) \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= -x(-t), \text{ tehát } x(t) \text{ páratlan, akkor } X(j\omega) = -X(-j\omega) \\ x(t) \text{ valós} &\rightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega) \end{aligned} \right\} X^*(j\omega) = -X(j\omega) \rightarrow \operatorname{Re}\{X(j\omega)\}$$

$x(t)$  időkorlátos, ha adott időintervallumon kívül az értéke azonosan nulla,  
 tehát:  $x(t)$  időkorlátos  $\leftrightarrow \exists T: x(t) = 0, |t| > T$

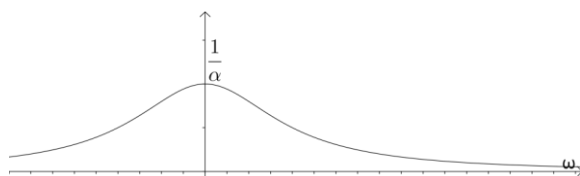
$x(t)$  sávkorlátos, ha adott frekvenciaintervallumon kívül a spektruma azonosan nulla, tehát:  $x(t)$  sávkorlátos  $\leftrightarrow \exists \Omega: X(j\omega) = 0, |\omega| > \Omega$

Példák:

$$1. \mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

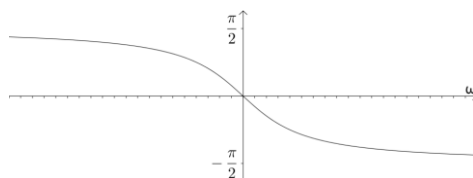
$$2. \mathcal{F}\{\varepsilon(t) e^{-\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \left[ \frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$



Amplitúdó karakterisztika

$$\arg(X(j\omega)) = \arg(1) - \arg(\alpha + j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$$



Fázis karakterisztika

$$3. x(t) = \text{sgn}(t) \rightarrow X(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

Kiegészítő tananyag

$$x(t) = \text{sgn}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{cases} -e^{-\frac{t}{N}}, & t < 0 \\ e^{\frac{t}{N}}, & t > 0 \end{cases}$$

$$X(j\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_{-\infty}^0 -e^{\frac{t}{N}} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{\frac{t}{N}} e^{-j\omega t} dt \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \left[ -\frac{e^{\frac{t}{N} - j\omega t}}{\frac{1}{N} - j\omega} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{e^{\frac{t}{N} - j\omega t}}{\frac{1}{N} - j\omega} \right]_0^{\infty} \right)$$

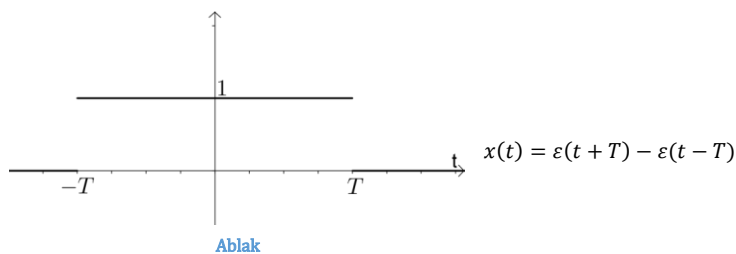
$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\frac{1}{N} - j\omega} + \frac{1}{\frac{1}{N} + j\omega} \right) = \frac{2}{j\omega}$$

4.  $x(t) = 1$ , nem abszolút integrálható, mégis létezik Fourier-transzformáltja.

Fenyvesi Róbert és Dudás Márton – Jelek és rendszerek 2.

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega), \text{ mert } x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega 0} = 1$$

5.

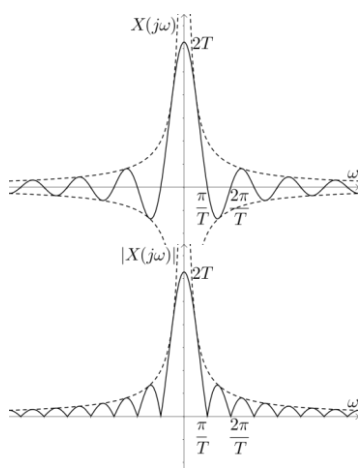


$$X(j\omega) = \int_{-T}^T 1e^{-j\omega t} dt = \left[ \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-T}^T = \frac{e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}}{-j\omega} = 2 \frac{\sin \omega T}{\omega} = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}$$

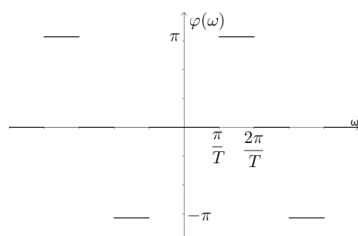
$$\text{Zérus helyei: } \omega T = k\pi \rightarrow \omega = \frac{k\pi}{T}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T} = 2T$$

$$\text{Burkoló: } 2T \frac{-1}{\omega T} \leq 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T} \leq 2T \frac{1}{\omega T} \rightarrow \text{a burkoló tehát a } \pm \frac{2}{\omega}$$



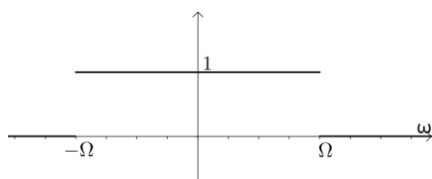
Spektrum és amplitúdó karakterisztika



Fázis karakterisztika

$$6. x(t) = \frac{\Omega \sin(\Omega t)}{\pi \Omega t}, \text{ ahol } \Omega \in \mathbb{R}$$

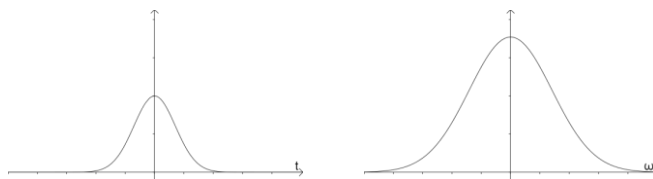
$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega \sin(\Omega t)}{\pi \Omega t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\Omega \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} e^{-j\omega t} dt \stackrel{\substack{\omega \\ t := -\omega \\ \omega = t}}{=} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} 2\Omega \frac{-\sin(\Omega \omega)}{-\Omega \omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\Omega \frac{\sin(\Omega \omega)}{\Omega \omega} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega - \Omega) \end{aligned}$$



Jól látható, hogy ha egy időfüggvény és egy spektrum jellegre hasonló, akkor az időfüggvény spektruma megegyezik a spektrumhoz tartozó időfüggvénnyel. Ez általánosan igaz:

$$\left. \frac{X(j\omega)}{2\pi} \right|_{\omega=t} = y(t) \rightarrow Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{\substack{\omega \\ t := -\omega \\ \omega = T}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega T} d\Omega = x(T)|_{T=\omega}$$

7. Gauss-görbe:  $x(t) = e^{-(\alpha t)^2} \rightarrow X(j\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2}$  a spektruma szintén Gauss-görbe



Gauss-görbe és spektruma

#### Kiegészítő tananyag

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha t)^2} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2(t^2 + j\frac{\omega}{\alpha^2}t)} dt \stackrel{\substack{\text{kitevő} \\ \text{teljes négyzetté} \\ \text{alakítása}}}{=} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2(t + j\frac{\omega}{2\alpha^2})^2} dt = \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty + j\frac{\omega}{2\alpha^2}}^{\infty + j\frac{\omega}{2\alpha^2}} e^{-u^2} du \stackrel{\substack{u := \alpha(t + j\frac{\omega}{2\alpha^2}) \\ dt = \frac{1}{\alpha} du}}{=} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2} \\ I &:= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \rightarrow I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} 2\pi = \pi \rightarrow I = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$



Fourier-transzformációra vonatkozó tételek:

- a.  $\mathcal{F}\{\}$  és  $\mathcal{F}^{-1}\{\}$  lineáris operátorok, mert öröklődik az integrálás linearitása.

$$\mathcal{F}\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\} = c_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + c_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

$$\text{Bizonyítás: } \mathcal{F}\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt = c_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + c_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

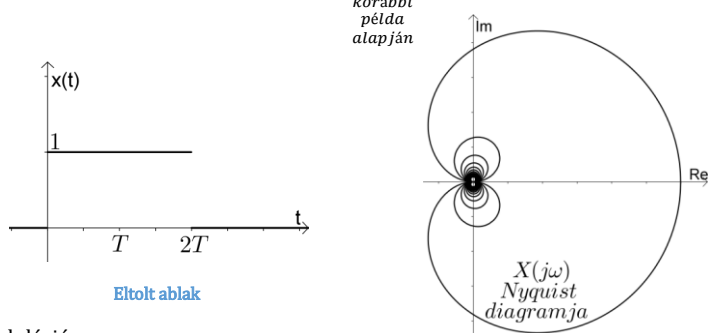
$$\text{Alkalmazás: } x(t) = \varepsilon(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(t)) \rightarrow X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

- b. Eltolási tétel:

$$\mathcal{F}\{x(t - T)\} = e^{-j\omega T} \mathcal{F}\{x(t)\}$$

$$\text{Bizonyítás: } \mathcal{F}\{x(t - T)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - T) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - T) e^{-j\omega(t - T)} dt = e^{-j\omega T} \mathcal{F}\{x(t)\}$$

$$\text{Alkalmazás: } x(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - 2T) \xrightarrow{\text{korábbi példa alapján}} X(j\omega) = e^{-j\omega T} 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}$$



- c. Moduláció:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} x(t)\} = X(j(\omega - \omega_0)), \text{ ha } \mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$$

$$\text{Bizonyítás: } \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = X(j(\omega - \omega_0))$$

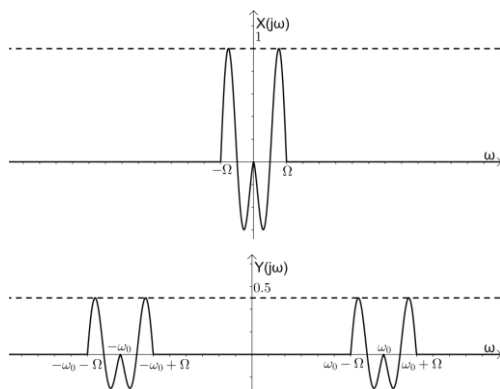
Amplitúdó moduláció (AM)

$$\begin{array}{c} \text{---} x(t) \text{---} \boxed{\phantom{y(t)}} \text{---} y(t) \text{---} \\ y(t) = \underbrace{x(t)}_{\text{modulált jel}} \underbrace{\cos(\hat{\omega}_0 t)}_{\substack{\text{vívő} \\ \text{frekvencia} \\ \text{vívő jel}}} \end{array}$$

$$y(t) = x(t) \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) = \frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}[X(j(\omega + \omega_0)) + X(j(\omega - \omega_0))]$$

Szemléltetés: tegyük fel, hogy  $x(t)$  sávkorlátozott,  $|\omega_0| > \Omega$

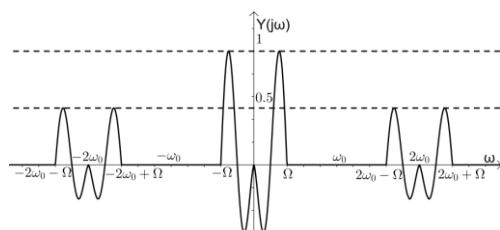


Eredeti és amplitúdómodulált jel spektruma

Demoduláció:

$$z(t) = y(t)2 \cos(\omega_0 t) = x(t)2 \cos^2(\omega_0 t) = x(t)(1 + \cos(2\omega_0 t))$$

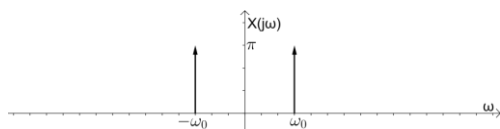
$$Y(j\omega) = X(j\omega) + \frac{1}{2}[X(j(\omega + 2\omega_0)) + X(j(\omega - 2\omega_0))]$$



Demodulált jel spektruma

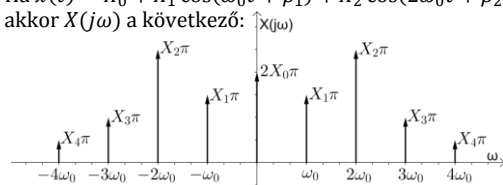
Alkalmazás: periodikus jel spektruma

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} = \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)$$



Koszinusz függvény vonalas spektruma

Ha  $x(t) = X_0 + X_1 \cos(\omega_0 t + \rho_1) + X_2 \cos(2\omega_0 t + \rho_2) + \dots$ ,  
akkor  $X(j\omega)$  a következő:



d. Deriválási-tétel:

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = j\omega \cdot \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt &\stackrel{\substack{\text{parciális} \\ \text{integrálással}}}{=} \underbrace{\left[ x(t) e^{-j\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{\substack{0, \text{ mivel } x(t) \\ \text{abszolút} \\ \text{integrálható}}} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{dt} e^{-j\omega t} dt = \\ &= j\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

e. Integrál-tétel:

$$\mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0) \delta(\omega)$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} &= \mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^{-\infty} x(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau \right\} \stackrel{\substack{\text{ld.:Konvolúció} \\ \text{tétel}}}{=} X(j\omega) \left( \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0) \delta(\omega) \end{aligned}$$

f. Skálázási-tétel:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

Bizonyítás:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j \frac{\omega}{a} (at)} d(at) = \frac{1}{a} X\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

g. Konvolúció tétel:

$$\mathcal{F}\{u(t) * v(t)\} = \mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) v(t - \tau) d\tau \right\} = U(j\omega) V(j\omega)$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{U(j\omega) V(j\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right\} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right\}}_{v(t-\tau)} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) v(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

h. Parseval tétele a jel energiájára vonatkozóan:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega, \text{ a jel teljes energiája}$$

$|X(j\omega)|^2$  kifejezést, a jel energia spektrumának nevezzük

#### Kiegészítő tananyag

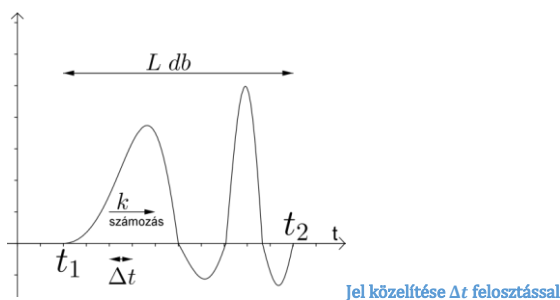
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right\} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y^*(j\omega) d\omega$$

$$\text{Legyen } y(t) = x(t) \rightarrow x(t)y^*(t) = |x(t)|^2, X(j\omega)Y^*(j\omega) = |X(j\omega)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Numerikus számítás:



Osszuk fel az időtartományt  $L$  darabra,  $\Delta t$  osztásonként

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$t_2 - t_1 = L \cdot \Delta t$$

$$X(jp\Delta\omega) \cong \sum_{k=0}^{L-1} x(t_1 + k\Delta t) e^{-jp\Delta\omega(t_1 + k\Delta t)} \Delta t =$$

$$= \Delta t e^{-jp\Delta\omega t_1} \underbrace{\sum_{k=0}^{L-1} x(t_1 + k\Delta t) e^{-jp\Delta\omega k\Delta t}}_{FFT?}$$

$$\text{FFT alkalmazható, ha } -jp\Delta\omega k\Delta t = -jpk \frac{2\pi}{L} \rightarrow \Delta\omega = \frac{2\pi}{L\Delta t} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{t_2 - t_1}}}$$

$\Delta\omega$  csak a jel időablakának kiszélesítésével csökkenthető, a mintavételezés számának növelésével nem

## II. Jelátvitel vizsgálata frekvenciatartományban

### 1. A válasz spektrális előállítás:

Tegyük fel, hogy a gerjesztés ( $u(t)$ ) abszolút integrálható, mert ekkor biztosan létezik Fourier-transzformáltja. Ekkor a gerjesztés a következő alakban áll elő:

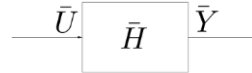
$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Tekintsünk egy infinitézimálisan kicsi frekvencia tartományt, melyben a gerjesztés a következő módon áll elő:

$$du = \underbrace{\frac{1}{2\pi} U(j\omega) d\omega}_{\text{komplex amplitudó}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{általános szinuszos}} = \bar{U} e^{j\omega t}$$

Ekkor a válasz a már megismert módon:

$$\bar{Y} = \bar{H} \cdot \bar{U}, \text{ ahol } \bar{H} = H(j\omega)|_{\omega \in \omega_0 \pm d\omega}$$



$$dy = \bar{Y} e^{j\omega t} = \bar{H} \cdot \bar{U} e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi} H(j\omega) U(j\omega) d\omega e^{j\omega t}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ \text{Valamint } y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} Y(j\omega) = H(j\omega) U(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)| = K(\omega) \cdot |U(j\omega)|, \text{ ahol } K(\omega) \text{ az erősítés}$$

$$\arg\{Y(j\omega)\} = \arg\{U(j\omega)\} + \varphi(\omega), \text{ ahol } \varphi(\omega) \text{ a fáziseltolás}$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega) \cdot \mathcal{F}\{u(t)\}\} = \mathcal{W}\{u(t)\}$$

$H(j\omega)$  formális definíciója:

$$H(j\omega) := \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

Ha  $U(j\omega) = 0$ , akkor  $\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$  nem nyújt információt, ebből adódóan egy rendszert érdemes olyan jellel vizsgálni, melynek spektruma sehol sem nulla (pl.:  $\delta(t)$ ).

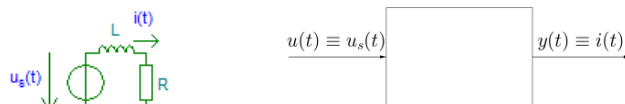
Impulzusválasz:

$$u(t) = \delta(t) \rightarrow U(j\omega) = 1$$

$$y(t) = h(t) \rightarrow \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega) \cdot U(j\omega)\}}_{y(t)} = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} \rightarrow \mathcal{F}\{h(t)\} = H(j\omega)$$

$$\text{Konvolúció tétel alapján: } y(t) = h(t) * u(t) \leftrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot U(j\omega)$$

Példa:



$$I(j\omega) = \frac{U_s(j\omega)}{R + j\omega L} \rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1}{L} \frac{1}{j\omega + \frac{R}{L}}$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)$$

## 2. Alakhű (torzításmentes) jelátvitel:

Torzításmentes jelátvitelt valósít meg egy rendszer, amennyiben a válasz és a gerjesztés között csak időbeni eltolás és/vagy egy konstanssal való szorzás áll fenn, azaz:  $y(t) = C \cdot u(t - t_0)$

Az egyenlet mindkét oldalát Fourier-transzformálva az alábbiakat kapjuk:

$$Y(j\omega) = C \cdot e^{-j\omega t_0} U(j\omega) \rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = C \cdot e^{-j\omega t_0}$$

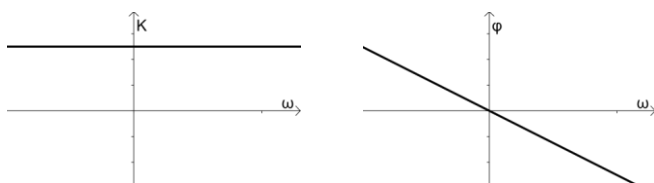
$$K(\omega) = C \text{ (konstans)}$$

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0 \text{ (lineáris)}$$

$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$ , futási idő karakterisztika, melyet úgy is elképzelhetünk, mint az a mennyiség mely megadja, hogy adott frekvenciájú jel mennyi időt tölt a rendszerben.

Torzításmentes jelátvitel esetén  $\varphi(\omega) = -\omega t_0$  fáziskarakteristikát követelünk meg, melyből  $\tau(\omega) = t_0 = \text{állandó}$  minden frekvencián.

„Mindent Áteresztő”, lineáris fázisú rendszer:



## 3. Közelítőleg alakhű jelátvitel:

Közelítőleg alakhű jelátvitelt valósíthatunk meg, ha a rendszer sávszélessége (ld.: később) legalább akkora, mint a gerjesztés sávszélessége, valamint a rendszer fázis karakterisztikája közel lineáris az adott tartományban.

4. A rendszer átviteli tulajdonságai:

- a. Áteresztő tartomány  $[\omega_a, \omega_b]$ , azon frekvenciatartomány, amelyen a rendszer amplitúdó karakterisztikája adott érték felett halad.

$$K_m := \max(K(\omega))$$

$$\frac{K_m}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \leq K(\omega) \leq K_m, \text{ ha } 0 \leq \omega_a \leq \omega \leq \omega_b, 0 < \varepsilon \leq 1$$

$$\text{Példa: } \varepsilon = 1 \rightarrow \frac{K_m}{\sqrt{2}} \leq K(\omega) \xrightarrow{20 \cdot \ln(\dots)} k_m - 3.0103 \text{ dB} \leq k(\omega)$$

- b. Záró tartomány  $[\omega_c, \omega_d]$ , azon frekvenciatartomány, amelyen belül a rendszer amplitúdó karakterisztikája adott érték alatt halad.

$$0 \leq K(\omega) \leq \eta K_m, \text{ ha } 0 \leq \omega_c \leq \omega \leq \omega_d, 0 < \eta \leq 1$$

$$\text{Példa: } \eta = 0.1 \rightarrow K(\omega) \leq 0.1 K_m \xrightarrow{20 \cdot \ln(\dots)} k(\omega) \leq k_m - 20 \text{ dB}$$

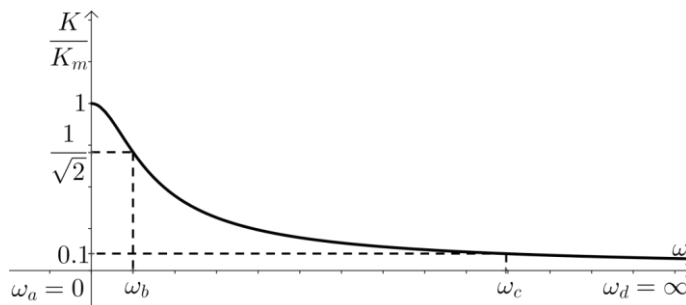
- c. Átmeneti tartomány:

Az előző két tartomány által le nem fedett frekvenciák.

- d. Sávszélesség:  $\Delta\omega_H = \omega_b - \omega_a$

- e. Példa:  $H(j\omega) = \frac{\frac{1}{L}}{j\omega + \frac{R}{L}} = \frac{A}{j\omega + \alpha}$ , legyen  $\varepsilon = 1, \eta = 0.1$ .

$$K(\omega) = \frac{A}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} \rightarrow K_m = K(0) = \frac{A}{\alpha}$$



Az újonnan bevezetett kifejezések szemléltetése

$$\text{Áteresztő tartomány } (\omega_b): K_m = \frac{A}{\alpha}, \frac{K_m}{\sqrt{2}} = \frac{A}{\sqrt{\omega_b^2 + \alpha^2}} \rightarrow \omega_b = \alpha$$

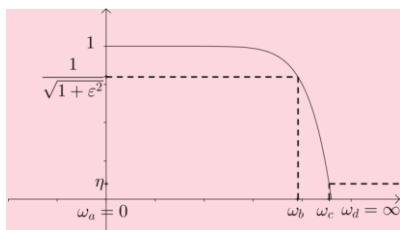
$$\text{Záró tartomány } (\omega_c): 0.1 K_m = \frac{A}{\sqrt{\omega_c^2 + \alpha^2}} \rightarrow \omega_c = \sqrt{99} \alpha \cong 10 \alpha$$

$$\Delta\omega_H = \omega_b - \omega_a = \alpha - 0 = \frac{R}{L}, \text{ aluláteresztő szűrő}$$

5. Szűrők tolerancia sémái:

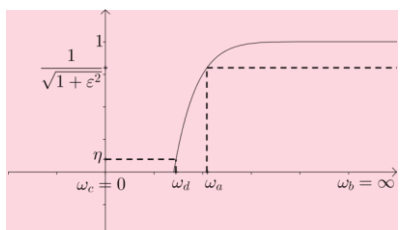
Adott szűrőtípust a paraméterei  $[\omega_a, \omega_b, \varepsilon, \omega_c, \omega_d, \eta]$  jellemeznek, nem pedig a görbe alakja!

a. Egy aluláteresztő szűrőt a  $[\omega_b, \varepsilon, \omega_c, \eta]$  paraméterek jellemeznek.



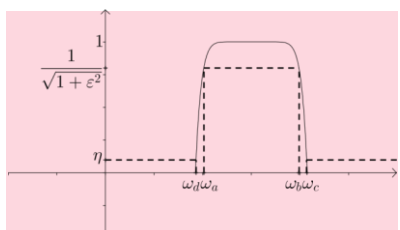
Ez a szűrő csak alacsony frekvenciákat enged át, a magasabbakat elnyomja.

b. Egy feluláteresztő szűrőt a  $[\omega_d, \eta, \omega_a, \varepsilon]$  paraméterek jellemeznek.



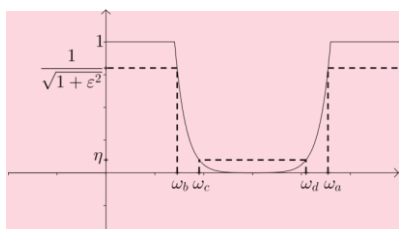
Ez a szűrő csak magas frekvenciákat enged át, az alacsonyabbakat elnyomja.

c. Egy sáváteresztő szűrőt a  $[\omega_a, \omega_b, \varepsilon, \omega_c, \omega_d, \eta]$  paraméterek jellemeznek.



Ez a szűrő csak adott frekvenciasávon áteresztő.

d. Egy sávzáró szűrőt a  $[\omega_a, \omega_b, \varepsilon, \omega_c, \omega_d, \eta]$  paraméterek jellemeznek.

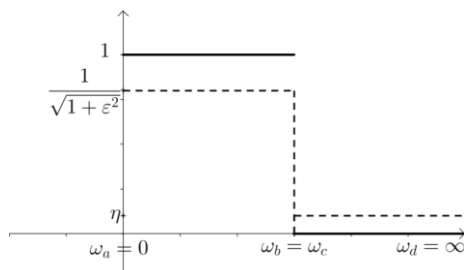


Ez a szűrő bizonyos frekvenciasávban nem enged át.

Commented [MD2]:



e. Ideális AlulÁteresztő (IAÁ):



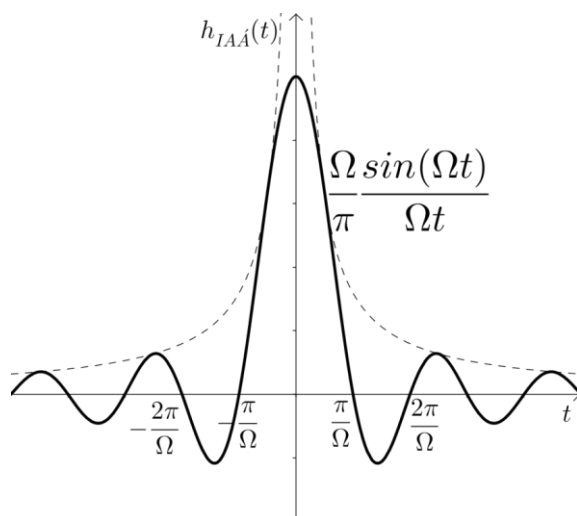
Nincs átmeneti tartomány,  $\omega_b = \omega_c = \Omega$ .

$\varphi(\omega) = 0$ , kézenfekvő egyszerűsítés, mivel így nem kell komplex értékekkel számolnunk.

$$H_{IA\ddot{A}}(j\omega) := \varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)$$

Inverz Fourier-transzformálva mindkét oldalt, az impulzusválasz adódik:

$$\begin{aligned} h_{IA\ddot{A}}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H_{IA\ddot{A}}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} 1 e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}}{jt} = \\ &= \frac{2j \sin \Omega t}{2\pi jt} = \frac{\Omega \sin(\Omega t)}{\pi \Omega t} \end{aligned}$$



Komoly probléma, hogy nem belépő az impulzusválasz, míg a gerjesztés ( $\delta(t)$ ) egyértelműen az, tehát a rendszer nem kauzális, így nem valósítható meg.

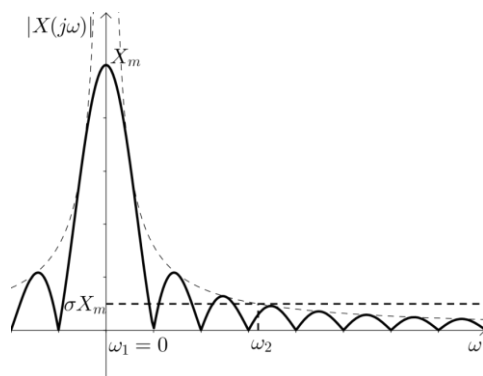
6. A jel sávszélessége  $[\omega_1, \omega_2], \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

A jel sávszélességét több módon is definiálhatjuk.

a. Amplitúdó spektrum alapján:

Jel sávszélessége az a frekvenciatartomány, amelyen belül a jel amplitúdó karakterisztikája megfelelően nagy.

$$|X(j\omega)| \leq \sigma X_m, X_m = \max(|X(j\omega)|), \omega \notin [\omega_1, \omega_2], \sigma \cong 0$$



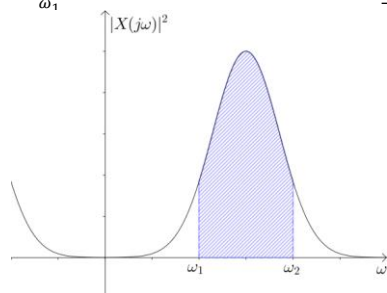
Hullámzó függvényeknél a számítást könnyítendő a burkolót vizsgálhatjuk!

b. Energiaspektrum alapján:

A jel sávszélessége az a frekvenciatartomány, amelyen kívül a jel energiája megfelelően kicsi. Ez a megadás viszont magában még nem egyértelmű, így szükségünk van plusz feltételekre, pl.:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \max_{\omega} |X(j\omega)|^2$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(j\omega)|^2 d\omega = \sigma E_x, \text{ ahol } E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega, \sigma \cong 1$$



c. Sávszélesség és jelszélesség kapcsolata

Sávkorlátozott jel soha nem időkorlátozott, és fordítva. Minden gyakorlati jel időkorlátozott, tehát biztos nem sávkorlátozottak.

A sávkorlát növelésével az időtartománybeli kiterjedés csökken és fordítva, szélsőséges eset a  $\delta(t)$ , vagy  $x(t) = 1$ .

## 3. Analízis a komplex frekvenciatartományban

### I. Laplace-transzformáció (1785, Heaviside(1880-1887))

A spektrum létezésének elégséges feltétele a jel abszolút integrálhatósága, azonban ez gyakran nem teljesül. Ha  $x(t)$  nem abszolút integrálható, akkor tegyük azzá egy exponenciálisan lecsengő függvénnyel való szorzás segítségével. Azonban léteznek olyan függvények, melyek még így sem tehetők abszolút integrálhatóvá (pl.:  $x(t) = e^{t^2}$ ).

$x(t) \rightarrow x(t)e^{-\sigma t}\varepsilon(t)$ , ahol  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  és „elég nagy” ahhoz, hogy az így kapott jelnek már biztosan létezzen spektruma, ekkor  $x(t)$ -t exponenciálisan korláatosnak nevezzük:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}\varepsilon(t)dt \in \mathbb{R}$$

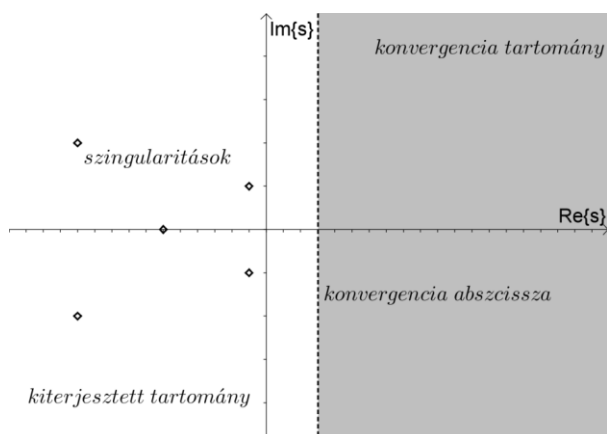
A szorzás ára, hogy a negatív tartományt el kell hagynunk, mivel itt az exponenciális szorzó végtelenbe tart. Definiálhatjuk úgy a transzformációt, hogy a negatív tartományra is korláatos legyen, de ezzel mi nem foglalkozunk. A negatív tartomány elhagyása számunkra általában nem jelent problémát, mivel belépő jelekkel dolgozunk.

Az így abszolút integrálhatóvá tett jelet Fourier-transzformáljuk:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} \text{ helyett } \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\varepsilon(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = X(\sigma + j\omega)$$

Legyen  $s = \sigma + j\omega$  komplex frekvencia, és  $\delta(t)$  figyelembe vételéhez tekintsük az integrált  $-0$  alsó határral, ekkor:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) := \int_{-0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$



A fenti integrál nem konvergens minden  $s$  értékre. A konvergenca az  $s$  valós részétől ( $\sigma$ -tól) függ. A legkisebb olyan  $\sigma$ -t melyre véges az integrál, konvergenca abszcisszának nevezzük.

Az analitikus kiterjesztés elve szerint,  $X(s)$  azonban formálisan értelmezhető minden  $s$  komplex értékre, a szingularitásokat kivéve.

Példák:

$$1. \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

$$2. \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{-0}^{\infty} = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s}$$

$$3. \mathcal{L}\{1\} = \int_{-0}^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{-0}^{\infty} = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s}$$

A nem belépő jelek Laplace-transzformáltja megegyezik a belépő változatukéval!

$$4. \mathcal{L}\{\varepsilon(t) e^{-at}\} = \int_{-0}^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \left[ \frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)} \right]_{-0}^{\infty} = \frac{1}{\alpha+s}$$

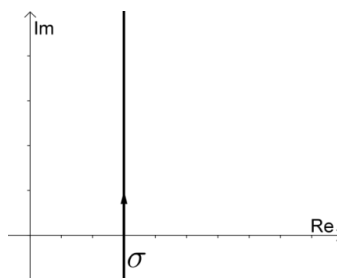
Mivel maga a Laplace-transzformáció a Fourier-transzformációra épül, ezért az inverz transzformációt is abból vezetjük le:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \varepsilon(t) x(t) e^{-\sigma t}, \text{ mindkét oldalt } e^{-\sigma t} - \text{vel osztva:}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega = \varepsilon(t) x(t), s := \sigma + j\omega \rightarrow d\omega = \frac{1}{j} ds$$

Helyettesítéses integrál esetén nem csak  $d\omega$ -t kell transzformálnunk, hanem az integrál határait is. Így jutunk el az úgynevezett Riemann-Mellin integrálhoz, mely egy komplex értékű egyenes menti integrál:

$$\varepsilon(t) x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$



Egyenes menti integrál

Az inverz transzformáció mindig a jel belépő változatát szolgáltatja!

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \begin{cases} x(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{x(t)\}\} = \varepsilon(t) x(t)$$

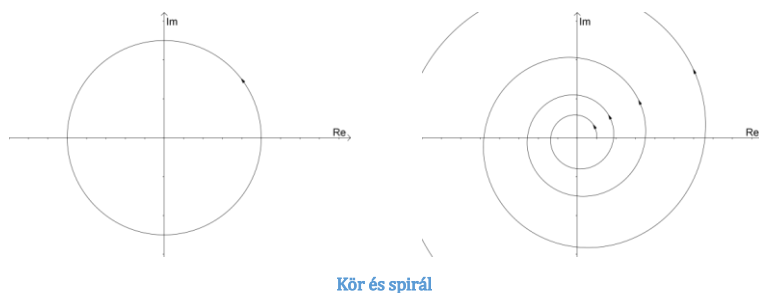
Az inverz Laplace-transzformációt a továbbiakban nem ezek alapján végezzük, mivel ennél egyszerűbb módszert ismertetünk racionális törtfüggvényekre.

A jel Fourier- és Laplace-transzformáltjának kapcsolata:

a. Értelmezés:

$$\text{Fourier: } dx = \frac{1}{2\pi} \underbrace{X(j\omega) d\omega}_{\text{komplex amplitudó}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{általános szinuszos}} \approx \text{felbontás szinuszra}$$

$$\text{Laplace: } dx = \frac{1}{2\pi j} X(s) ds \cdot \underbrace{e^{(\sigma+j\omega)t}}_{\text{exponenciális szinuszos}} \approx \text{felbontás csillapított szinuszra}$$



b. Átszámítás:

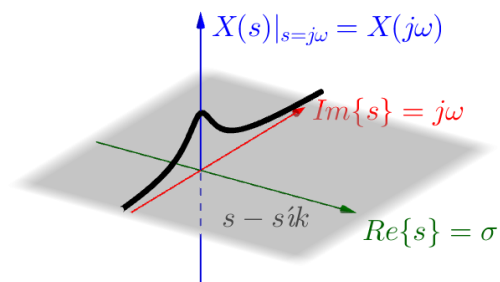
$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \text{ ha } x(t) \text{ abszolút integrálható}$$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \text{ ezek alapján}$$

$$X(j\omega) = X(s)|_{j\omega=s}, \text{ ha } x(t) \text{ belépő és abszolút integrálható}$$

$$\text{Ellenpélda: } x(t) = \varepsilon(t)$$

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s} \neq \mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$



Laplace-transzformációra vonatkozó tételek:

a.  $\mathcal{L}\{\}$  és  $\mathcal{L}^{-1}\{\}$  lineáris operátorok, mert öröklődik az integrálás linearitása.

b. Csillapítási-tétel:

$$\mathcal{L}\{x(t)e^{-\alpha t}\} = X(s + \alpha)$$

$$\text{Bizonyítás: } \mathcal{L}\{x(t)e^{-\alpha t}\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^{\infty} x(t)e^{-(s+\alpha)t}dt = X(s + \alpha)$$

Alkalmazás:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + j\omega_0} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2j} \frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{2j} \frac{1}{s + j\omega_0} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

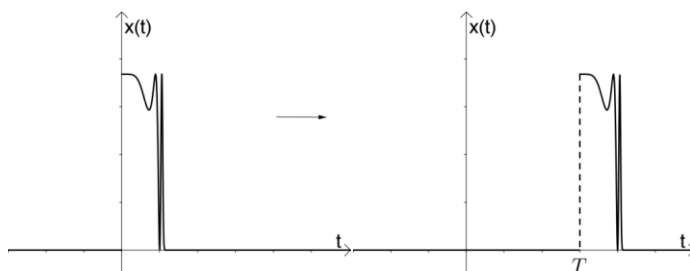
c. Eltolási tétel:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t - T)x(t - T)\} = X(s)e^{-sT}, T \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Bizonyítás: } \mathcal{L}\{\varepsilon(t - T)x(t - T)\} &= \int_0^{\infty} \varepsilon(t - T)x(t - T)e^{-st}dt = \\ &= e^{-sT} \int_0^{\infty} \varepsilon(t - T)x(t - T)e^{-s(t-T)}dt = e^{-sT} \int_T^{\infty} x(t - T)e^{-s(t-T)}dt = \\ &= e^{-sT} \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt = e^{-sT}X(s) \end{aligned}$$

**Nem belépő jelek eltolásának transzformáltja nem azonos belépő változatuk eltolójának transzformáltjával!**

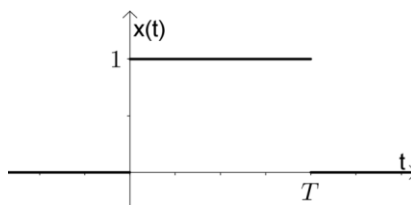
**Tehát:  $\mathcal{L}\{\varepsilon(t - T)x(t - T)\} \neq \mathcal{L}\{\varepsilon(t)x(t - T)\}$ .**



Példa:

$$x(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} = \\ &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \end{aligned}$$

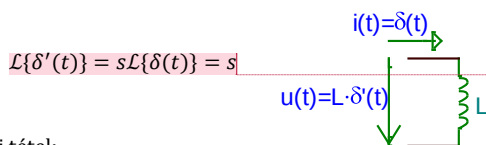


d. Deriválási tétel:

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - \underbrace{x(t=-0)}_{\text{kezdeti érték}}$$

$$\begin{aligned} \text{Bizonyítás: } \int_0^{\infty} x'(t)e^{-st} dt &\stackrel{\text{parciális integrálás}}{=} [x(t)e^{-st}]_{-0}^{\infty} - \int_{-0}^{\infty} x(t)(-s)e^{-st} dt = \\ &= 0 - x(-0) + s \underbrace{\int_{-0}^{\infty} x(t)e^{-st} dt}_{X(s)} = sX(s) - x(-0) \end{aligned}$$

Alkalmazás:



Commented [MD3]: Ezt töröljük inkább.

e. Integrálási tétel:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-0}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s)$$

$$\text{Bizonyítás: } \mathcal{L}\left\{\int_{-0}^t x(\tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-0}^{\infty} x(\tau)\varepsilon(t-\tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\{x(t) * \varepsilon(t)\} \stackrel{\text{ld.: Konvolúció tétel}}{=} \frac{1}{s}X(s)$$

Alkalmazás:

$$x(t) = t \cdot \varepsilon(t) \text{ - egység-sebességugrás}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-0}^t \varepsilon(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

f. Kezdeti- és végérték tételek:

$$\left. \begin{aligned} \text{Ha } x(+0) \in \mathbb{R} \rightarrow x(+0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s) \\ \text{Ha } \exists \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow x(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s) \end{aligned} \right\} \text{ellenőrzésre jól használható}$$

#### Kiegészítő tananyag

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{-0}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \int_{-0}^{+0} dx(t) + \underbrace{\int_{+0}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt}_{\rightarrow 0} \right) = \\ &= x(+0) - x(-0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s) - x(-0)] \rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(+0) \\ \lim_{s \rightarrow 0} \int_{-0}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt &= \int_{-0}^{\infty} dx(t) = x(\infty) - x(-0) = 0 = \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s) - x(-0)] \rightarrow \\ &\rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = x(\infty) \end{aligned}$$

g. Konvolúció-tétel:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-0}^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = F(s) \cdot G(s); \text{ ha } f(t), g(t) \text{ belépő}$$

$$\begin{aligned} \text{Bizonyítás: } \mathcal{L}^{-1}\{U(s)V(s)\} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} U(s)V(s)e^{st}ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \left\{ \int_{-0}^{\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau \right\} V(s)e^{st}ds = \int_{-0}^{\infty} u(\tau) \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} V(s)e^{s(t-\tau)}ds \right\}}_{v(t-\tau)\varepsilon(t-\tau)} d\tau = \\ &= \int_{-0}^t u(\tau)v(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

A Laplace-transzformációt továbbiakban jellemzően előre kifejezett formulák és a fenti tételek segítségével fogjuk számolni.

| Időfüggvény<br>$x(t)\varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ | Laplace-transzformált<br>$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ |
|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\varepsilon(t)$                                               | $\frac{1}{s}$                                         |
| $t\varepsilon(t)$                                              | $\frac{1}{s^2}$                                       |
| $t^n\varepsilon(t)$                                            | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                                  |
| $e^{\alpha t}\varepsilon(t)$                                   | $\frac{1}{s-\alpha}$                                  |
| $te^{\alpha t}\varepsilon(t)$                                  | $\frac{1}{(s-\alpha)^2}$                              |
| $t^n e^{\alpha t}\varepsilon(t)$                               | $\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$                         |
| $\sin(\omega t)\varepsilon(t)$                                 | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$                       |
| $t \sin(\omega t)\varepsilon(t)$                               | $\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$                |
| $\cos(\omega t)\varepsilon(t)$                                 | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$                            |
| $t \cos(\omega t)\varepsilon(t)$                               | $\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$           |
| $x(t)e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$                              | $X(s + \alpha)$                                       |
| $\varepsilon(t - T)x(t - T)$                                   | $X(s)e^{-sT}$                                         |
| $x'(t)$                                                        | $sX(s) - x(t = -0)$                                   |
| $\int_{-0}^t x(\tau)d\tau$                                     | $\frac{1}{s}X(s)$                                     |
| $f * g$                                                        | $F(s) \cdot G(s)$                                     |



## II. A transzformáció „megfordítása”

Az számunkra fontos jelek Laplace-transzformáltjai jellemzően törtalakúak, ebből adódóan rendszerint racionális törtfüggvényeket kell visszaalakítanunk, melyek tartalmazhatnak exponenciális szorzót, de ez csak egy időbeni eltolást jelent. Racionális törtfüggvényekről tudjuk, hogy parciális törtekre bonthatóak. Ez és a táblázat a kulcsa a transzformáció hatékony használatának. A részlettörtekre bontásnak számtalan módja van, melyekből párat ismertetünk.

Részlettörtekre bontás szabályai:

Racionális törtfüggvény esetén a számláló fokszáma legfeljebb akkora, mint a nevezőé. Amennyiben a fokszámuk megegyezik, első dolgunk egy konstans tag kihozása, mely megegyezik  $\lim_{s \rightarrow \infty} X(s)$  határértékkel. A konstans az alábbi példában látható módon is megkapható:

$$\text{pl.: } X(s) = \frac{2s}{s+1} = \frac{2(s+1)-2}{s+1} = 2 - \frac{2}{s+1}$$

Második lépésként a nevezőt bontsuk szorzó tényezőire, ezeket három csoportba sorolhatjuk gyökeik szerint.

Valós egyszeres gyökök esetén:

$$X(s) = \frac{P(s)}{\prod_i (s - p_i)} = \sum_i \frac{C_i}{s - p_i}, \text{ ahol } C_i \text{ konstans és } p_i \text{ az } i. \text{ gyök}$$

$$\text{pl.: } X(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+2}$$

Valós többszörös gyökök esetén:

$$X(s) = \frac{P(s)}{\prod_i (s - p_i)^{n_i}} = \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{i,j}}{(s - p_i)^j}$$

$$\text{pl.: } X(s) = \frac{2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)} =$$

$$= \frac{C_{1,1}}{s+1} + \frac{C_{1,2}}{(s+1)^2} + \frac{C_{2,1}}{s+2}$$

Konjugált komplex gyök pár esetén:

Csak másodfokú esetekre hagyatkozunk, mivel nem fordul elő ennél magasabb fokú eset tanulmányink során valószínűleg, valamint minden polinom kifejezhető első és másodfokú tényezők szorzataként.

$$X(s) = \frac{P(s)}{\prod_j (s - q_j) \prod_i (s - \bar{p}_i)(s - \bar{p}_i^*)} = \sum_j \frac{C_j}{s - q_j} + \sum_i \frac{A_i + B_i s}{(s - \bar{p}_i)(s - \bar{p}_i^*)}$$

$$\text{pl.: } X(s) = \frac{3}{s^3 - 2s + 4} = \frac{3}{(s^2 - 2s + 2)(s + 2)} =$$

$$= \frac{C_1}{s+2} + \frac{A_1 + B_1 s}{(s - (1+j))(s - (1-j))}$$

A részlettörtekre bontás során meghatározandó konstansok számítására több módszert ismertettünk a következő példán szemléltetve

$$X(s) = \frac{1.5s^2 + 6s + 6}{s^2 + 5s + 4} = \frac{1.5s^2 + 6s + 6}{s^2 + 5s + 4} = \frac{1.5s^2 + 6s + 6}{(s+1)(s+4)} = K + \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+4}$$

a. Visszafelé, közös nevezőre hozás segítségével:

$$X(s) = \frac{K(s+1)(s+4) + C_1(s+4) + C_2(s+1)}{(s+1)(s+4)} = \frac{1.5s^2 + 6s + 6}{(s+1)(s+4)}$$

Az azonos kitevőjű tagok együtthatóinak meg kell egyeznie az egyenlet két oldalán, így beszorzás után a két számláló egyenlőségére a következő feltételek adódnak:

$$Ks^2 = 1.5s^2$$

$$5Ks + C_1s + C_2s = 6s$$

$$4K + 4C_1 + C_2 = 6$$

Az egyenletrendszer megoldva adódnak az alábbi értékek:

$$K = 1.5, C_1 = 0.5, C_2 = -2$$

A részlettörtek ezek szerint a következők:

$$X(s) = \frac{1.5s^2 + 6s + 6}{s^2 + 5s + 4} = 1.5 + \frac{0.5}{s+1} + \frac{-2}{s+4}$$

A táblázat alapján az inverz transzformációt könnyen elvégezhetjük:

$$x(t) = 1.5\delta(t) + 0.5\varepsilon(t)e^{-t} - 2\varepsilon(t)e^{-4t}$$

b. „Letakarásos” módszer

Miután eljutottunk a nevező szorzótényezőkre bontásáig, ezután egyszeres gyökök esetén könnyen meghatározhatjuk  $C_i$ -t. A  $p_i$  gyökhöz tartozó  $C_i$  konstans úgy kapjuk meg, hogy a nevezőből  $(s - p_i)$ -t elhagyva kiszámoljuk tört értékét az  $s = p_i$  helyen.

Konjugált komplex gyökpár esetén a letakarásos módszer nem közvetlenül  $A_i$ -t és  $B_i$ -t adja meg, hanem egy konjugált párt, melyekből származtathatóak az előbbieket  $A_i = 2 \cdot \operatorname{Re}\{\bar{C}_i\}$  és  $B_i = 2 \cdot \operatorname{Re}\{\bar{C}_i \bar{p}_i^*\}$ .

Többszörös gyökök esetén ez az eljárás csak a legmagasabb kitevőjű részlettörthöz tartozó konstans ( $C_{i,n_i}$ ) meghatározására alkalmas, a többi tagot közös nevezőre hozással kell kiszámolnunk.

$$X(s) = \frac{1.5s^2 + 6s + 6}{s^2 + 5s + 4} = \frac{1.5s^2 + 6s + 6}{(s+1)(s+4)} = 1.5 + \frac{-1.5s}{(s+1)(s+4)} =$$

$$= K + \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{s+4}$$

$$C_1 = \left. \frac{-1.5s}{(s+4)} \right|_{s=-1} = 0.5$$

$$C_2 = \left. \frac{-1.5s}{(s+1)} \right|_{s=-4} = -2$$

Mintapélda:

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{6s^5 + 26s^4 + 19s^3 - 15s^2 + 66s + 100}{s^5 + 3s^4 - 2s^2 + 8s + 8} = \\
 &= 6 + \frac{8s^4 + 19s^3 - 3s^2 + 18s + 52}{s^5 + 3s^4 - 2s^2 + 8s + 8} = \\
 &= 6 + \frac{8s^4 + 19s^3 - 3s^2 + 18s + 52}{(s+1)(s+2)^2(s^2 - 2s + 2)} = \\
 &= 6 + \frac{C_{1,1}}{s+1} + \frac{C_{2,1}}{s+2} + \frac{C_{2,2}}{(s+2)^2} + \frac{A_1 + B_1s}{(s - (1+j))(s - (1-j))} = \\
 &= 6 + \frac{C_{1,1}}{s+1} + \frac{C_{2,1}}{s+2} + \frac{C_{2,2}}{(s+2)^2} + \frac{\bar{C}_1}{(s - (1+j))} + \frac{\bar{C}_2}{(s - (1-j))} =
 \end{aligned}$$

Letakarásos módszerrel  $C_{1,1}$ ,  $C_{2,2}$ ,  $A_1$  és  $B_1$  meghatározhatók:

$$\begin{aligned}
 C_{1,1} &= \left. \frac{8s^4 + 19s^3 - 3s^2 + 18s + 52}{(s+2)^2(s^2 - 2s + 2)} \right|_{s=-1} = 4 \\
 C_{2,2} &= \left. \frac{8s^4 + 19s^3 - 3s^2 + 18s + 52}{(s+1)(s^2 - 2s + 2)} \right|_{s=-2} = 2 \\
 \bar{C}_1 &= \left. \frac{8s^4 + 19s^3 - 3s^2 + 18s + 52}{(s+1)(s+2)^2(s - (1-j))} \right|_{s=1+j} = \frac{1}{2} - j = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \\
 \bar{C}_2 &= \left. \frac{8s^4 + 19s^3 - 3s^2 + 18s + 52}{(s+1)(s+2)^2(s - (1+j))} \right|_{s=1-j} = \frac{1}{2} + j = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

Észrevehető, hogy  $\bar{C}_2 = (\bar{C}_1)^*$ ,  $A_1 = 2 \cdot \text{Re}\{\bar{C}_1\} = 1$  és  $B_1 = 2 \cdot \text{Re}\{\bar{C}_1 \cdot p_1^*\} = 1$

$$\begin{aligned}
 X(s) &= 6 + \frac{4}{s+1} + \frac{C_{2,1}}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1+s}{(s - (1+j))(s - (1-j))} = \\
 &= 6 + \frac{40 + 4 \cdot C_{2,1} + \dots}{s^5 + 3s^4 - s^2 + 8s + 8}, \text{ a számláló egy tagját elég} \\
 &\text{kifejezni, a konstans a legegyszerűbb melyből már adódik:} \\
 C_{2,1} &= 3
 \end{aligned}$$

A táblázat alapján elvégezhetjük az inverz transzformációt. A konjugált komplex gyök párt kell kicsit átalakítani, hogy a csillapítási tételt használhassuk.

$$\begin{aligned}
 X(s) &= 6 + \frac{4}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1+s}{((s-1)-j)((s-1)+j)} = \\
 &= 6 + \frac{4}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1+s}{(s-1)^2 + 1} = \\
 &= 6 + \frac{4}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} + \frac{2}{(s-1)^2 + 1} \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$x(t) = (6 \cdot \delta(t) + 4e^{-t} + 3e^{-2t} + 2te^{-2t} + e^t \cos(t) + 2e^t \sin(t))\varepsilon(t)$$

c. Megjegyzések:

A fentebbi módszerre - valós gyökök esetén - gyakran Heaviside-féle kifejtési tételként hivatkozunk.

Komplex gyökök esetén más módszer is alkalmazható, mint amit a mintapéldában láttunk. A konjugált komplex gyökpárral rendelkező tag is felbontható két részlettörré, melyek számlálóját konjugált komplex párt alkot. A táblázat alapján ezek is visszaalakíthatóak exponenciális függvényre, melyek koszinusszá alakíthatóak.

Példa: A mintapélda komplex részére külön kitérve:

$$\frac{\bar{C}_1}{(s - (1 + j))} + \frac{\bar{C}_2}{(s - (1 - j))} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{j\pi}{4}}}{(s - (1 + j))} + \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} e^{\frac{j\pi}{4}}}{(s - (1 - j))}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} e^{1.07j} e^{(1+j)t} + \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-1.07j} e^{(1-j)t} = \frac{\sqrt{5}}{2} e^t (e^{(t+1.07j)} + e^{-(t+1.07j)}) =$$

$$= \sqrt{5} e^t \cos(t + 1.07)$$

A számítások MATLAB-bal, vagy Octave-val a következő módon végezhetőek:

```
>> [r,p,k]=residue([6 26 19 -15 66 100],[1 3 0 -2 8 8])
```

```
r=[4 3 2 0.5-i 0.5+i]
```

```
p=[1 -2 -2 1+i 1-i]
```

```
k=6
```

### III. Kirchhoff-típusú hálózatok analízise s-tartományban

1. Egy bemenetű egy kimenetű (SISO) rendszer állapotváltozós leírása transzformációval

Állapotváltozós leírás normál alakja:

$$\begin{aligned} \underline{x}'(t) &= \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}u(t) \\ y(t) &= \underline{C}^T \underline{x}(t) + Du(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{c} u(t) \\ \boxed{\underline{x}(t)} \\ y(t) \end{array}$$

Mindkét oldalt Laplace-transzformálva, a deriválási tétel segítségével a következő alakban írható fel:

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = \underline{A}\underline{X}(s) + \underline{B}U(s)$$

$$Y(s) = \underline{C}^T \underline{X}(s) + DU(s)$$

Ez a lineáris egyenletrendszer megoldható a következő módon:

$$(s\underline{E} - \underline{A})\underline{X}(s) = \underline{B}U(s) + \underline{x}(0)$$

$$\underline{X}(s) = (s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{B}U(s) + (s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{x}(0)$$

$$Y(s) = \left[ \underline{C}^T (s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + D \right] U(s) + \underline{C}^T (s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{x}(0)$$

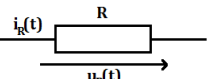
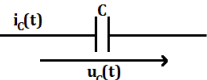
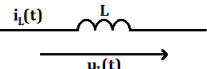
Ha a gerjesztés belépő, és kauzális rendszert vizsgálunk, akkor az  $\underline{x}(0) = 0$ , tehát elhagyhatjuk.

A választ inverz transzformációval kaphatjuk meg:

$$\varepsilon(t)y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

2. Hálózati elemek és összekapcsolási kényszerek s-tartományban

a. Karakterisztikák:

|                                                                                     |                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
|  | $u_R(t) = Ri_R(t) \rightarrow U_R(s) = RI_R(s)$              |
|  | $i_C(t) = Cu_C'(t) \rightarrow I_C(s) = C[sU_C(s) - u_C(0)]$ |
|  | $u_L(t) = Li_L'(t) \rightarrow U_L(s) = L[sI_L(s) - i_L(0)]$ |

Operátoros impedanciák kifejezése 0 kezdeti értékre:

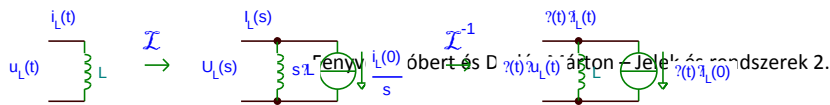
$$Z_R(s) = R$$

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

$$Z_L(s) = sL$$

A nullától különböző kezdeti értéket egy-egy forrással helyettesítjük!

$$\text{Tetszőleges kétpólusra } Z(s) := \frac{U(s)}{I(s)}$$



b. Energiamentes állapot:

Bekapcsolási folyamat esetén  $u_C(t=0) = 0, i_L(t=0) = 0$ , mellyel a karakterisztikák a következők:

$$U_R(s) = R I_R(s)$$

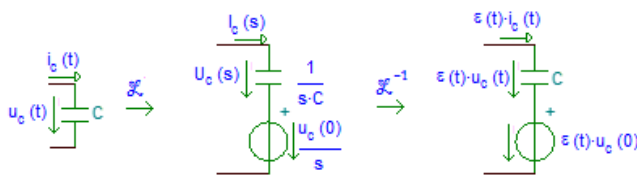
$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s)$$

$$U_L(s) = sL I_L(s)$$

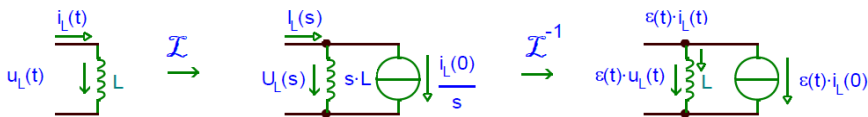
Az operátoros impedanciák ezekből adódnak.

c. Nem energiamentes állapot:

Át- és kikapcsolási folyamatok esetén, a dinamikus elemek energiát tárolnak, ekkor helyettesíthetők egy fiktív forrással és egy energiamentes elemmel. Amennyiben a kondenzátor feszültségét vagy a tekercs áramát kell meghatároznunk, a fiktív energiamentes elemek feszültségéhez vagy áramához a fiktív források hatása is hozzáadódik, tehát a helyettesítő kétpólus teljes feszültsége vagy árama ezek összegeként adódik.



$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{u_C(t=0)}{s}$$



$$I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{i_L(t=0)}{s}$$

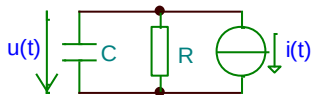
d. Kirchhoff-egyenletek s-tartományban:

A Kirchhoff-egyenletek alakja nem változik s-tartományban a Laplace-transzformáció linearitásából adódóan.

Csomóponti törvény:  $\sum_k i_k(t) = 0 \xrightarrow{L} \sum_k I_k(s) = 0$

Hurok törvény:  $\sum_k u_k(t) = 0 \xrightarrow{L} \sum_k U_k(s) = 0$

3. Példa:



a. Bekapcsolási folyamat vizsgálata:

Legyen a gerjesztés konstans belépő áram, határozzuk meg a kondenzátor feszültségének időfüggvényét Laplace-transzformáció segítségével.

$$i(t) = I_0 \varepsilon(t) \rightarrow I(s) = \frac{I_0}{s}$$

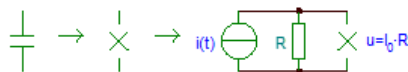
$$U(s) = \left( R \times \frac{1}{sC} \right) I(s) = \frac{I_0}{C} \frac{1}{s \left( s + \frac{1}{RC} \right)} = I_0 R \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right)$$

$$u(t) = \varepsilon(t) I_0 R \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

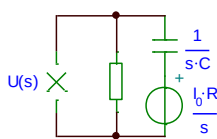
b. Kikapcsolási folyamat vizsgálata:

Legyen a gerjesztés  $i(t) = I_0(1 - \varepsilon(t)) = I_0 \varepsilon(-t)$ , határozzuk meg a kondenzátor feszültségének időfüggvényét Laplace-transzformáció segítségével.

$t < 0$  esetén a rendszer állandósult állapotban van, mivel a gerjesztés konstans a kondenzátort szakadással helyettesítjük. Meghatározhatjuk a rajta eső feszültséget:



$t > 0$  esetén használjuk a helyettesítést a nem energiamentes állapot miatt, ekkor a forrást dezaktivizálnunk kell, mert kikapcsoltuk:



$$\frac{U(s)}{R} + \frac{U(s) - \frac{I_0 R}{s}}{\frac{1}{sC}} = 0$$

$$U(s) = \frac{\frac{I_0 R}{s} sC}{\frac{1}{R} + sC} = \frac{I_0 R}{\frac{1}{RC} + s}$$

$$u(t) = I_0 R \cdot \varepsilon(t) e^{-\frac{t}{RC}}$$

A feladat megoldható a konstans gerjesztésre és a negatív egységugrásra adott válaszok szuperpozíciójával is.

#### IV. Átviteli függvény

1. Átviteli függvényről csak kauzális rendszer esetén beszélhetünk, mivel akauzális esetben a Laplace-transzformáció levágja az impulzusválasz negatív tartományát így nem helyesen íránk le a gerjesztés-válasz kapcsolatot.

Kauzális rendszer esetén az impulzusválasz,  $h(t)$  belépő, és így a Laplace-transzformáltja egyértelmű. Ezt nevezzük a rendszer átviteli függvényének:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

2. A gerjesztés-válasz kapcsolatot az impulzusválasz a konvolúció segítségével határozza meg, a Laplace-transzformáció konvolúció tételének értelmében, ha feltesszük hogy  $u(t)$  belépő, a következőt kapjuk:

$$y(t) = \int_{-0}^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau \rightarrow Y(s) = H(s)U(s), \text{ melyből}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\mathcal{L}\{u(t)\}\} = \mathcal{W}\{u(t)\}$$

Az átviteli függvény, mint a rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatának leírása, az  $Y(s) = H(s)U(s)$  képlet átrendezésével formálisan a következő módon definiálható:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

3. Átviteli függvény meghatározása az állapotváltozós leírásból:

A korábban levezetett egyenlet a következő:

$$Y(s) = \left[ \underline{C}^T \left( s\underline{E} - \underline{A} \right)^{-1} \underline{B} + D \right] U(s) + \underline{C}^T \left( s\underline{E} - \underline{A} \right)^{-1} \underline{x}(-0)$$

Mivel az impulzusválasz transzformáltját keressük, a gerjesztés  $u(t) = \delta(t)$ , melynek transzformáltja  $U(s) = 1$ . A kauzalitásból következően  $\underline{x}(t = -0) = 0$

Ekkor a következő összefüggés adódik az átviteli függvényre:

$$H(s) = \underline{C}^T \left( s\underline{E} - \underline{A} \right)^{-1} \underline{B} + D$$

4. Pólus-zérus reprezentáció:

Kauzális rendszerek esetén  $H(s)$  racionális törtfüggvény. Ahelyett, hogy a komplex értékű függvényt ábrázolnánk, a számunkra sokat mondó zérusokat és szingularitásokat jelenítjük meg a komplex számsíkon.

Legyen  $H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$ , ahol  $m \leq n$ , ekkor

$$H(s) = b_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

A  $z_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) értékeket zérusoknak nevezzük és körrel jelöljük, míg a  $p_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) értékeket a pólusok, melyeket x-szel jelölünk az ábrán.



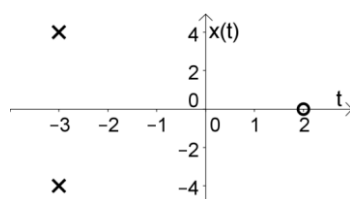
Példa:

$$H(s) := \frac{25s - 50}{s^2 + 6s + 25} = 25 \frac{s - 2}{[s - (-3 + 4j)][s - (-3 - 4j)]}$$

$$z_1 = 2$$

$$p_{1,2} = -3 \pm 4j$$

Ábrázolás:



Az ábrázoláshoz használhatjuk a MATLAB vagy Octave programokat:

```
pzmap([25 -50],[1 6 25]))
```

#### 6. Gerjesztés-választ stabilitás:

Szükséges és elégséges feltétel, hogy  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$   
 $\in \mathbb{R}$ , de a rendszer kauzalitásából

következik, hogy  $h(t)$  belépő emellett kihasználva, hogy  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ , a következő szükséges és elégséges feltétel kínálkozik:

$$\int_{-0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} dt \in \mathbb{R}$$

Mivel  $H(s)$  racionális törtfüggvény ezért a már megismert módon adódik, hogy:

$$h(t) = C_0 \delta(t) + \varepsilon(t) \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}$$

Az előbbi feltételbe ezt behelyettesítve kapjuk:

$$\int_{-0}^{\infty} C_i e^{p_i t} dt \in \mathbb{R}, \forall i$$

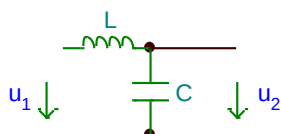
Mely pontosan akkor teljesül, ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{p_i t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha_i + j\beta_i)t} = 0, \forall i$ -re  
 ez akkor teljesül, ha  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{p_i t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\alpha_i t}| \cdot 1 = 0$ , tehát  $\alpha_i < 0$ .

A rendszer tehát gerjesztés-választ stabilis, ha pólusainak valós része negatív:  
 $\text{Re}\{p_i\} < 0, i = 1, \dots, n$ , azaz minden pólusa a bal félsíkra esik.

Stabilitási határhelyzetben van egy rendszer ha léteznek olyan pólusai, melyek valós része nulla és mindegyik egyszeres gyök.

Példa stabilitási határhelyzetre:

Tekintsük a következő ideális rezgőkört, melynek gerjesztése  $u_1$  válasza az  $u_2$  feszültség. Nyilvánvalóan kauzális, mivel fel van rajzolva, tehát létezik a rendszer átviteli függvénye. Határozzuk meg  $H(s)$ -t és nyilatkozzunk a gerjesztés-válasz stabilitásról.



$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2LC + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{\alpha^2}{s^2 + \alpha^2} = \frac{\alpha^2}{(s + j\alpha)(s - j\alpha)}$$

Jól látható, hogy a pólusok konjugált komplex párt alkotnak. Ha  $\alpha \neq 0$ , azaz  $L$  és  $C$  véges (valós esetben pozitívak), akkor egyszeres tisztán képzetes gyökök adódnak, tehát a rendszer stabilitási határhelyzetben van. A veszteségeket egyszerű matematikai koncepció alapján úgy modellezhetjük, hogy a pólusokat balra toljuk ekkor a hálózat bármilyen kicsi veszteség mellett valóban stabilissá válik.

#### 7. Redukált átviteli függvény:

Az átviteli függvény az állapotváltozós leírással ellentétben a rendszernek csak azon részét jellemzi mely a gerjesztés-válasz kapcsolatban szerepet játszik. Az átviteli függvény alapján az aszimptotikus stabilitás nem egyértelmű, mivel az az összes állapotváltozóra vonatkozik, és nem csak a gerjesztés-válasz kapcsolatban résztvevőkre. A pólusok a rendszer sajátértékeinek részhalmazát képezik.

Mindezt egy példán szemléltetve, tekintsük a következő állapotváltozós leírást és annak Laplace-transzformáltját:

$$\begin{aligned} x_1' &= -5x_1 - 6x_2 + u & sX_1 &= -5X_1 - 6X_2 + U \\ x_2' &= x_1 & \xrightarrow{L} sX_2 &= X_1 \\ y &= -8x_1 - 16x_2 + 2u & Y &= -8X_1 - 16X_2 + 2U \end{aligned}$$

Ebből adódik a válasz kifejezése és az átviteli függvény:

$$Y = \frac{2s^2 + 2s - 4}{s^2 + 5s + 6} U$$

$$H(s) = \frac{Y}{U} = 2 \frac{(s+2)(s-1)}{(s+3)(s+2)} = \frac{(s-1)}{(s+3)} = H'(s)$$

Az átviteli függvény zérusait és pólusait meghatározva jól látható, hogy leegyszerűsíthetnénk. Az elemek karakterisztikájának transzformálásával és közvetlenül a hálózati egyenletekkel számolva gyakran az egyszerűsített alakhoz jutunk. Az egyszerűsítés azonban nem végezhető el, ha a hálózat fizikai viselkedését (pl.: stabilitást) befolyásolja.

Jól látható, hogy a sajátértékek ( $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2$ ) részhalmazát képezik a pólusok ( $p_1 = -3$ ).

Mivel  $\{p_i | i = 1, \dots, n\} \subseteq \{\lambda_j | j = 1, \dots, N\}$ , ezért az aszimptotikus stabilitásból következik a gerjesztés-válasz stabilitás, fordítva azonban nem igaz!

## 4. Rendszerjellemező függvények

### I. Rendszertulajdonság (ismétlés)

1. Linearitás:

$$\mathcal{W}\{c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)\} = c_1 \mathcal{W}\{u_1(t)\} + c_2 \mathcal{W}\{u_2(t)\}$$

2. Időinvariancia:

$y(t) = \mathcal{W}\{u(t)\} \rightarrow \mathcal{W}\{u(t-T)\} = y(t-T), \forall T$ , azaz a gerjesztést tetszőleges  $T$  idővel eltolva a válasz ugyanezzel a  $T$  idővel tolódik el.

Ellenpélda: kapcsolót tartalmazó hálózat, melyben a  $t = 0$  időpillanatban átkapcsolunk. Számunkra általában azonban a szakaszonkénti időinvariancia is elegendő.

3. Kauzalitás:

$y(t_0) = \mathcal{W}\{\varepsilon(t_0 - t)u(t)\}, \forall t_0$ , azaz a választ a  $t_0$  időpillanatban csak a gerjesztés  $t_0$  időpillanat előtti értékei befolyásolják. Példaképpen, ha a rendszer lineáris, akkor  $u(t) = \varepsilon(t)u(t)$  esetén  $y(t) = \varepsilon(t)y(t)$ , tehát belépő gerjesztésre belépő választ kapunk.

4. Gerjesztés-válasz stabilitás:

$|u(t)| \in \mathbb{R}, \forall t \rightarrow |y(t)| \in \mathbb{R}, \forall t$ , azaz korlátos gerjesztésre a válasz is az.

### II. A három „h”

1. Impulzusválasz -  $h(t)$ :

Lineáris, invariáns (LI) rendszerekre szorítkozunk, hogy a konvolúciót használhassuk, mely megteremti a kapcsolatot a gerjesztés és a válasz között.

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

A kauzalitás feltétele az impulzusválasz belépő volta, míg a gerjesztés-válasz stabilitás az impulzusválasz abszolút integrálhatóságát követeli meg.

2. Átviteli karakterisztika -  $H(j\omega)$ :

Lineáris, invariáns (LI) rendszerekre szorítkozunk, de megköveteljük a gerjesztés-válasz stabilitást is, mely a Fourier-transzformáltak létezését garantálja.

Gerjesztés-válasz kapcsolatot a Fourier-transzformáció konvolúció tételének értelmében a gerjesztés spektruma és az átviteli karakterisztika szorzata határozza meg:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\mathcal{F}\{u(t)\}\}, \text{ ha } u(t) \text{ abszolút integrálható}$$

A kauzalitás közvetlenül eldönthető az átviteli karakterisztikából, ha ismerjük a belépő jel spektrumára vonatkozó összefüggéseket (ld.: Bode tételei).

3. Átviteli függvény -  $H(s)$ :

Lineáris, invariáns (LI) rendszerekre szorítkozunk, de megköveteljük a kauzalitást is, mely az Inverz-Laplace-transzformáció egyértelműségét garantálja.

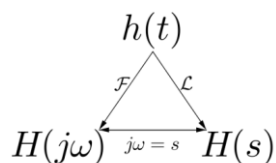
Gerjesztés-válasz kapcsolatot a Laplace-transzformáció konvolúció tételének értelmében a gerjesztés komplex spektrumának és az átviteli függvénynek a szorzata határozza meg:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\mathcal{L}\{u(t)\}\}, \text{ ha } u(t) \text{ belépő}$$

Gerjesztés-válasz stabilitás feltétele, hogy az összes pólus a bal fél síkra essen, azaz  $\text{Re}\{p_i\} < 0, i = 1, \dots, n$ .

Kauzális esetben, differenciális rendszerekre a  $H(s)$  racionális törtfüggvényként áll elő.

4. Kapcsolatok a három rendszerjellemző függvény közt:



$H(j\omega)|_{j\omega=s} = H(s)$ , ha a rendszer gerjesztés-válasz stabilis és kauzális is.

$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}$ , ha a rendszer gerjesztés-válasz stabilis.

$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ , ha a rendszer kauzális.

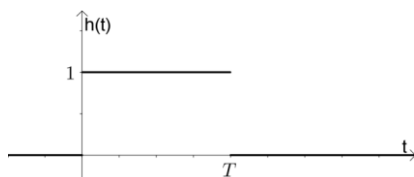
5. Példák:

a. Ideális aluláteresztő:

$$H(j\omega) = \varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)$$

$$h(t) = \frac{\Omega \sin(\Omega t)}{\pi \Omega t}, \text{ nem belépő, tehát nem kauzális, így nem valósítható meg}$$

b. Nulladrendű tartó:



$$h(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)$$

$$H(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}, \text{ nem racionális törtfüggvény}$$

Nem valósítható meg invariáns, de nem differenciális elemekkel (pl.: kapcsoló vagy késleltető szükséges).

### III. Speciális tulajdonságú rendszerek

1. Definiáljuk, úgy a mindent áteresztő rendszert, mint egy rendszer, melynek amplitúdó karakterisztikája konstans,  $K(\omega) = K_0$ , valamint követeljük meg a gerjesztés-válasz stabilitást.

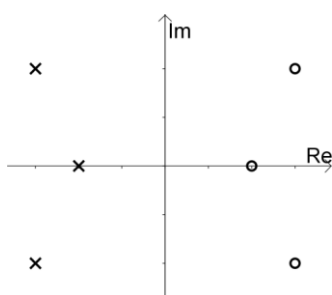
Ha  $H(j\omega) = K_0 \frac{\prod_{i=1}^n (j\omega + p_i^*)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)}$ , és  $\text{Re}\{p_i\} < 0 \forall i$ , akkor teljesülnek a feltételek.

Bizonyítás  $s = j\omega$  helyettesítéssel:

Mivel  $(j\omega - p_i)^* = -j\omega - p_i^* = -(j\omega + p_i^*)$ , ezért:

$$\frac{-(j\omega + p_i^*)}{(j\omega - p_i)^*} = 1, \text{ abszolút értéket véve: } 1 = \left| \frac{-(j\omega + p_i^*)}{(j\omega - p_i)^*} \right| = \left| \frac{j\omega + p_i^*}{j\omega - p_i} \right|$$

$$K(\omega) = |H(j\omega)| = \left| \pm K_0 \frac{\prod_{i=1}^n (s + p_i^*)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \right| = |\pm K_0| \prod_{i=1}^n \left| \frac{(j\omega + p_i^*)}{j\omega - p_i} \right| = K_0$$



2. Minimálfázisúnak nevezünk egy adott amplitúdó karakterisztikájú rendszert, ha futási idő karakterisztikája a lehető legkisebb:

Azaz, ha adott  $K(\omega)$  és  $\tau_{MF}(\omega) \leq \tau(\omega)$ ,  $\forall \tau(\omega)$ -ra, akkor  $\varphi(\omega) \geq \varphi_{MF}(\omega)$ .

Kritérium:  $H(j\omega) = K_0 \frac{\prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)}$ , ahol

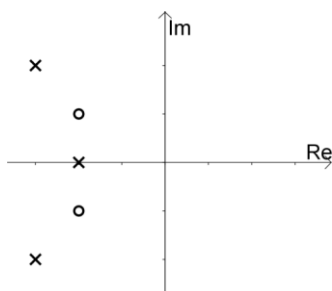
$\text{Re}\{p_i\} < 0$  a Gerjesztés-válasz stabilitás miatt és  $\text{Re}\{z_j\} < 0, i = 1, \dots, m$

Bizonyítás  $s = j\omega$  helyettesítéssel:

$$K(\omega) = \left| \pm K_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \right| = \left| \pm K_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)^*}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \right| = K_0 \frac{\prod_{j=1}^m |(s + z_j^*)|}{\prod_{i=1}^n |(s - p_i)|}$$

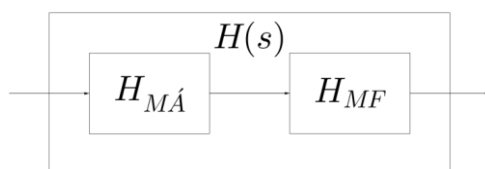
tehát  $-z_j^*$  és  $z_j$  zérusok esetén is ugyanaz az amplitúdó karakterisztika.

A fázis karakterisztika akkor lesz minimális, ha az egyes tényezők fázisa minimális. Az  $\arg(s - z_j)$  és  $\arg(s + z_j^*)$  közül kell a kisebbet választanunk,  $s - z_j = j(\omega - \text{Im}\{z_j\}) - \text{Re}\{z_j\}$ , míg  $s + z_j^* = j(\omega - \text{Im}\{z_j\}) + \text{Re}\{z_j\}$  melyek képzetes része azonos, tehát azt választjuk aminek a valós része pozitív, annak a tagnak kisebb a fázisa. Ha  $\text{Re}\{z_j\} < 0$  akkor meghagyjuk, ha  $\text{Re}\{z_j\} > 0$ , akkor a párját  $-z_j^*$ -at választjuk.



### 3. Felbontási tétel:

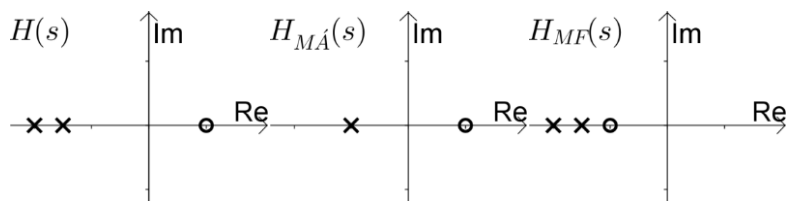
Minden rendszer felbontható átviteli függvénye alapján egy sorba kapcsolt minimál fázisú és mindent áteresztő rendszerre.



$H(s) = H_{MA}(s) \cdot H_{MF}(s)$  egy konstans erejéig egyértelmű.

Példa:

Mindig a mindent áteresztő rendszer átviteli függvényének meghatározásával kezdjük. Látható, hogy a pozitív fél síkra eső zérusok póluspárjait kell előállítanunk a negatív fél síkon. Ehhez gyakran új fiktív pólusokat kell felvennünk, melyeket a minimál fázisú rendszerben zérusokkal kell lefednünk. A negatív félsíkra eső maradék pólusok és zérusok a minimál fázisú rendszerhez tartoznak.



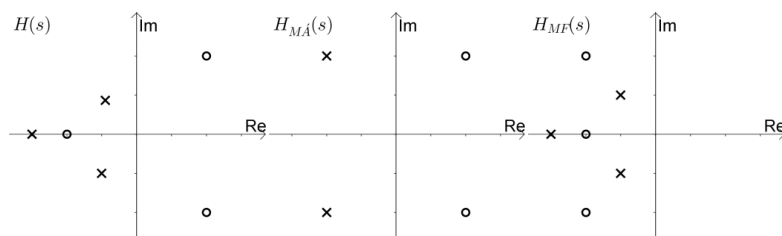
$$H(s) := \frac{3(s-2)}{(s+3)(s+4)} = 3 \frac{s-2}{s+2} \cdot \frac{s+2}{(s+3)(s+4)}$$

Példa:

$$H(s) := \frac{6s^3 - 12s^1 + 96}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6} = 6 \frac{(s+2)[s-(2+2j)][s-(2-2j)]}{(s+3)[s-(-1+j)][s-(-1-j)]}$$

$$H_{MA}(s) = 2 \frac{[s-(2+2j)][s-(2-2j)]}{[s-(-2+2j)][s-(-2-2j)]} = \frac{2s^2 - 8s + 16}{s^2 + 4s + 8}$$

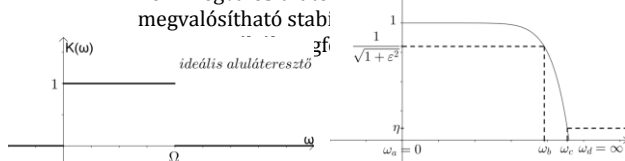
$$H_{MF}(s) = 3 \frac{(s+2)[s-(-2+2j)][s-(-2-2j)]}{(s+3)[s-(-1+j)][s-(-1-j)]} = \frac{3s^3 + 18s^2 + 48s + 48}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6}$$



#### IV. Szűrőtervezés

## 1. Bevezetés:

Felhasználásaink során gyakori probléma hogy egy jelből ki kell szűrni bizonyos frekvenciákat. Ideális és matematikailag legegyszerűbb esete az ideális aluláteresztő volna, azonban már beláttuk, hogy ez nem kauzális, azaz nem megvalósítható. Célszerű egy olyan egyszerűen számolható és megvalósítható stabil szűrőt megvalósítani, amely közelíti az ideális aluláteresztőt.



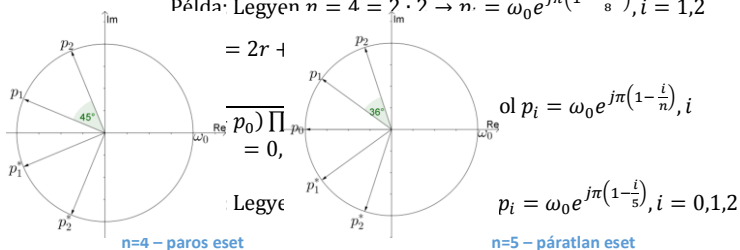
2. Maximális lapos közelítés: (Butterworth,1930):

Definíció:  $n$ -ed rendű „maxlap” szűrő

a.  $n$  páros,  $n = 2r$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0^n}{\prod_{i=1}^r (s - p_i)(s - p_i^*)}, \text{ ahol } p_i = \omega_0 e^{j\pi(1-\frac{2i-1}{2n})}, i = 1, \dots, r$$

Példa: Legyen  $n = 4 = 2 \cdot 2 \rightarrow n_i = \omega_0 e^{j\pi(1 - \frac{2i-1}{8})}, i = 1, 2$

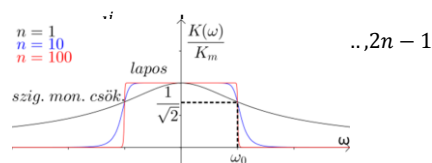


## pólusok ábrázolása

Kiegészítő tananyag

c. Tulajdonságai:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}}, K_m = K(0) = 1, K(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

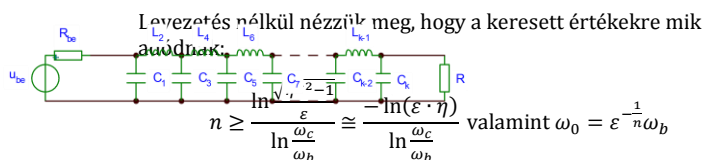


d. Méretezés:

Az aluláteresztő szűrő toleranciasémáját az alábbi 4 paraméter határozza meg:  $\varepsilon, \eta, \omega_b, \omega_c$ . Kérdés az  $\omega_0$  ahol  $K(\omega_0) = \frac{K_m}{\sqrt{2}}$ , valamint a szűrő rendje  $n$ .

A paraméterekre az alábbi feltételeket kapjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_b}{\omega_0}\right)^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \text{ és } \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^{2n}}} = \eta$$



e. Egy megvalósítás villamos hálózattal:

Cauer-féle szintézis (realizáció) páratlan esetre:

Páros esetben tekercsel indulna.

$$\left. \begin{aligned} C_k &= \frac{2}{\omega_0} \sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad (k \text{ páratlan}) \\ L_k &= \frac{2}{\omega_0} \sin\left(\frac{2k}{2n}\pi\right) \quad (k \text{ páros}) \end{aligned} \right\} \text{koherens egységben}$$



Kiegészítő tananyag

f. Számpélda:

Tervezzünk szűrőt az alábbi paraméterek segítségével:

$$\varepsilon = 0.6, \eta = 0.1, \omega_b = 1 \frac{\text{krad}}{\text{s}}, \omega_c = 1.8 \frac{\text{krad}}{\text{s}}.$$

Határozzunk meg tetszőleges koherens egységrendszert:

$$[V, mA, k\Omega, \mu F, H, \frac{\text{krad}}{\text{s}}]$$

A fenti képletek alapján, a keresett értékek:

$$n \geq \frac{\ln \frac{\sqrt{\eta^{-2}-1}}{\varepsilon}}{\ln \frac{\omega_c}{\omega_b}} \approx 4.7779 \rightarrow n = 5$$

$$\omega_0 = 0.6^{-\frac{1}{5}} \cdot 1 = 1.1076 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$$

Határozzuk meg a szűrőnk átviteli függvényét:

$$p_0 = -\omega_0 = -1.11$$

$$p_1 = \omega_0 e^{-j\frac{4}{5}\pi} = 0.9 + 0.65j$$

$$p_2 = \omega_0 e^{j\frac{3}{5}\pi} = -0.34 + 1.06j$$

$$H(s) = \frac{\omega_0^5}{(s - p_0)(s - p_1)(s - p_1^*)(s - p_2)(s - p_2^*)} =$$

$$= \frac{1.69}{s^5 + 3.59s^4 + 6.45s^3 + 7.16s^2 + 4.91s + 1.68}$$

Megvalósítás:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Circuit diagram with components } R, L_2, L_4, C_1, C_3, C_5 \text{ and a voltage source.} \\ & L_k = \frac{2}{\omega_0} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad (k \text{ páratlan}) \\ & L_k = \frac{2}{\omega_0} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad (k \text{ páros}) \end{aligned} \right\} \text{behelyettesítve}$$

$$C_1 = 0.558 \mu F ; L_2 = 1.0614 H$$

$$C_3 = 1.4609 \mu F ; L_4 = 1.7173 H$$

$$C_5 = 1.8057 \mu F$$

Legyen  $R = 1k\Omega$ .

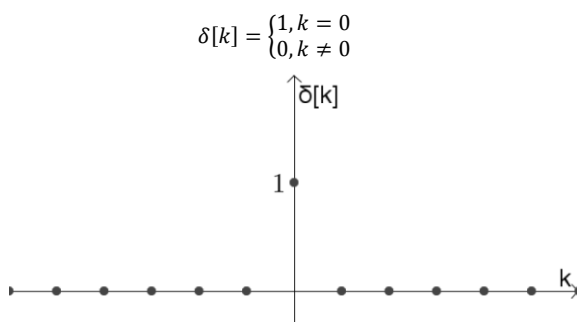
## 5. Diszkrét idejű jelek, rendszerek és hálózatok vizsgálata

### I. DL jelek

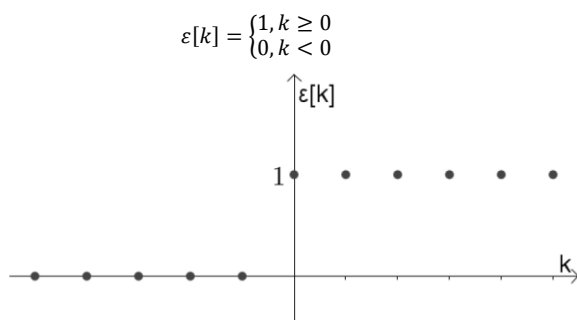
A valóságban folytonos jeleket gyakran mintavételezünk adott időpillanatokban, az így mintavételezett jeleket diszkrét idejű jeleknek nevezzük. Képzeljünk el egy folytonos idejű jelet, és tegyük fel, hogy minket csak  $kT$  időpillanatokban érdekel az értéke. Bár a valóságban diszkrét értékű jeleket kezelünk, a továbbiakban mégis tekintsük folytonosnak az értékkészletet.

1. Definíció:  $y = f[k]$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ahol  $k$ -t diszkrét időnek vagy ütemnek nevezzük.
2. Néhány példa:

- a. Egység impulzus:



- b. Egység ugrás – „fésű függvény”:

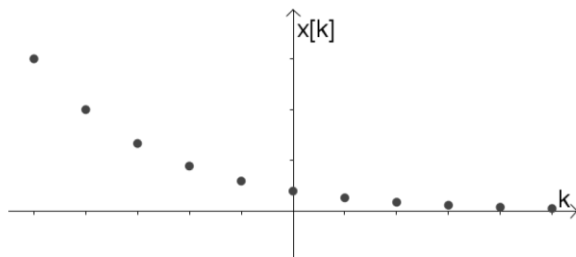


Kifejezhetjük az egységugrást az egység impulzussal a következő integráláshoz hasonló kifejezéssel:

$$\varepsilon[k] = \sum_{i=-\infty}^k \delta[i]$$

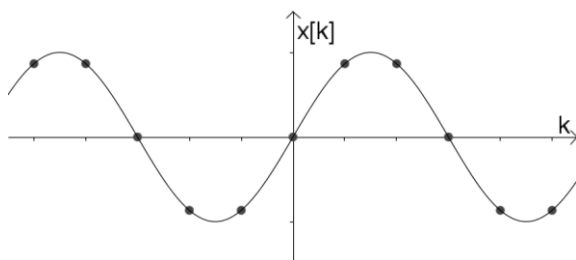
b. Exponenciális jel:

$$x[k] = aq^k, 0 < q < 1$$



d. Szinuszos jel:

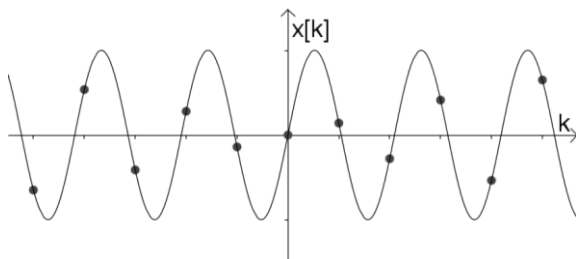
$$x[k] = \underbrace{A}_{\text{amplitúdó}} \cos \left( \underbrace{\tilde{\vartheta}}_{\text{diszkrét körfr.}} \cdot k + \underbrace{\rho}_{\text{kezdő fázis}} \right)$$



A periodicitás elveszhet,  $x[k]$  periodikus marad, ha  $\frac{\vartheta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ .

Példa a periodicitás eltűnésére:

$$x[k] = \sin(k)$$



Ellenben periodikus a  $x[k] = \sin(0.3\pi k)$ , mivel  $\frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{0.3\pi}{2\pi} = \frac{3}{20} \in \mathbb{Q}$ .

Meghatározhatjuk a periódusát:  $L = 20$ , mivel  $\frac{\vartheta}{2\pi}$  legkisebb egész értékű nevezője a 20.

### 3. Műveletek DI jeleken:

#### a. Eltolás (siettetés vagy késleltetés):

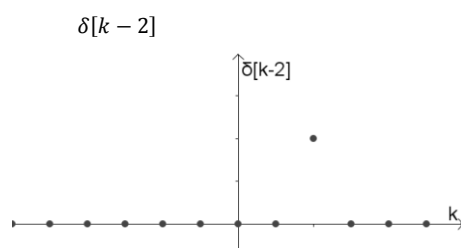
Az  $i$  ütemmel késleltetett jel alakja:

$$x[k] \rightarrow x[k - i] := x^{(i)}[k]$$

Gyakran előfordul az egy ütemmel siettetett jel, melyet a következő módokon is jelölhetünk:

$$x[k + 1] = x^{(-1)}[k] = x'[k] = x^+[k]$$

Példa.:



#### b. Diszkrét idejű konvolúció:

$$x[k], y[k] \text{ DI konvolúciója a } z[k] = x[k] * y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[k - i]$$

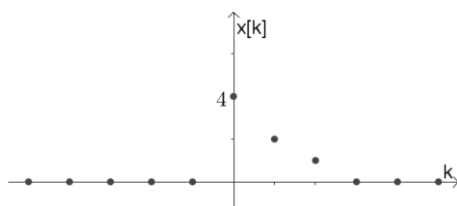
Tetszőleges jel előáll a jel és az egység impulzus konvolúciójaként:

$$x[k] = \dots + x[n]\delta[k - n] + \dots = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\delta[k - i]$$

#### c. Levágás, ablakozás:

Ahogy folytonos időben, az  $\varepsilon[k - i]$ -vel való szorzás diszkrét időben is levágást jelent; az  $\varepsilon[k - a] - \varepsilon[k - (b + 1)]$ -gyel való szorzás pedig a jel derékszögű ablakozott változatát szolgáltatja.

Példa:  $x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - 3]\} \cdot 4 \cdot 0.5^k$



#### d. Differencia (deriválás analógiájaként lehet tekinteni diszkrét időben):

Legyen  $x[k] := y[k] - y[k - 1]$ , ekkor  $x[k]$  az  $y[k]$  differenciája.

Példa:  $\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k - 1]$

## II. A DI rendszer

1. Ahogy folytonos időben, diszkrét időben is definiálhatjuk a rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatát explicit és implicit formában:

$$y[k] = \mathcal{W}\{u[k]\}, \text{ explicit alak}$$

$$\mathcal{W}\{u[k], y[k]\} = 0, \text{ implicit alak}$$

2. Rendszertulajdonságokat megfeleltethetjük a folytonos időben megismerteknek:

- a. Linearitás  $\leftrightarrow$  nemlinearitás:

$$\mathcal{W}\left\{\sum_i c_i u_i[k]\right\} = \sum_i c_i \mathcal{W}\{u_i[k]\}$$

- b. Invariancia  $\leftrightarrow$  variancia:

$$\mathcal{W}\{u[k - L]\} = y[k - L]$$

- c. Kauzalitás  $\leftrightarrow$  akauzalitás:

$$y[k_0] = \mathcal{W}\{\varepsilon[k_0 - k]u[k]\}$$

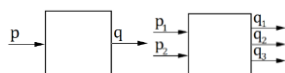
- d. Gerjesztés-válasz stabilitás  $\leftrightarrow$  instabilitás, labilitás:

Korlátos gerjesztésre a válasz korlátos, azaz:

$$|u[k]| \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \rightarrow |y[k]| \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

## III. A DI jelfolyam-hálózat

Az eddig megszokott Kirchhoff-típusú hálózatokkal ellentétben a jelfolyam hálózatokban az információterjedést modellezzük. Ennek következtében a jel terjedési iránya adott. Új komponens karakterisztikákat kell definiálnunk, és az összekapcsolási kényszerek is változnak. Mint folytonos időben, itt is definiálhatunk  $n$  bemenetű  $k$  kimenetű elemeket.



1. Alapelemek és karakterisztikáik:

- a. Forrás:

$q[k] = u[k]$ ,  $u[k]$  a rendszer bemeneti jele, mely általában adott.



- b. Nyelő:

$y[k] = p[k]$ ,  $y[k]$  a rendszer kimenő jele, általában ez a meghatározandó mennyiség.



- c. Erősítő:

$$q[k] = K \cdot p[k]$$



- d. Késleltető:

$$q[k] = p[k - 1]$$

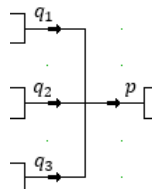


2. Összekapcsolás:

a. Összegző:

$$p[k] = \sum_i q_i[k]$$

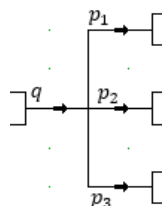
Példa:  $p[k] = q_1[k] + q_2[k] + q_3[k]$



b. Elágazás:

$$p_i[k] = q[k]$$

Példa:  $p_1[k] = p_2[k] = p_3[k] = q[k]$

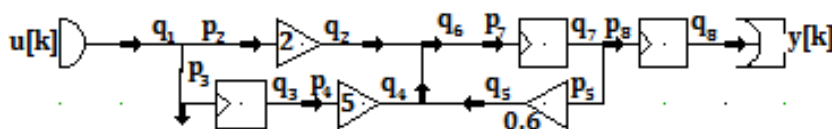


3. A hálózati egyenletek teljes rendszere:

A hálózati egyenletek teljes rendszere az összes elem karakterisztika és az összes összekapcsolási kényszer felírásából adódó egyenletrendszer.

Nem szoktuk felírni a hálózati egyenletek teljes rendszerét, mivel hatékonyabb módszerek is léteznek, melyeket később ismertetünk.

Példa:



Az összes elem karakterisztikáját és az összes összekapcsolási kényszert felírva a következő differenciaegyenlet-rendszert kapjuk, melyben tizennégy ismeretlenhez, tizennégy egyenlet és három kezdetiérték-feltétel ( $q_3$ ,  $q_7$ ,  $q_8$ , tehát a késleltetők kimenetének kezdeti értéke) tartozik.

Elem karakterisztikák:

$$\begin{aligned} q_1[k] &= u[k] \text{ (adott)} \\ q_2[k] &= 2p_2[k] \\ q_3[k] &= p_3[k - 1] \\ q_4[k] &= 5p_4[k] \\ q_5[k] &= 0.6p_5[k] \\ q_6[k] &= p_6[k] \\ q_7[k] &= p_7[k - 1] \end{aligned}$$

Összekapcsolási kényszerek:

$$\begin{aligned} p_2[k] &= q_1[k] \\ p_3[k] &= q_1[k] \\ p_4[k] &= q_3[k] \\ p_6[k] &= q_2[k] + q_4[k] + q_5[k] \\ p_7[k] &= q_6[k] \\ p_5[k] &= q_6[k] \\ p_8[k] &= q_7[k] \end{aligned}$$

Keresett kifejezés:  $y[k] = q_8[k]$

## 6. Az impulzusválasz és alkalmazása

### I. Az impulzusválasz – $h[k]$

1. A folytonos esethez hasonlóan, az impulzusválasz az egységimpulzusra, mint gerjesztésre adott válasz:

$$h[k] = \mathcal{W}\{\delta[k]\} \quad \begin{array}{c} \delta[k] \quad \boxed{\begin{array}{c} DI \\ LI \end{array}} \quad h[k] \end{array}$$

2. Végis impulzusválaszú rendszerek (FIR – Finite Impulse Response):

Az ilyen típusú rendszerek impulzusválasza adott ütem után az azonosan 0 értéket veszi fel. Könnyen belátható, hogy ennek elégséges feltétele, hogy a rendszer ne tartalmazzon visszacsatolást.

$$h[k] = 0, \text{ ha } \begin{cases} k < 0 \\ k \geq L \end{cases}$$

$$h[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - L]\}h[k] = \sum_{i=0}^{L-1} h[i]\delta[k - i]$$

3. Ugrásválasz:

$$g[k] = \mathcal{W}\{\varepsilon[k]\} \quad \begin{array}{c} \varepsilon[k] \quad \boxed{\begin{array}{c} DI \\ LI \end{array}} \quad g[k] \end{array}$$

A folytonos esethez hasonlóan, az ugrásválasz az egységugrásra, mint gerjesztésre adott válasz. Azonban, mivel az egységimpulzus véges és így könnyen előállítható, ezért a folytonos esettel ellentétben az impulzusválasz közvetlenül is egyszerűen megkapható. Ennek következménye, hogy a később bemutatásra kerülő diszkrét szimuláció kivételével az ugrásválasznak különösebb szerepe itt nincs.

A linearitás, az invariancia és a következő összefüggés következtében:

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k - 1], \text{ ezért az impulzusválasz és az ugrásválasz között a következőt írhatjuk fel: } h[k] = g[k] - g[k - 1].$$

A linearitás, az invariancia és a következő összefüggés következtében:

$$\varepsilon[k] = \sum_{i=-\infty}^k \delta[i], \text{ ezért az impulzusválasz és az ugrásválasz között a}$$

$$\text{a következőt írhatjuk fel: } g[k] = \sum_{i=-\infty}^k h[i]$$

## II. A válasz kifejezése az impulzusválasz segítségével

Lineáris invariáns rendszer esetén az adott választ, mint a gerjesztés és az impulzusválasz konvolúciója kapjuk meg.

A  $h[k] = \mathcal{W}\{\delta[k]\}$ -ből, valamint a rendszer invarianciájából következik, hogy  $h[k-i] = \mathcal{W}\{\delta[k-i]\}$ . Ehhez hozzávéve a rendszer linearitását, azt kapjuk, hogy  $u[i]h[k-i] = \mathcal{W}\{u[i]\delta[k-i]\}$ . A gerjesztés összes „pálcikájának” hatását a szuperpozíció értelmében mindkét oldal összegzésével vehetjük figyelembe, tehát:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]h[k-i] = \mathcal{W}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]\delta[k-i]\right\} = \mathcal{W}\{u[k]\}.$$

Így megkaptuk, hogy a válasz valóban kifejezhető a gerjesztés és az impulzusválasz segítségével:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i]h[k-i] = u * h = h * u = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]u[k-i]$$

Kauzális rendszer esetén  $h[k]$  belépő, és ha  $u[k]$  is belépő, a konvolúció határai a következőképpen alakulnak:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varepsilon[i]u[i]\varepsilon[k-i]h[k-i] = \sum_{i=0}^k u[i]h[k-i]$$

Ebben az esetben a válasz  $k$ . ütembeli értéke a következő nem zárt formulával számolható:

$$y[0] = u[0]h[0]$$

$$y[1] = u[0]h[1] + u[1]h[0]$$

$$y[2] = u[0]h[2] + u[1]h[1] + u[2]h[0]$$

...



## 7. A rendszeregyenlet

### I. Definíció

Tekintsünk egy diszkrét idejű, lineáris invariáns, egy bemenetű egy kimenetű rendszert.

A kauzalitás nem feltétele a rendszeregyenlet létezésének, azonban a következőkben feltesszük, hogy teljesül.

A fenti feltételek mellett minden rendszerhez generálható egy alábbi formájú gerjesztés-válasz kapcsolat:

$$y[k] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m u[k-m] - a_1 y[k-1] - \dots - a_n y[k-n]$$

$$y[k] + \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i y[k-i]}_{\text{autoregresszió}} = \underbrace{\sum_{j=0}^m b_j u[k-j]}_{\text{mozgó átlag}}$$

Az ilyen rendszerekre gyakran ARMA (AutoRegressive-Moving-Average) néven hivatkozunk.

FIR rendszerek esetén a rendszeregyenlet alakja a következő:

$$y[k] = \sum_{j=0}^m b_j u[k-j]$$

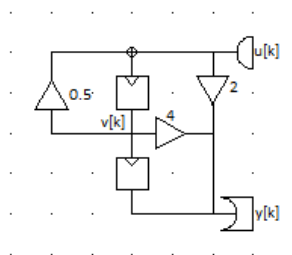
Példa nem kauzális rendszerre:

$$y[k-1] - 0.5y[k-2] = u[k]$$

Látható, hogy a válasz a  $k$ . ütemben a gerjesztés  $k+1$ . ütemétől függ.

Könnyen észrevehetjük, amennyiben  $u[k] = \delta[k]$ , akkor  $y[k] = h[k]$  nem belépő.

Példa: Fejezzük ki az alábbi rendszer rendszeregyenletét!



A rendszeregyenlet meghatározásához vegyük fel a  $v[k]$  segédváltozót, és írjunk fel egyenleteket az összegzőkre.

$$1.) v[k+1] = 0.5v[k] + u[k]$$

$$2.) y[k] = v[k-1] + 4v[k] + 2u[k]$$

Az 1.)-es egyenlet mindkét oldalát késleltetve:

$$3.) v[k] = 0.5v[k-1] + u[k-1], \text{ ezt behelyettesítve 2.)-be:}$$

$$4.) y[k] = v[k-1] + 2v[k-1] + 4u[k-1] + 2u[k]$$

$$3.)\text{-at átrendezve: } v[k-1] = 2v[k] - 2u[k-1], \text{ majd behelyettesítve 2.)-be:}$$

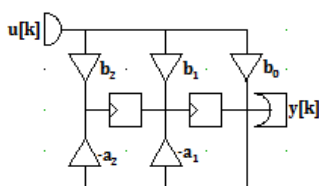
$$v[k] = \frac{1}{6}y[k] + \frac{1}{3}u[k-1] - \frac{1}{3}u[k], \text{ késleltetve és visszahelyettesítve 4.)-be:}$$

$$y[k] = 0.5y[k-1] + u[k-2] + 3u[k-1] + 2u[k]$$

## II. Kanonikus hálózatok

A rendszeregyenlet nem határozza meg egyértelműen a hálózatot. Ugyanahhoz a rendszeregyenlethez végtelen sok realizáció tartozik. A lehetséges realizációk közül az alábbi felépítésű, minimális elemszámú rendszereket tekintjük kanonikus hálózatoknak.

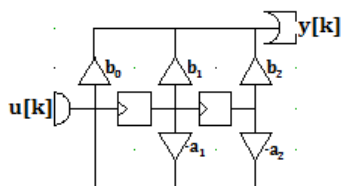
Példa:  $n = 2$ ;  $m = 2$ :



$$y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + b_2 u[k-2]$$

A megvalósításban a válaszból visszacsatolt erősítők ellentettjei a rendszeregyenletben szereplő  $a_i$ -knek.

Előző példa duálisa:



$$y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + b_2 u[k-2]$$

A megvalósításban a gerjesztésbe visszacsatolt erősítők ellentettjei a rendszeregyenletben szereplő  $a_i$ -knek.

## III. Megoldás fokozatos behelyettesítéssel (lépésről lépésre)

Tegyük fel, hogy  $y[-1], y[-2], \dots, y[-n]$ ;  $u[k], k > m$  adott (kezdeti feltételek), ekkor a válasz a rendszeregyenlet alapján rekurzívan számítható a  $k$ . ütemre.

$$y[0] = -a_1 y[-1] - \dots - a_n y[-n] + b_0 u[0] + \dots + b_m u[-m] =$$

$$y[1] = -a_1 y[0] - \dots - a_n y[-n+1] + b_0 u[1] + \dots + b_m u[-m+1]$$

...

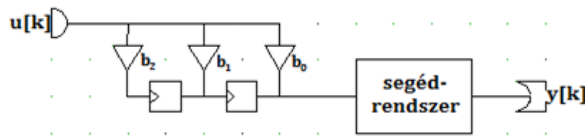
A rekurzív módszer a számítási pontatlanságokat növeli, mivel magával hordozza a hibákat. Jobban preferáljuk a válasz zárt alakját, azonban áblázatkezelő (pl.: Microsoft Excel) segítségével a fokozatos behelyettesítés számításaink ellenőrzésére egyszerű módszer.

#### IV. Válaszjel számítása $h[k]$ segítségével

A rendszeregyenlet egy  $n$ -ed rendű lineáris differenciaegyenlet. Ahogy matematikából megszokhattuk a differenciálegyenleteknél, ezt is homogén és inhomogén részre bontva oldhatjuk meg. A homogén általános megoldás meghatározásakor a gerjesztést figyelmen kívül hagyjuk, azaz a rendszeregyenletnek a gerjesztés felőli oldalát nullával helyettesítjük. Az így kapott segédrendszer impulzusválaszát meghatározhatjuk, ha a gerjesztés oldalára egységimpulzust kapcsolunk. A fentiek szemléletesen a következőképpen írhatók:

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = \underbrace{b_0 u[k] + \dots + b_m u[k-m]}_{u_s[k]}$$

Szemléltetés hálózattal (példa  $m = 2$ )



Tudjuk, hogy a segédrendszer impulzusválasza  $h_s[k] = \mathcal{W}_s\{\delta[k]\}$ , melyből linearitást és invarianciát kihasználva a következő adódik:

$$h[k] = b_0 h_s[k] + b_1 h_s[k-1] + \dots + b_m h_s[k-m] = \sum_{i=0}^m b_i h_s[k-i].$$

Ezen eredmény a fentebbi ábra alapján is igazolható, ha  $u[k] = \delta[k]$ .

A homogén általános megoldás, azaz a  $h_s[k]$  meghatározása:

Ha  $u_s[k] := \delta[k]$  akkor minden nulla utáni ütemre a gerjesztés értéke zérus, tehát a rendszeregyenlet homogén. Ahogy a deriválás sajátfüggvénye az exponenciális függvény, úgy a differencia sajátfüggvénye is az. Ahogy folytonos esetben megszoktuk, a  $y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = 0$  egyenlet megoldását keressük a sajátfüggvény formájában, azaz  $y[k] = C \cdot p^k$  alakban. Ezt a rendszeregyenletbe visszahelyettesítve a  $C \cdot p^k + \sum_{i=1}^m a_i C p^{k-i} = 0$  adódik. Mindkét oldalt  $C$ -vel leosztva adódik a karakterisztikus egyenlet:

$$p^k + \sum_{i=1}^m a_i p^{k-i} = 0$$

Ennek megoldásai:  $p_i, i = 1, \dots, m$ . Ekkor a homogén általános megoldás a következő alakban adódik:

$$y[k] = \sum_{i=1}^n C_i k^{m_i-1} p_i^k, \text{ ahol } m_i \text{ az } i. \text{ gyök multiplicitása.}$$

Ebből  $C_i$  meghatározható a kezdeti feltételek alapján.

Logikusan adódik, hogy a homogén általános alak csak  $k \geq 1$ -re érvényes, de valójában belátható, hogy már a  $-(n-1)$ . ütemtől is analitikus alakban írható. Kezdeti érték feltételként szükségünk van  $h_s[0], h_s[-1], \dots, h_s[-(n-1)]$  értékekre, azonban kauzális rendszerre  $h_s[k] = 0$ , ha  $k < 0$ , és a rendszeregyenlet alapján:

$$h_s[0] = -a_1 h_s[-1] - a_2 h_s[-2] - \dots - a_n h_s[-n] + \underbrace{\delta[0]}_{u_s[k]=\delta[k]} = 1$$

Példa:  $y[k] - y[k-1] + 0.25y[k-2] = 2u[k] - u[k-1]$

$$y_{há}: y[k] - y[k-1] + 0.25y[k-2] = 0$$

$$y[k] := Cp^k$$

$$Cp^k - Cp^{k-1} + 0.25Cp^{k-2} = 0$$

$$p^2 - p + 0.25 = 0 \rightarrow p_{1,2} = 0.5$$

Mivel kétszeres gyök adódik, ezért  $y_{há}[k] = C_1 0.5^k + C_2 \cdot k \cdot 0.5^k$ .

Kezdeti feltételek érvényesítése:

Legyen  $u_s[k] = 2u[k] - u[k-1] = \delta[k]$ , ekkor  $y[k] = h_s[k]$ .

Mivel a rendszer kauzális ezért:

$$y_{há}[-1] = h_s[-1] = C_1 0.5^{-1} - C_2 0.5^{-1} = 0$$

$$y_{há}[0] = h_s[0] = C_1 0.5^0 - C_2 \cdot 0 \cdot 0.5^0 = 1, \text{ melyből}$$

$$C_1 = 1 \text{ és } C_2 = 1$$

Ezek alapján  $h_s[k] = \varepsilon[k+1] 0.5^k (1+k)$

A megoldás menete nem változik egyszeres illetve konjugált komplex gyökpárok esetén sem, utóbbi esetben megjelenik a koszinusz függvény. A példa alapján látható, hogy a megoldás a következő alakot ölti:

$$h_s[k] = \varepsilon[k+n-1] \sum_{i=1}^n C_i p_i^k$$

A rendszer impulzusválasza a segédrendszeré alapján a következő alakban adható meg:

$$h[k] = \sum_{j=0}^m b_j \varepsilon[k+n-1-j] \sum_{i=1}^n C_i p_i^{k-j} = \sum_{i=1}^n D_i p_i^k, \text{ ha } k \geq m+1-n$$

Ebből a már megismert módon bármilyen gerjesztésre meghatározhatjuk a választ:

$$y[k] = h[k] * u[k]$$

## V. Gerjesztés-válasz stabilitás

Már láthattuk, hogy  $h[k] = \sum_{i=1}^n D_i p_i^k$ , alakban adódik. A gerjesztés – válasz stabilitás

az impulzusválasz abszolút összegezettségéből következik, melyre könnyen belátható, a következő szükséges és elégséges feltétel:

A rendszer gerjesztés-válasz stabilis, akkor és csak akkor, ha  $|p_i| < 1, i = 1, \dots, n$ , azaz minden pólus az egység körön belülre esik.

A rendszer a stabilitás határhelyzetében van, amennyiben csak egyszeres gyökök esnek az egységkörre és minden más gyök az egységkörön belül helyezkedik el.

## VI. Válaszjel számítása közvetlenül összetevőkre bontással

Bizonyítható, hogy  $y[k] = y_f[k] + y_g[k]$ , azaz a válasz felbontható egy szabad (transziens) és egy gerjesztett (stacionárius vagy állandósult) összetevőre. Ez a megközelítés teljes mértékben összhangban van a matematikában tanultakkal, miszerint a differencia egyenlet inhomogén általános megoldása előáll a homogén általános és egy inhomogén partikuláris megoldás összegeként. A transziens összetevő a rendszerre, míg az állandósult összetevő a gerjesztésre jellemző.

Példa: Tekintsük a következő rendszeregyenlettel jellemzett rendszert:

$$y[k] - 0.125y[k-2] + 0.0625y[k-3] = u[k] - 0.25u[k-1]$$

Számítsuk ki a válasz időfüggvényét, ha a gerjesztés  $u[k] = \varepsilon[k]0.4^k$ .

A homogén általános megoldás (szabad összetevő) meghatározása:

$$y[k] - 0.125y[k-2] + 0.0625y[k-3] = 0$$

$$y_f[k] := Cp^k$$

$$Cp^k - 0.125Cp^{k-2} + 0.0625Cp^{k-3} = 0$$

$$p^3 - 0.125p + 0.0625 = 0 \rightarrow p_1 = -0.5, p_{2,3} = 0.25 \pm 0.25j = 0.5^{\frac{3}{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Mivel konjugált gyökök pár adódik, ezért

$$y_f[k] = C_1(-0.5)^k + C_2 0.5^{\frac{3}{2}k} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) + C_3 0.5^{\frac{3}{2}k} \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)$$

Kezdeti feltételek érvényesítése:

Mivel a rendszer kauzális és a gerjesztés belépő:

$$y_f[-2] = C_1(-0.5)^{-2} + C_2 0.5^{-3} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C_3 0.5^{-3} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y_f[-1] = C_1(-0.5)^{-1} + C_2 0.5^{-\frac{3}{2}} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + C_3 0.5^{-\frac{3}{2}} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$y_f[0] = C_1(-0.5)^0 + C_2 0.5^0 \cos(0) + C_3 0.5^0 \sin(0) = 1, \text{ melyből}$$

$$C_1 = 0.4 \text{ és } C_2 = 0.6 \text{ és } C_3 = 0.2$$

$$\text{Tehát } y_f[k] = 0.4 \cdot (-0.5)^k + 0.6 \cdot 0.5^{\frac{3}{2}k} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) + 0.2 \cdot 0.5^{\frac{3}{2}k} \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)$$

A gerjesztett összetevő meghatározásához keressük  $y_g[k]$ -t, a gerjesztés formájában:

$$y_g[k] := C \cdot 0.4^k$$

Ezt és a gerjesztést a rendszeregyenletbe behelyettesítve:

$$C \cdot 0.4^k - 0.125C \cdot 0.4^{k-2} + 0.0625C \cdot 0.4^{k-3} = 0.4^k - 0.25 \cdot 0.4^{k-1}$$

$$C \cdot 0.4^3 - 0.125C \cdot 0.4^1 + 0.0625C = 0.4^3 - 0.25 \cdot 0.4^2, \text{ ebből}$$

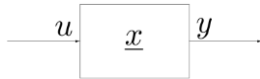
$$C = -2.75, \text{ tehát } y_g[k] = -2.75 \cdot 0.4^k$$

$$\text{A válasz, } y[k] = \varepsilon[k] \left( 0.4 \cdot (-0.5)^k + 0.6 \cdot 0.5^{\frac{3}{2}k} \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) + 0.2 \cdot 0.5^{\frac{3}{2}k} \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) - 2.75 \cdot 0.4^k \right)$$

## 8. Az állapotváltozós leírás

### I. Az állapotváltozós leírás

Az állapotváltozóknak két kritériumot kell teljesíteniük, egyrészt a  $k$ . ütemben ismert értékeiből a válasznak az adott ütemben, másrészt az állapotváltozóknak a  $k + 1$ . ütemben egyértelműen meghatározhatónak kell lennie. Állapotváltozóknak tekintjük a fentebbi kritériumokat teljesítő, minimális elemszámú változórendszert. Az állapotváltozók megválasztása nem egyértelmű, ahogy folytonos időben, itt is az „emlékező” elemekkel lesz kapcsolatban. Így az állapotváltozók célszerűen a késleltető elemek kimeneti értékei lesznek.



Az állapotváltozós leírás általános alakja:

$$\underline{x}[k+1] = \underline{A}\underline{x}[k] + \underline{B}\underline{u}[k]$$

$$\underline{y}[k] = \underline{C}\underline{x}[k] + \underline{D}\underline{u}[k]$$

Ahogy eddig is egy bemenetű és egy kimenetű rendszerekre szorítkozunk, a továbbiakban is ezeket vizsgáljuk, ebben az esetben az alábbi jelöléseket alkalmazzuk:

$$\underline{x}' = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}, \text{ ahol } \underline{x}[k+1] = \underline{x}'$$

$$\underline{y}' = \underline{C}^T \underline{x} + \underline{D}\underline{u}$$

### II. Állapotegyenletek transzformálása

Bár az állapotváltozók megválasztása nem egyértelmű, ha ismerjük egy rendszer állapotváltozós leírását, akkor létezik olyan transzformáció, amely ebből egy másik állapotváltozós leírást állít elő.

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = T_{11}x_1 + \dots + T_{1n}x_n \\ \tilde{x}_2 = T_{21}x_1 + \dots + T_{2n}x_n \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \tilde{\underline{x}} = \underline{T}\underline{x}, \text{ ahol } \underline{T} \text{ egy } n \times n\text{-es nem szinguláris mátrix}$$

Ekkor  $\underline{x} = \underline{T}^{-1}\tilde{\underline{x}}$ , melyet visszahelyettesítve és az állapotváltozós leírást  $\underline{T}$ -vel megszorozva kapjuk:

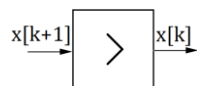
$$\begin{cases} \underline{T}\underline{x}' = \underline{T}\underline{A}\underline{T}^{-1}\tilde{\underline{x}} + \underline{T}\underline{B}\underline{u} \\ \underline{y} = \underline{C}^T \underline{T}^{-1}\tilde{\underline{x}} + \underline{D}\underline{u} \\ \underline{T}\underline{x}' = (\underline{T}\underline{x})' = \tilde{\underline{x}}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\underline{x}}' = \underline{\tilde{A}}\tilde{\underline{x}} + \underline{\tilde{B}}\underline{u} \\ \underline{y} = \underline{\tilde{C}}^T \tilde{\underline{x}} + \underline{D}\underline{u} \end{cases}$$

Ezt a transzformációt az állapotmátrix hatványozásánál a spektrális felbontásra használhatjuk.

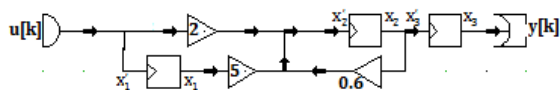
### III. Rendszer leírása állapotváltozókkal

#### 1. A hálózat állapotváltozós egyenletrendszere:

Praktikus, ha a késleltetők kimeneteit vezetjük be, mint állapotváltozók:



Példa:



$$x_1' = u$$

$$x_2' = 5x_1 + 0.6x_2 + 2u$$

$$x_3' = x_2$$

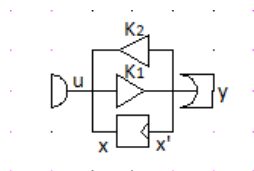
$$y = x_3$$

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

A hálózat reguláris, ha létezik állapotváltozós leírása.

Ellenpélda:

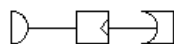


$$x' = K_1(u + x + K_2x')$$

$$x' = \frac{K_1}{1 - K_1K_2}x + \frac{K_1}{1 - K_1K_2}u, \text{ nem értelmezhető, ha } K_1 = K_2 = 1$$

Parametrikusan nemreguláris a hálózat, amennyiben a paraméterek megválaszthatók úgy, hogy az állapotváltozós leírás nem értelmezhető. Erre példa a fenti rendszer. Parametrikus nemregularitás szükséges, de nem elégséges feltétele a memória mentes hurok megléte; ez gráfelméleti módszerekkel vizsgálható.

Strukturális nemregularitás az elemek helytelen összekapcsolásából (pl.: fordítva bekötött késleltető) fakad.



2. Hálózat realizáció állapotváltozós leírás alapján:

Ez a feladat nem egyértelmű, és egy általános alak meglehetősen bonyolult.

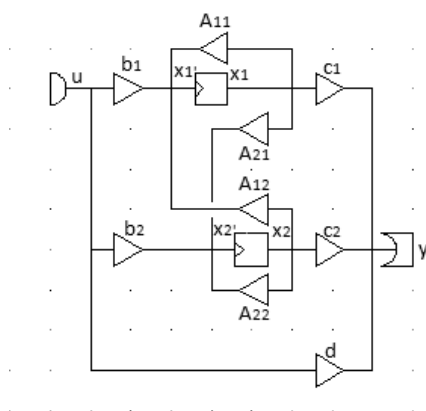
Tekintsünk egy példát két állapotváltozót tartalmazó rendszerre:

$$x_1' = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + b_1u$$

$$x_2' = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + b_2u$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + du$$

A fenti egyenletrendszerből „intuitív” módon az alábbi hálózatot kaphatjuk például:



3. Állapotváltozós leírás a rendszeregyenlet alapján:

A feladat megoldása nem egyértelmű, mi a Frobenius-módszert ismertetjük egy példán keresztül:

$$y[k] = 0.7y[k-1] - 0.94y[k-2] + 2u[k] - 1.8u[k-1]$$

$$n = 2, m = 1$$

Minden egyes késleltetett értékhez vegyünk fel egy-egy új állapotváltozót, legyen  $x_1[k] = y[k-1]$ ,  $x_2[k] = y[k-2]$ ,  $x_3[k] = u[k-1]$

Ezeket behelyettesítve az alábbi egyenletek adódnak:

$$x_1[k+1] = 0.7x_1[k] - 0.94x_2[k] - 1.8x_3[k] + 2u[k]$$

$$x_2[k+1] = y[k-1] = x_1[k]$$

$$x_3[k+1] = u[k]$$

$$y[k] = x_1[k+1] = 0.7x_1[k] - 0.94x_2[k] - 1.8x_3[k] + 2u[k]$$

4. Rendszeregyenlet az állapotváltozós leírás alapján:

A feladat megoldása egyértelmű, a rendszeregyenletet úgy kaphatjuk meg, ha rendezzük az állapotváltozós leírás egyenletrendszerét úgy, hogy az állapotváltozókat kiküszöböljük. A későbbiekben egyszerűbb megoldást is tanulunk.



#### IV. Az állapotegyenletek megoldása

1. Fokozatos behelyettesítés:

$$x[0] \text{ adott kezdeti feltétel} \rightarrow y[0] = \underline{C}^T \underline{x}[0] + Du[0]$$

$$x[1] = \underline{A}x[0] + \underline{B}u[0] \rightarrow y[1] = \underline{C}^T \underline{x}[1] + Du[1]$$

$$x[2] = \underline{A}x[1] + \underline{B}u[1] \rightarrow y[2] = \underline{C}^T \underline{x}[2] + Du[2]$$

...

Ha  $u[k]$  belépő, akkor a kauzalitásból fakadóan  $\underline{x}[-1] = 0$  melyből adódik, hogy  $\underline{x}[0] = \underbrace{\underline{A}\underline{x}[-1]}_0 + \underbrace{\underline{B}u[-1]}_0 = 0$

2. Az általános megoldás:

$x[0]$  adott kezdeti érték

$$x[1] = \underline{A}x[0] + \underline{B}u[0]$$

$$x[2] = \underline{A}x[1] + \underline{B}u[1] = \underline{A}^2x[0] + \underline{A}\underline{B}u[0] + \underline{B}u[1]$$

$$x[3] = \underline{A}x[2] + \underline{B}u[2] = \underline{A}^3x[0] + \underline{A}^2\underline{B}u[0] + \underline{A}\underline{B}u[1] + \underline{B}u[2]$$

...

Észrevehetjük, hogy a következő összefüggés áll fenn:

$$x[k] = \underbrace{\underline{A}^k x[0]}_{\substack{\text{zérus} \\ \text{gerjesztésű} \\ \text{tag}}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \underline{A}^{k-i-1} \underline{B}u[i]}_{\text{zérus állapotú tag}}, k \geq 1$$

Ezt a válasz kifejezésébe behelyettesítve, adódik:

$$y[k] = \begin{cases} \underline{C}^T \underline{x}[0] + Du[0], k = 0 \\ \underline{C}^T \underline{A}^k x[0] + \underline{C}^T \sum_{i=0}^{k-1} \underline{A}^{k-i-1} \underline{B}u[i] + Du[k], k \geq 1 \end{cases}$$

3. Impulzusválasz számítása az előbbieken alapján:

A gerjesztés a belépő egységimpulzus, tehát az állapotváltozók kezdeti értéke zérus,  $u[k] = \delta[k]$ ,  $\underline{x}[0] = 0$ . Ebben az esetben a válasz:

$$h[k] = \begin{cases} D\delta[0], k = 0 \\ \underline{C}^T \sum_{i=0}^{k-1} \underline{A}^{k-i-1} \underline{B}\delta[i] + D\delta[k], k \geq 1 \rightarrow \underline{C}^T \underline{A}^{k-1} \underline{B} \\ h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1] \underline{C}^T \underline{A}^{k-1} \underline{B} \end{cases}$$

5.  $\underline{A}^k$  számítása:

Lagrange-mátrixokkal:

Mátrixfüggvényeket definiálhatunk a sajátértékeik és Lagrange-mátrixaik segítségével. Egyszeres sajátértékek esetén a következő módon:

$$f(\underline{A}) = \sum_{i=1}^N f(\lambda_i) \underline{L}_i \text{ ahol } \underline{L}_i = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^N \frac{\underline{A} - \lambda_p \underline{E}}{\lambda_i - \lambda_p}, \text{ és } |\underline{A} - \lambda_p \underline{E}| = 0$$

Számunkra fontos a hatványozás, mint függvény  $f(x) = x^k$ -t alkalmazva kapjuk:

$$\underline{A}^k = \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \underline{L}_i$$

Többszörös zérus sajátértékek ( $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  egyszeres és  $\lambda_{M+1}, \dots, \lambda_N = 0$ ) esetén a fenti képlet a következőképpen alakul:

$$\underline{A}^k = \sum_{i=1}^M \lambda_i^k \underline{L}_i, \text{ csak } k \geq M - \text{re érvényes ahol}$$

$$\underline{L}_i = \frac{\underline{A}^{N-M}}{\lambda_i^{N-M}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^M \frac{\underline{A} - \lambda_p \underline{E}}{\lambda_i - \lambda_p}, i = 1, \dots, M$$

Spektrális felbontással:

A matematikai tanulmányaik során megismert módon is előállíthatjuk mátrixok hatványait. Egyszeres sajátértékek esetén, a sajátvektorok által meghatározott bázisba áttérve, a mátrix diagonálissá ( $\underline{\Lambda}$ ) válik, és tudjuk, hogy diagonális mátrixok  $k$ . hatványa úgy állítható elő, hogy a főátló elemeit  $k$ . hatványra emeljük.

Tehát  $\underline{A} = \underline{M} \underline{\Lambda} \underline{M}^{-1}$ , ahol  $\underline{M}$  a sajátvektorokból álló úgynevezett módálmátrix. Mindkét oldalt  $k$ . hatványra emelve:

$$(\underline{A})^k = (\underline{M}^{-1} \underline{A} \underline{M})^k = \underline{M}^{-1} \underbrace{\underline{A} \underline{M} \underline{M}^{-1}}_{=\underline{E}} \underline{A} \underline{M} \dots = \underline{M}^{-1} (\underline{A})^k \underline{M}$$

Ezek alapján a keresett  $(\underline{A})^k$  mátrix a következő formában áll elő:

$$(\underline{A})^k = \underline{M} (\underline{\Lambda})^k \underline{M}^{-1}$$

A módszer használatához mátrixinvertálást, mátrixszorzást, és skalár számok hatványozását kell csupán használnunk, melyek nem túl bonyolult műveletek, akár kézzel is elvégezhetők.

Többszörös sajátértékek esetén a  $\underline{\Lambda}$  mátrix nem diagonális, hanem úgynevezett Jordan-normálformát kapunk, mely a számításokat lényegesen nem nehezíti, de ezt most nem ismertetjük.

## V. Aszimptotikus stabilitás

Ezen témakörben az állapotváltozók viselkedését vizsgáljuk a gerjesztés megszűnése esetén. A rendszer aszimptotikusan stabilis, amennyiben  $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}[k] = 0$ , ha  $u[k] = 0 \ k \geq K$  esetén.

### 1. Az aszimptotikus stabilitás feltételei:

Ha  $u[k] = 0$  akkor az állapotváltozós leírás a korábbiakban levezetett összefüggés alapján a következő alakban írható:  $\underline{x}[k] = \underline{A}^k \underline{x}[0]$ . A spektrálfelbontás alapján számolhatjuk  $\underline{A}^k$ -t egyszeres sajátértékek esetén:

$$\underline{A} = \underline{M} \underline{\Lambda} \underline{M}^{-1} \rightarrow \underline{A}^k = \underline{M} \underline{\Lambda}^k \underline{M}^{-1}, \text{ ahol } \underline{\Lambda}^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_N^k).$$

Ebből adódik, hogy  $k \rightarrow \infty$  esetén az állapotváltozók értékei csak akkor tarthatnak nullába, ha a sajátértékek abszolút értéke kisebb egynél, mivel ekkor az  $\underline{A}$  mátrix hatványai azonosan nulla mátrixhoz tartanak.

$$\lambda_i^k = (r_i e^{j\beta_i})^k = r_i^k e^{jk\beta_i} \rightarrow |\lambda_i^k| = r_i^k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k = 0 \Leftrightarrow r_i = |\lambda_i| < 1$$

A fentiek alapján az aszimptotikusan stabilis szükséges és elégséges feltétele a  $|\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, N$ , tehát a sajátértékeknek az egység körön belül kell esniük.

### 2. Jury-kritérium:

Ahogy folytonos esetben, a Hurwitz-kritérium segítségével tudtuk egyszerűen eldönteni a karakterisztikus egyenlet alapján az aszimptotikus stabilitást, úgy diszkrét időben is megfogalmazhatunk hasonló kritériumot.

#### a. Hurwitz-kritérium:

A Hurwitz-kritérium egyszerű szükséges, de nem elégséges matematikai kritérium, mellyel polinomok gyökeinek valósrészeinek előjelét tudjuk eldönteni.

$$x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x + a_N = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) = 0$$

$$\text{Re}\{x_i\} < 0, \forall i \rightarrow a_i > 0, \forall i$$

Másodrendű esetben a kritérium szükséges és elégséges is:

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

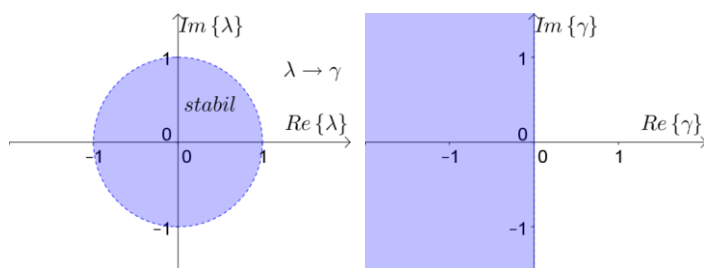
$$\text{Re}\{x_{1,2}\} < 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } a_{1,2} > 0$$

Mivel folytonos rendszerek esetén az aszimptotikus stabilitás szükséges és elégséges feltétele a sajátértékek bal félsíkra esése, ezért a Hurwitz-kritérium egy az egyben az aszimptotikus stabilitásról nyilatkozik.

Diszkrét időben hasonló kritériumot szeretnénk megfogalmazni, melyhez a Hurwitz-kritérium transzformálása lesz segítségünkre.

b. A stabilitási tartomány transzformálása:

A Hurwitz-kritériumot úgy szeretnénk módosítani, hogy a bal félsíkot az egységkörön belülre képezzük a bilineáris transzformáció segítségével.



Bilineáris transzformáció szemléltetése

Tekintsük a másodrendű esetet, mivel ekkor a Hurwitz-kritérium szükséges és elégséges is:  $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ .

Legyen  $\gamma = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$ , mely egy bilineáris transzformáció, ebből  $\lambda = -\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$ .

Ezt visszahelyettesítve:  $\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\right)^2 - a_1\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\right) + a_2 = 0$  adódik.

A kifejezést kifejtve, majd az így kapott egyenletre a Hurwitz-kritériumot alkalmazva a következő feltételrendszert kapjuk:

$$\gamma^2(1 - a_1 + a_2) + \gamma(2 - 2a_2) + (1 + a_1 + a_2) = 0$$

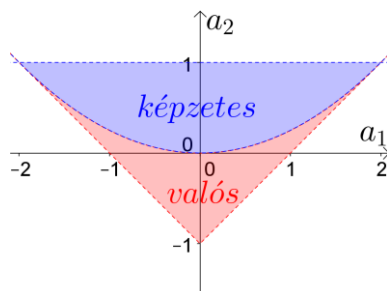
$$\begin{cases} 1 - a_1 + a_2 > 0 \\ 2 - 2a_2 > 0 \\ 1 + a_1 + a_2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_2 < 1 \\ |a_1| < 1 + a_2 \end{cases}$$

A fenti másodfokú egyenlet valós és képzetes gyökeit a diszkrimináns segítségével választhatjuk szét:

$$D = 4(1 - a_2)^2 - 4(1 - a_1 + a_2)(1 + a_1 + a_2) = 0 \rightarrow a_2 = \frac{a_1^2}{4}$$

c. Stabilitási háromszög

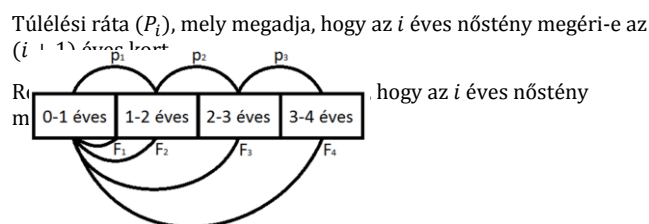
A fenti feltételeket egy ábrán könnyen szemléltethetjük:



## VI. Leslie-modell (1945)

### 1. Lineáris modell állapotpopuláció fejlődésére

Vizsgáljuk évente a Réz-folyó *Oncorhynchus nerka* (vörös lazac) nőstény populációját. A megfigyeléseink során a következő paraméterek adódnak:



Korlátlan élettér esetén exponenciális növekedési rátát várunk. Ebben az esetben aszimptotikus (állandósult) koreloszlás, korarány alakul ki, melyet korfának nevezünk.

### 2. A megfigyeléseink leírása DI rendszerrel

Legyen  $x_i[k]$  az  $(i-1)$  és  $i$  év kor közötti nőstények száma a  $k$ . évben.

$x_1[k+1] = F_1x_1[k] + F_2x_2[k] + F_3x_3[k] + F_4x_4[k]$ , mivel a 0-1 évesek kizárólag az idősebbek szaporulatából adódhatnak.

$x_2[k+1] = P_1x_1[k]$ , az első évüket sikeresen túlélő nőstények száma.

$x_3[k+1] = P_2x_2[k]$ , a második évüket sikeresen túlélő nőstények száma.

$x_4[k+1] = P_3x_3[k]$ , a harmadik évüket és az összes medvetámadást sikeresen túlélő nőstények száma.

Az állapotmátrix ekkor a következő módon néz ki:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 \end{bmatrix} \text{ Leslie-mátrix}$$

A karakterisztikus egyenletet felírva:

$$\lambda^4 - F_1\lambda^3 - F_2P_1\lambda^2 - F_3P_1P_2\lambda - F_4P_1P_2P_3 = 0$$

Az állapotegyenletek megoldása Lagrange-mátrixok segítségével:

$$\underline{x}[k] = \underline{A}^k \underline{x}[0], k \geq 1$$

$$\underline{A}^k = \lambda_1^k \underline{L}_1 + \lambda_2^k \underline{L}_2 + \lambda_3^k \underline{L}_3 + \lambda_4^k \underline{L}_4$$

## Kiegészítő tananyag

## 3. Számpélda:

$$F_1 = 0; F_2 = 0; F_3 = 2000; F_4 = 5000$$

$$P_1 = 0.5\%; P_2 = 7\%; P_3 = 20\%$$

Ekkor:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2000 & 5000 \\ 0.005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.07 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^4 - 0.07\lambda - 0.35 = 0$$

$$\lambda_1 = 1.015; \lambda_{2,3} = -0.285 \pm 0.834j = 0.88e^{\pm 1.9j}; \lambda_4 = 0.444$$

*nem stabil*

Jól láthatóan nem stabil a rendszer, melynek biológiai jelentése ebben az esetben, hogy a populáció nincs kihalásra ítélve.

Ha  $k$  elég nagy, akkor  $\underline{A}^k$  közelíthető  $1.015^k \underline{L}_1$  alakban.

$$\underline{L}_1 = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq 1}}^4 \frac{\underline{A} - \lambda_p \underline{E}}{\lambda_1 - \lambda_p} = \begin{bmatrix} 0.360.94 & 883.48 & 1479.63 \\ 0 & 0.3 & 4.35 & 7.29 \\ 0 & 0.02 & 0.3 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.06 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}[k] = \underline{A}^k \underline{x}[0] \cong (1.015)^k \cdot \underline{L}_1 \cdot \underline{x}[0]$$

Vizsgáljunk meg két lehetséges kiindulási állapotot:

a. Legyen  $\underline{x}[0] = [1000 \ 1000 \ 1000 \ 1000]$

$$\underline{x}[k] \cong (1.015)^k \underbrace{\begin{bmatrix} 2.42 \cdot 10^6 \\ 11940 \\ 824 \\ 163 \end{bmatrix}}_{\underline{L}_1 \cdot \underline{x}[0]} \sim \begin{bmatrix} 0 - 1 \text{ évek} \\ 1 - 2 \text{ évek} \\ 2 - 3 \text{ évek} \\ 3 - 4 \text{ évek} \end{bmatrix}$$

Ebben az esetben hosszú idő után az újszülött populáció nem mérhető az idősebbekhez. Az öregebbek száma közt a

$$\text{következő arányok állnak fenn: } \begin{bmatrix} 92.4\% \\ 6.3\% \\ 1.3\% \end{bmatrix}.$$

b. Legyen  $\underline{x}[0] = [1000 \ 500 \ 250 \ 125]$

$$\underline{x}[k] = (1.015)^k \underbrace{\begin{bmatrix} 4.37 \cdot 10^5 \\ 2149 \\ 148 \\ 28 \end{bmatrix}}_{\underline{L}_1 \cdot \underline{x}[0]} \sim \begin{bmatrix} 0 - 1 \text{ évek} \\ 1 - 2 \text{ évek} \\ 2 - 3 \text{ évek} \\ 3 - 4 \text{ évek} \end{bmatrix}$$

Ebben az esetben is az öregebbek száma közt a következő

$$\text{arányok állnak fenn: } \begin{bmatrix} 92.4\% \\ 6.3\% \\ 1.3\% \end{bmatrix}, \text{ tehát sejthető, hogy az}$$

aszimptotikus korfa alakja a kiindulástól független.

## 9. Szinuszos állandósult állapot

### I. A DI szinuszos jel

$x[k] = \hat{X} \cos(\vartheta_0 k + \rho)$  jel akkor és csak akkor periodikus, ha  $\frac{\vartheta_0}{2\pi} = \frac{M}{L}$ , ahol mind a nevező, mind a számláló egész szám. Ahogy az 5. fejezet elején megfigyeltük a koszinusz függvény nem feltétlenül periodikus diszkrét időben!

A  $\frac{\vartheta_0}{2\pi}$  tört tovább nem egyszerűsíthető alakjának nevezője a periódus ( $L$ ), melyből a körfrekvencia  $\vartheta_0$  nem határozható meg egyértelműen.

Commented [MD4]:

#### 1. Komplex leírás:

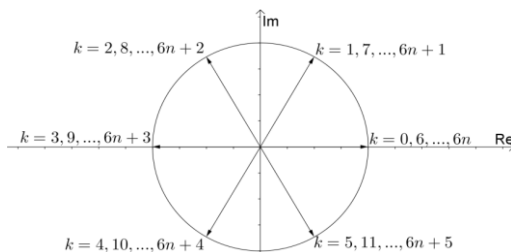
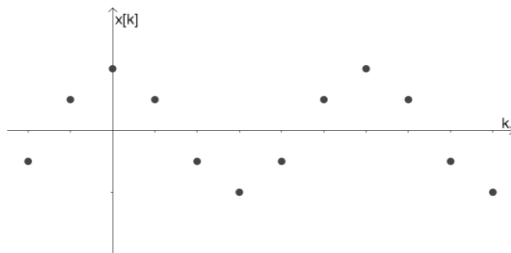
Mint folytonos időben, a koszinuszos jeleket egy komplex függvény valós részének tekintjük. Az Euler-alaknak megfelelően:

$$\operatorname{Re}\{\hat{X}e^{j(\vartheta_0 k + \rho)}\} = \operatorname{Re}\{\hat{X} \cos(\vartheta_0 k + \rho) + \hat{X}j \sin(\vartheta_0 k + \rho)\} = \hat{X} \cos(\vartheta_0 k + \rho).$$

Tudjuk, hogy  $x[k] = \operatorname{Re}\{\hat{X}e^{j(\vartheta_0 k + \rho)}\} = \operatorname{Re}\{\hat{X}e^{j\vartheta_0 k}e^{j\rho}\}$  melyből adott frekvencián definiálhatjuk az  $\hat{X}e^{j\rho}$  komplex amplitúdót, ami egy  $\vartheta_0$  szögsebességgel körbeforgó komplex vektorként (fazorként) képzelhető el.

$$\text{Példa : } x[k] = \cos\left[\frac{\pi}{3}k\right] = \operatorname{Re}\left\{1 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}k}\right\}$$

$$\hat{X} = 1, \rho = 0, \vartheta_0 = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6} \rightarrow L = 6$$



#### 2. Műveletek időfüggvényekkel és fazorokkal:

Legyenek  $x_1[k], x_2[k], \dots, x_n[k]$  azonos  $\vartheta_0$  körfrekvenciájú szinuszos jelek. Ekkor a fazorokon és időfüggvényeken végzett műveletek közt az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$\text{a. } x_3[k] = x_2[k] + x_1[k] \quad \Leftrightarrow \quad \bar{X}_3 = \bar{X}_2 + \bar{X}_1$$

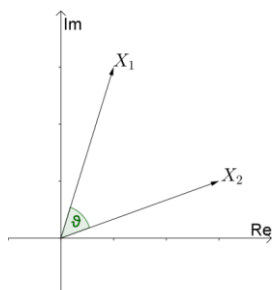
$$\text{b. } x_2[k] = Kx_1[k] \quad \Leftrightarrow \quad \bar{X}_2 = K\bar{X}_1$$

$$\text{c. } x_2[k] = x_1[k-1] \quad \Leftrightarrow \quad \bar{X}_2 = \bar{X}_1 e^{-j\vartheta_0}$$

Bizonyítás:

$$\operatorname{Re}\{\bar{X}_2 e^{j\vartheta_0 k}\} = \operatorname{Re}\{\bar{X}_1 e^{j\vartheta_0(k-1)}\} = \operatorname{Re}\{\bar{X}_1 e^{j\vartheta_0 k} e^{-j\vartheta_0}\}, \forall k$$

Tehát:  $\bar{X}_2 = \bar{X}_1 e^{-j\vartheta_0}$ , ami az alábbi ábrán is látható.



Példa:

$$x_1[k] = 2 \cos(\vartheta_0 k) \text{ és } x_2[k] = 3x_1[k-2] \text{ valamint } \vartheta_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Határozzuk meg a fazorok segítségével  $x_2[k]$  időfüggvényét:

$$\bar{X}_1 = 2 \rightarrow \bar{X}_2 = 3\bar{X}_1 e^{-j2\vartheta_0}$$

$$x_2[k] = 3 \cdot 2 \cos(\vartheta_0 k - 2\vartheta) = 6 \cos\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Példa:

$$x_1[k] = 3 \cos\left(\vartheta_0 k - \frac{\pi}{3}\right) \text{ és } x_2[k] = 5 \cos(\vartheta_0 k + 1.1)$$

Határozzuk meg az  $x_3[k] = x_1[k] + x_2[k]$  időfüggvényét a fazorok segítségével:

$$\bar{X}_1 = 3e^{-j\frac{\pi}{3}} = 1.5 - 2.6j$$

$$\bar{X}_2 = 5e^{-j1.1} = 2.27 + 4.46j$$

$$\bar{X}_3 = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 = 3.77 + 1.86j = 4.2e^{0.46j}$$

$$x_3[k] = 4.2 \cos(\vartheta_0 k + 0.46)$$



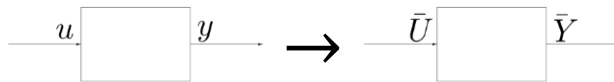
## II. Rendszeranalízis szinuszos állandósult állapotban

Mint folytonos időben, a válasz felbontható szabad, és gerjesztett összetevők összegére,  $y[k] = y_f[k] + y_g[k]$ . Ha a rendszer gerjesztés-válasz stabilis, akkor megfelelő idő eltelte után a szabad összetevő lecseng és a válasz tisztán gerjesztett összetevőből áll,  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_f[k] = 0$  és  $\lim_{k \rightarrow \infty} y[k] = y_g[k]$ . Mivel a gerjesztett összetevő a gerjesztéshez hasonló alakú a linearitás miatt, ezért szinuszos gerjesztés esetén valóban beáll a szinuszos állandósult állapot,  $u[k] = U \cos(\vartheta_0 k + \rho_u) \rightarrow y_g[k] = Y \cos(\vartheta_0 k + \rho_y)$ .

### 1. Átviteli tényező és karakterisztika:

Pontosan úgy, ahogy a folytonos idejű rendszerek esetén megszoktuk, adott frekvencián a komplex számítási módot alkalmazzuk. A linearitás következtében a rendszer csak az amplitúdón és a fázison módosíthat, melyet egy komplex szám teljesen leír, ezt átviteli tényezőnek nevezzük, és mindig csak adott frekvencián értelmezzük. A választ adott frekvenciájú szinuszos gerjesztésre az őt reprezentáló fázor és az ezen a frekvencián érvényes átviteli tényező szorzatának segítségével kapjuk.

Amennyiben a frekvenciával, mint folytonos paraméterrel számolunk, az átviteli tényezőt a frekvencia függvényében kapjuk meg, és ezt átviteli karakterisztikának nevezzük.



Ha  $u[k] = \text{Re}\{\bar{U}e^{j\vartheta k}\}$  és  $y[k] = \text{Re}\{\bar{Y}e^{j\vartheta k}\}$ , akkor  $\frac{\bar{Y}}{\bar{U}}$   
 $= \bar{H}$  átviteli tényező, melyből

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} \text{ átviteli karakterisztika.}$$

Az átviteli karakterisztika felbontható egy amplitúdó- és egy fázis-karakteristikára,  $H(e^{j\vartheta}) = K(\vartheta)e^{j\varphi(\vartheta)}$ .

$K(\vartheta)$ - amplitúdó karakterisztika

$\varphi(\vartheta)$  - fáziskarakterisztika

Az átviteli karakterisztika tulajdonságai:

A  $H(e^{-j\vartheta}) = H(e^{j\vartheta})^*$ , ebből adódóan  $K(-\vartheta) = K(\vartheta)$  páros függvény,  
 míg  $\varphi(-\vartheta) = -\varphi(\vartheta)$  páratlan függvény.

A folytonos időtől eltérően az exponenciális függvény periodicitása miatt az átviteli karakterisztika is periodikus,  $H(e^{-j(\vartheta+2\pi)}) = H(e^{-j\vartheta})$ ,  $\forall \vartheta$ .

Csak akkor értelmezzük átviteli karakterisztikát, ha gerjesztés-válasz stabilis, ekkor az amplitúdó karakterisztikája korlátos, mivel minden frekvencián a válasz korlátos gerjesztésre korlátos.  
 $K(\vartheta) \in \mathbb{R}, \forall \vartheta \leftarrow$  Gerjesztés-válasz stabilis.

2.  $H(e^{j\theta})$  és a rendszeregyenlet kapcsolata:

Tekintsünk egy általános rendszeregyenletet:

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + \dots + b_m u[k-m]$$

Mindkét oldalon az egyes időfüggvényeknek fazorokat megfeleltetve, a következő egyenlethez jutunk:

$$\bar{Y} + a_1 \bar{Y} e^{-j\theta} + \dots + a_n \bar{Y} e^{-jn\theta} = b_0 \bar{U} + \dots + b_m \bar{U} e^{-jm\theta}$$

Emeljünk ki mindkét oldalon:

$$\bar{Y}(1 + a_1 e^{-j\theta} + \dots + a_n e^{-jn\theta}) = \bar{U}(b_0 + \dots + b_m e^{-jm\theta})$$

A megfelelő tényezőkkel átosztva az átviteli karakterisztika definíciója adódik:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = \frac{b_0 + \dots + b_m e^{-jm\theta}}{1 + a_1 e^{-j\theta} + \dots + a_n e^{-jn\theta}}$$

Meg kell jegyeznünk, hogy ez a számítási mód csak formális, fizikai tartalmat, csak gerjesztés-válasz stabilis esetben hordoz. A rendszeregyenlet mint differencia egyenlet a komplex számítási mód segítségével egyszerű algebrai egyenletté transzformálható. A rendszeregyenlet az átviteli karakterisztika ismeretében a számítások visszafelé való elvégzésével kapható. Az átviteli karakterisztika normál alakján a negatív kitevőjű alakot értjük, mivel ezen formának van fizikai jelentése, azonban pozitív hatványokkal is felírható, és számolhatunk is így vele.

3.  $H(e^{j\theta})$  és az állapotváltozós leírás kapcsolata:

Tekintsük egy általános SISO rendszer állapotváltozós leírását:

$$\underline{x}[k+1] = \underline{A} \underline{x}[k] + \underline{B} u[k]$$

$$y[k] = \underline{C}^T \underline{x}[k] + D u[k]$$

A gerjesztés-válasz stabilitáshoz nem szükséges feltétel az aszimptotikus stabilitás, de ha a válasz kialakításában szereplő állapotváltozók szabad összetevői lecsengenek, akkor az állapotegyenletekre formálisan alkalmazhatjuk a komplex számítási módot, ekkor az alábbi algebrai egyenletrendszer adódik:

$$\underline{\bar{X}} e^{j\theta} = \underline{A} \underline{\bar{X}} + \underline{B} \bar{U} \rightarrow \underline{\bar{X}} = (e^{j\theta} \underline{A} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \bar{U}$$

$$\bar{Y} = \underline{C}^T \underline{\bar{X}} + D \bar{U}$$

Melyet megoldva:

$$\bar{Y} = \underline{C}^T (e^{j\theta} \underline{A} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \bar{U} + D \bar{U}$$

A megfelelő tényezőkkel átosztva adódik az átviteli karakterisztika:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = \underline{C}^T (e^{j\theta} \underline{A} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + D$$

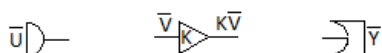
4. Hálózati reprezentáció  $H(e^{j\theta})$  alapján:

$H(e^{j\theta})$  ismeretében a rendszeregyenlet meghatározható, melyből a korábban ismertett módon kanonikus hálózatot rajzolhatunk fel.

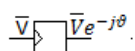
5.  $H(e^{j\theta})$  meghatározása hálózat alapján:

Az átviteli karakterisztikát közvetett módon ki tudjuk fejezni a hálózatból. Az állapotváltozós egyenletekből a már megismert módon kifejezhetjük  $H(e^{j\theta})$ -t, az egyenleteket pedig a hálózatra fel tudjuk írni.

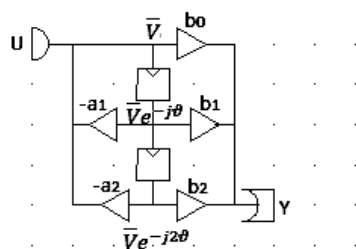
Az átviteli karakterisztikát közvetlenül is meghatározhatjuk a hálózat alapján, ha az elemek karakterisztikáját is a komplex számítási módnak megfelelően változtatjuk.



Az egyetlen elem, melynek karakterisztikája szignifikánsan változik, a késleltető, ahogy már láttuk, a késleltetésnek  $e^{-j\theta}$  szorzó felel meg:



Példa:



A számítások elvégzéséhez vezessünk be egy  $\bar{V}$  segédváltozót, melyet tetszőleges helyre felvehetünk, azonban nem mindegyik választás célszerű. A számítások itt is az összegzőkre felírt egyenletekkel végezendők.

$$\bar{V} = -a_1 \bar{V}e^{-j\theta} - a_2 \bar{V}e^{-j2\theta} + \bar{U} \rightarrow \bar{V} = \frac{\bar{U}}{1 + a_1 e^{-j\theta} + a_2 e^{-j2\theta}}$$

$$\bar{Y} = b_0 \bar{V} + b_1 \bar{V}e^{-j\theta} + b_2 \bar{V}e^{-j2\theta} = \bar{V}(b_0 + b_1 e^{-j\theta} + b_2 e^{-j2\theta})$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\theta} + b_2 e^{-j2\theta}}{1 + a_1 e^{-j\theta} + a_2 e^{-j2\theta}}$$

Melyből a rendszeregyenlet:

$$y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + b_2 u[k-2]$$

- Az  $H(e^{j\theta})$  alapján ki tudjuk fejezni a  $h[k]$  impulzusválaszt, de ehhez szükségünk lesz a diszkrét idejű inverz Fourier transzformációra, így ezt jelenleg nem tárgyaljuk.
- Az átviteli karakterisztikát az amplitúdó és fáziskarakterisztika segítségével ábrázolhatjuk. Az  $H(e^{j\theta})$  tulajdonságai alapján (periodicitás és paritás) elég csak a  $[0, \pi]$  intervallumon ábrázolnunk ezeket.

# 10. Periodikus állandósult állapot

## I. A DI periodikus jel

- Adott  $x[k]$  jel periodikus, ha létezik olyan  $L$  érték, amelyre minden  $k$  esetén  $x[k + L] = x[k]$ . A lehetséges  $L$  értékek minimumát az  $x[k]$  jel periódusidejének nevezzük.
- Az  $L$  periódusidejű  $x[k]$  jel jellemzői:
  - Folytonos idővel ellentétben a körfrekvencia alapján nem egyértelmű a periódusidő.
  - (Egyszerű) Középérték:

$$X_0 = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[k]$$

- Abszolút középérték:

$$X_a = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} |x[k]|$$

- Effektív érték:

$$X_{eff} = X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} |x[k]|^2}$$

- Teljesítmény:

$$P_x = X_{eff}^2 = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} |x[k]|^2$$

Példa: Számoljuk ki az újonnan definiált értékeket az  $x[k] = 2 \cdot \cos\left(\frac{6}{13}\pi \cdot k\right)$  jelre!

$$\frac{M}{L} = \frac{\frac{6}{13}\pi}{2\pi} = \frac{6}{26} = \frac{3}{13} \rightarrow L = 13$$

$$X_0 = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[k] = \frac{1}{13} \sum_{k=0}^{12} 2 \cdot \cos\left(\frac{6}{13}\pi \cdot k\right) = 0$$

$$X_a = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} |x[k]| = \frac{1}{13} \sum_{k=0}^{12} \left| 2 \cdot \cos\left(\frac{6}{13}\pi \cdot k\right) \right| = 1.2763$$

$$P_x = X_{eff}^2 = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} |x[k]|^2 = \frac{1}{13} \sum_{k=0}^{12} \left| 2 \cdot \cos\left(\frac{6}{13}\pi \cdot k\right) \right|^2 = 2 \rightarrow X_{eff} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

## II. Diszkrét Fourier-sor (DFT – Discrete Fourier Transform)

Ahogy a folytonos periodikus jelek felbonthatóak voltak szinuszokra és koszinuszokra, úgy a diszkrét periodikus jeleket is felbonthatjuk. A felbontást a diszkrét Fourier-sorfejtés segítségével tehetjük meg, melynek jellemzően a komplex alakját számoljuk, és csak utána térünk át valós alakra. A diszkrét Fourier-sorfejtés nagyon hasonló az FFT algoritmushoz. A folytonos esettől eltérően ez pontos, az eredeti jel mindig pontosan előáll!

### 1. Komplex alak:

A jel előáll  $x[k] = \sum_{p=0}^{L-1} X_p^C e^{jpk\vartheta_0}$  alakban, ahol  $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{L}$  – DI alapkörfrekvencia és

$$X_p^C = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[k] e^{-jpk\vartheta_0}, \text{ ahol } p = 0, 1, \dots, L-1.$$

Ha  $x[k]$  valós, akkor  $X_{L-p}^C = (X_p^C)^*$  komplex konjugált párok.

$$x^*[k] = \left[ \sum_{p=0}^{L-1} X_p^C e^{jpk\vartheta_0} \right]^* = \sum_{p=0}^{L-1} (X_p^C)^* e^{-jpk\vartheta_0} = \sum_{p=0}^{L-1} (X_p^C)^* e^{j(L-p)k\vartheta_0} = \sum_{p=0}^{L-1} (X_{L-p}^C)^* e^{jpk\vartheta_0}$$

$$x[k] \text{ valós} \rightarrow x[k] = x^*[k] \rightarrow \sum_{p=0}^{L-1} X_p^C e^{jpk\vartheta_0} = \sum_{p=0}^{L-1} (X_{L-p}^C)^* e^{jpk\vartheta_0} \rightarrow X_{L-p}^C = (X_p^C)^*$$

### 2. Valós alak:

Itt is bevezethetnénk matematikai és mérnöki valós alakot, de számításinkhoz elég csupán a mérnöki valós alak. Bár először a komplex alakját számoljuk ki a Fourier-sornak, mégis a valós alakkal lesz érdemes tovább számolni, mely a komplex alakból könnyen meghatározható.

Ekkor a jel a következő alakban áll elő:  $x[k] = X_0 + \sum_{p=0}^N X_p \cos(p\vartheta k + \rho_p)$ , ahol

$$N = \begin{cases} \frac{L}{2}, L \text{ páros} \\ \frac{L-1}{2}, L \text{ páratlan} \end{cases}$$

Áttérés az egyes alakok közt:

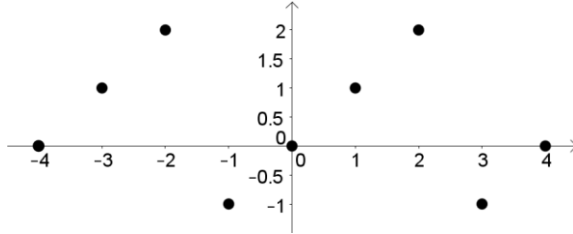
$$X_p = 2 \cdot |X_p^C|, \text{ ha } X_p^C \text{ komplex és } X_p^C = (X_{L-p}^C)^*$$

$$\rho_p = \arg(X_p^C)$$

### 3. Parseval-tétele a jel energiájára vonatkozóan:

$$P_x = \sum_{p=0}^{L-1} |X_p^C|^2$$

4. Példa: Tekintsük a következő 4 periódusú jelet:



$$x[0] = 0, x[1] = 1, x[2] = 2, x[3] = -1, x[k+4] = x[k], \forall k$$

Határozzuk meg a fenti jel Fourier-sorát.

$$L = 4 \rightarrow \vartheta_0 = \frac{2\pi}{L} = \frac{\pi}{2}$$

$$X_p^C = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[k] e^{-jpk\vartheta_0}, \text{ melybe } p \text{ és } k \text{ értékeit behelyettesítve:}$$

$$p = 0: \quad X_0 = \frac{1}{4}(0 + 1 + 2 - 1) = 0.5$$

$$p = 1: \quad X_1^C = \frac{1}{4}(0 + 1e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j\pi} - 1e^{-j\frac{3\pi}{2}}) = -0.5 - 0.5j = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

$$p = 2: \quad X_2^C = \frac{1}{4}(0 + 1e^{-j\pi} + 2e^{-j2\pi} - 1e^{-j3\pi}) = 0.5$$

$$p = 3: \quad X_3^C = \frac{1}{4}(0 + 1e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 2e^{-j3\pi} - 1e^{-j\frac{9\pi}{2}}) = -0.5 + 0.5j = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{A jelet az alábbi kifejezéssel kapjuk vissza: } x[k] = \sum_{p=0}^{L-1} X_p^C e^{jpk\vartheta_0}$$

$$x[k] = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}k} + 0.5e^{-j\pi k} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{3\pi}{4}}e^{j\frac{3\pi}{2}k}}_{\substack{\text{a második tag} \\ \text{konjugáltja}}}$$

A két exponenciális tag a  $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$  kifejezés alapján átalakítható.

Valamint még azt kell figyelembe vennünk, hogy

$(e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}k})^* = e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{2}k} = e^{j\frac{3\pi}{4}}e^{j\frac{3\pi}{2}k}$ , mely a komplex vektorok ábrázolásakor jól látszik. Ezen megfontolások alapján:

$$x[k] = 0.5 + \frac{2}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4}\right) + 0.5 \underbrace{\cos(\pi k)}_{(-1)^k}$$

Ha  $L$  páros, akkor a  $p = 0$  tagon kívül a  $p = \frac{L}{2}$  tag is tisztán valós. Ezen értékek nem lehetnek komplexek mivel akkor komplex konjugált párjaiknak is meg kéne jelenniük, ahhoz hogy  $x[k]$  jel maga is valós maradjon. A többi tagok komplex konjugált párokat alkotnak. Ha  $L$  páratlan akkor csak a  $p = 0$  tag tisztán valós.

### III. Válaszjel számítása

Adott frekvenciájú gerjesztés esetén a linearitásból következően a válasz is ugyanolyan frekvenciájú periódikus jel.

Matematikailag:  $u[k + L] = u[k], \forall k \xrightarrow{\text{linearitás}} y[k + L] = y[k], \forall k$

Vegyünk egy tetszőleges periodikus gerjesztést, melyet állítsunk elő a Fourier-sorával. Ekkor a válaszban csak ugyanolyan frekvenciájú tagok fordulhatnak elő. A gerjesztés-válasz kapcsolatot a következőképpen írhatjuk le.

A gerjesztés egyes felharmonikusainak feleltessünk meg egy-egy komplex amplitúdót, így a komplex számítási módot alkalmazhatjuk. Minden frekvencián meghatározhatjuk a rendszer átviteli tényezőjét, mely szintén egy komplex érték. A válasz adott frekvenciájú összetevői a megfelelő komplex értékek szorzatából fejezhetők ki. Tehát matematikailag:

$$u[k] = U_0 + \sum_{p=1}^N U_p \cos(p\vartheta_0 k + \rho_{u,p}) \rightarrow \bar{U}_p = \begin{cases} U_0, p = 0 \\ U_p e^{j\rho_{u,p}}, p > 0 \end{cases}$$

$$\bar{H}_p = H(e^{j\vartheta})|_{\vartheta=p\vartheta_0} = H(e^{jp\vartheta_0}), \text{ ekkor}$$

$$\bar{Y}_p = \bar{H}_p \cdot \bar{U}_p \rightarrow Y_p \cos(p\vartheta_0 k + \rho_{y,p})$$

$$Y_p = |H(e^{jp\vartheta_0})| \cdot U_p$$

$$\rho_{y,p} = \rho_{u,p} + \arg(H(e^{jp\vartheta_0}))$$

A szuperpozíció elvét használva:

$$y[k] = Y_0 + \sum_{p=1}^N Y_p \cos(p\vartheta_0 k + \rho_{y,k})$$

$$y[k] = U_0 \cdot H(e^{j0}) + \sum_{p=1}^N U_p H(e^{jp\vartheta_0}) \cos[p\vartheta_0 k + (\rho_{u,p} + \arg(H(e^{jp\vartheta_0})))]$$

# 11. DI jelek és rendszerek általános leírása a frekvenciatartományban

## I. DI Fourier transzformáció

Definiáljuk a folytonos idejű Inverz Fourier-transzformációhoz hasonlóan a diszkrét idejű Inverz Fourier transzformációt:

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{jk\vartheta} d\vartheta = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\vartheta})\}$$

Egy jel spektrumát az inverz transzformáció segítségével definiáljuk. A spektrum meglétének elégséges, de nem szükséges feltétele a jel abszolút összegezhetősége, ekkor a spektrumot az alábbi képlettel számolhatjuk:

$$X(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\vartheta}$$

$\mathcal{F}\{x[k]\} = X(e^{j\vartheta})$  az  $x[k]$  jel spektruma, melynek abszolút értéke a jel amplitúdó spektruma és argumentuma a fázisspektrum.

$X(e^{j\vartheta})$  a spektrum

$K(\vartheta) = |X(e^{j\vartheta})|$  az amplitúdó-spektrum

$\varphi(\vartheta) = \arg(X(e^{j\vartheta}))$  a fázisspektrum

$x[k]$  valós  $\leftrightarrow X(e^{-j\vartheta}) = (X(e^{j\vartheta}))^* \begin{cases} X(-\vartheta) = X(\vartheta) \\ \varphi(-\vartheta) = -\varphi(\vartheta) \end{cases}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]^* e^{-jk\vartheta} = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{jk\vartheta} \right)^* = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk(-\vartheta)} \right)^* = (X(e^{-j\vartheta}))^*$$

$x[k]$  valós  $\leftrightarrow x[k] = (x[k])^* \leftrightarrow \mathcal{F}\{x[k]\} = \mathcal{F}\{(x[k])^*\} \leftrightarrow X(e^{j\vartheta}) = (X(e^{-j\vartheta}))^*$

$$(X(e^{j\vartheta}))^* = X(e^{-j\vartheta})$$

$x[k]$  páros és valós  $\leftrightarrow X(e^{j\vartheta})$  valós

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k] e^{-jk\vartheta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k] e^{-j(-k)(-\vartheta)} = X(e^{-j\vartheta})$$

$$\begin{matrix} x[k] \text{ páros} \\ x[k] \text{ valós} \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} x[k] = x[-k] \\ x[k] = x[-k]^* \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} X(e^{j\vartheta}) = X(e^{-j\vartheta}) \\ X(e^{j\vartheta}) = (X(e^{-j\vartheta}))^* \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} X(e^{j\vartheta}) = X(e^{-j\vartheta}) \\ X(e^{j\vartheta}) = (X(e^{-j\vartheta}))^* \end{matrix} \right\} X(e^{j\vartheta}) \text{ valós}$$

$x[k]$  páratlan és valós  $\leftrightarrow X(e^{j\vartheta})$  képzetes

$$\begin{matrix} x[k] \text{ páratlan} \\ x[k] \text{ valós} \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} x[k] = -x[-k] \\ x[k] = x[-k]^* \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} X(e^{j\vartheta}) = -X(e^{-j\vartheta}) \\ X(e^{j\vartheta}) = (X(e^{-j\vartheta}))^* \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} X(e^{j\vartheta}) = -X(e^{-j\vartheta}) \\ X(e^{j\vartheta}) = (X(e^{-j\vartheta}))^* \end{matrix} \right\} X(e^{j\vartheta}) \text{ képzetes}$$



A diszkrét idejű Fourier-transzformáció tulajdonságai és tételei:

a.  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  és  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$  lineáris operátorok, mert öröklődik az összegzés linearitása.

b. Periodicitás:

$$X(e^{j(\vartheta+2\pi)}) = X(e^{j\vartheta})$$

$$\text{Biz.: } X(e^{j(\vartheta+2\pi)}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk(\vartheta+2\pi)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\vartheta} \underbrace{e^{-jk2\pi}}_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\vartheta} = X(e^{j\vartheta})$$

c. Eltolási tétel:

$$\mathcal{F}\{x[k-r]\} = e^{-jr\vartheta} X(e^{j\vartheta})$$

$$\begin{aligned} \text{Bizonyítás: } \mathcal{F}\{x[k-r]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k-r]e^{-jk\vartheta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k-r]e^{-j(k-r+r)\vartheta} = \\ &= e^{-jr\vartheta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k-r]e^{-j(k-r)\vartheta} = e^{-jr\vartheta} X(e^{j\vartheta}) \end{aligned}$$

d. Modulációs tétel:

$$\mathcal{F}\{x[k]e^{jk\vartheta_0}\} = X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)})$$

$$\text{Bizonyítás: } \mathcal{F}\{x[k]e^{jk\vartheta_0}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{jk\vartheta_0}e^{-jk\vartheta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk(\vartheta-\vartheta_0)} = X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)})$$

e. Konvolúció tétel:

$$\mathcal{F}\{f[k] * g[k]\} = F(e^{j\vartheta}) G(e^{j\vartheta})$$

$$\text{Bizonyítás: } \mathcal{F}^{-1}\{F(e^{j\vartheta})G(e^{j\vartheta})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\vartheta})G(e^{j\vartheta})e^{jk\vartheta}d\vartheta =$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i]e^{-ji\vartheta} \right\} G(e^{j\vartheta})e^{jk\vartheta}d\vartheta = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i] \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\vartheta})e^{j(k-i)\vartheta}d\vartheta \right\}}_{g[k-i]} = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i]g[k-i] = f[k] * g[k] \end{aligned}$$

f. Parseval tétele:

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta, \text{ ahol } E_x \text{ a jel teljes energiája}$$

$$\text{Bizonyítás: } \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y^*(e^{j\vartheta})e^{-j\vartheta k}d\vartheta \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y^*(e^{j\vartheta}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\vartheta k}d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y^*(e^{j\vartheta})X(e^{j\vartheta})d\vartheta$$

$$\text{legyen } y[k] = x[k] \rightarrow x[k]y^*[k] = |x[k]|^2, X(e^{j\vartheta})Y^*(e^{j\vartheta}) = |X(e^{j\vartheta})|^2$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta})Y^*(e^{j\vartheta})d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta$$

Példák:

a.  $\mathcal{F}\{\delta[k]\} = 1$

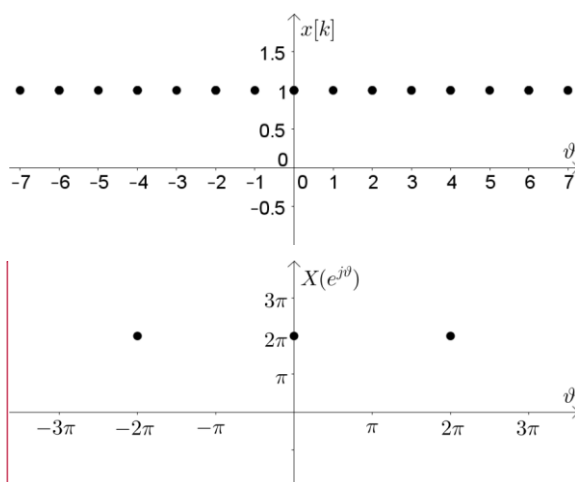
$$\mathcal{F}\{\delta[k-r]\} = e^{-j\vartheta r}$$

b.  $\mathcal{F}\{\varepsilon[k]q^k\}$

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k]q^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=0}^{\infty} (qe^{-j\vartheta})^k = \frac{1}{1-qe^{-j\vartheta}}, \text{ ha } |q| < 1$$

c.  $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\vartheta), -\pi < \vartheta < \pi$  és periódikus

$$\mathcal{F}\{1\} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\vartheta - p2\pi), \text{ mert } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\vartheta) e^{jk\vartheta} d\vartheta = 1$$



Commented [MD5]: pöttyök helyett diracok kellenének.

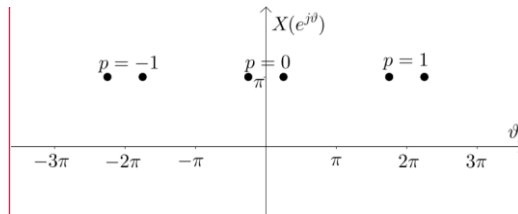
Beláthatóak az alábbi táblázatban szereplő sajátosságai mind a folytonos, mind a diszkrét idejű Fourier-transzformációnak:

| $x$                     | $\mathcal{F}\{x\}$               |
|-------------------------|----------------------------------|
| folytonos<br>periodikus | „diszkrét”, vonalas<br>spektrum  |
| diszkrét                | periodikus spektrum              |
| diszkrét,<br>periodikus | periodikus, diszkrét<br>spektrum |

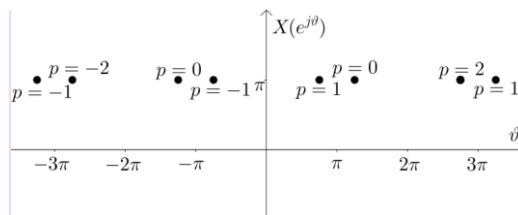
d.  $\mathcal{F}\{\cos(\vartheta_0 k)\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos(\vartheta_0 k)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}(1e^{jk\vartheta_0} + 1e^{-jk\vartheta_0})\right\} = \\ &= \pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} [\delta(\vartheta - \vartheta_0 - p2\pi) + \delta(\vartheta + \vartheta_0 - p2\pi)]\end{aligned}$$

$$\vartheta_0 < \pi$$



$$\vartheta > \pi \rightarrow \vartheta'_0 = 2\pi - \vartheta_0$$

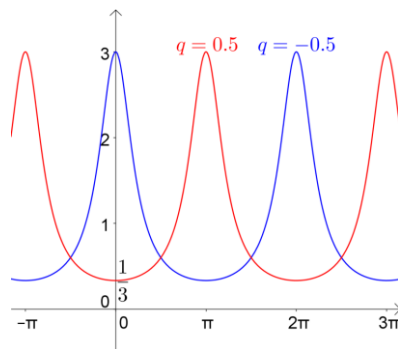


Commented [MD6]: Itt is diracok kellenének.

e.  $x[k] = q^{|k|}, q \in \mathbb{R}, |q| < 1$

$$x[k] = \varepsilon[k]q^k + \varepsilon[-k]q^{-k} - \delta[k]$$

$$X(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{1 - qe^{-j\vartheta}} + \frac{1}{1 - qe^{j\vartheta}} - 1 = \frac{1 - q^2}{1 + q^2 - 2q \cos \vartheta}$$



$$(-0.5)^k = (0.5)^k (-1)^k = 0.5^k \cos(\pi k)$$

## II. Rendszeranalízis



### 1. Gerjesztés-válasz kapcsolat:

Tegyük fel, hogy a gerjesztés ( $u[k]$ ) abszolút összegezhető, mert ekkor biztosan létezik Fourier-transzformáltja. Ekkor a gerjesztés a következő alakban áll elő:

$$u[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\vartheta}) e^{jk\vartheta} d\vartheta$$

Tekintsünk egy infinitesimalisan kicsi frekvencia tartományt, melyben a gerjesztés a következő módon áll elő:

$$du = \underbrace{\frac{1}{2\pi} U(e^{j\vartheta}) d\vartheta}_{\text{komplex amplitúdó}} e^{jk\vartheta} = \bar{U} e^{jk\vartheta}, \text{ "szinuszos" jel}$$

Ekkor a válasz a már megismert módon:

$$\bar{Y} = \bar{H} \cdot \bar{U}, \text{ ahol } \bar{H} = H(e^{j\vartheta})|_{\vartheta=d\vartheta}$$

$$dy = \bar{Y} e^{jk\vartheta} = \bar{H} \cdot \bar{U} e^{jk\vartheta} = \frac{1}{2\pi} H(e^{j\vartheta}) U(e^{j\vartheta}) e^{jk\vartheta} d\vartheta$$

A block diagram showing the integration of the response over frequency. The input is  $U(e^{j\vartheta}) e^{jk\vartheta} d\vartheta$  and the output is  $H(e^{j\vartheta}) U(e^{j\vartheta}) e^{jk\vartheta} d\vartheta$ .

$$\left. \begin{aligned} y[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\vartheta}) H(e^{j\vartheta}) e^{jk\vartheta} d\vartheta \\ y[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\vartheta}) e^{jk\vartheta} d\vartheta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{konvolúció tételből is} \\ \text{következik} \\ Y(e^{j\vartheta}) = U(e^{j\vartheta}) H(e^{j\vartheta}) \end{array}$$

$$y[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\vartheta}) \mathcal{F}\{u[k]\}\} = \mathcal{W}\{u[k]\}$$

### 2. Impulzusválasz és átviteli karakterisztika:

$$H(e^{j\vartheta}) := \frac{Y(e^{j\vartheta})}{U(e^{j\vartheta})}$$

Ha  $U(e^{j\vartheta}) = 0$ , akkor  $\frac{Y(e^{j\vartheta})}{U(e^{j\vartheta})}$  nem nyújt információt, ebből adódóan egy rendszert érdemes olyan jellel vizsgálni, melynek spektruma sehol sem nulla (pl.:  $\delta[k]$ ).

Ha  $u[k] = \delta[k]$ , akkor  $U(e^{j\vartheta}) = 1$  és  $h[k] = y[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\vartheta}) \cdot 1\}$ , tehát  $H(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{h[k]\}$ , ha  $h[k]$  abszolút összegezhető.

3. Alakhű (torzításmentes) jelátvitel:

Torzításmentes jelátvitelt valósít meg egy rendszer, amennyiben a válasz és a gerjesztés között csak időbeni eltolás és/vagy egy konstanssal való szorzás áll fenn, azaz:  $y[k] = K \cdot u[k - r]$ , ahol  $r \in \mathbb{Z}$

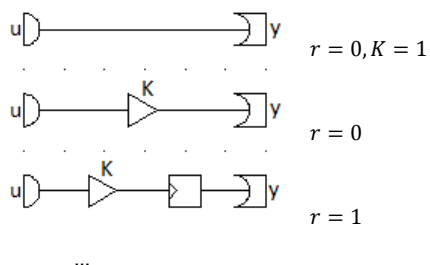
Az egyenlet mindkét oldalát Fourier-transzformálva az alábbiakat kapjuk:

$$Y(e^{j\theta}) = K e^{-jr\theta} U(e^{j\theta}) \rightarrow H(e^{j\theta}) = K e^{-jr\theta}$$

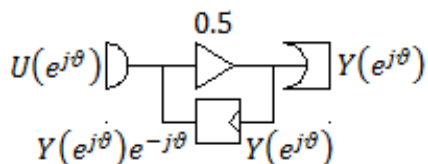
$$K(\theta) = K \text{ (konstans)}$$

$$\varphi(\theta) = -r\theta \text{ (lineáris)}$$

Alakhű jelátvitelt megvalósító rendszer realizációja:



4. Példa: Tekintsük a következő hálózatot. Határozzuk meg az impulzusválaszát, a Fourier-transzformáció segítségével:



$$Y(e^{j\theta}) = 0.5[Y(e^{j\theta})e^{-j\theta} + U(e^{j\theta})]$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{0.5}{1 - 0.5e^{-j\theta}}$$

$$h[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\theta})\} = 0.5 \cdot 0.5^k \varepsilon[k]$$

## 12. DI rendszerek analízise komplex frekvenciatartományban

### I. A Z-transzformáció (DI Laplace-transzformáció)

A spektrum létezésének elégséges feltétele a jel abszolút összegezhetősége, azonban ez gyakran nem teljesül. Ha  $x[k]$  nem abszolút összegezhető, akkor tegyük azzá egy exponenciálisan lecsengő függvénnyel való szorzás segítségével. Azonban léteznek olyan függvények, melyek még így sem tehetők abszolút összegezhetővé (pl.:  $x[k] = e^{k^2}$ ).

$x[k] \rightarrow x[k]r^{-k}\varepsilon[k]$ , ahol  $r \in \mathbb{R}^+$  és „elég nagy” ahhoz, hogy az így kapott jelnek már biztosan létezzen spektruma:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]r^{-k}\varepsilon[k] \in \mathbb{R}$$

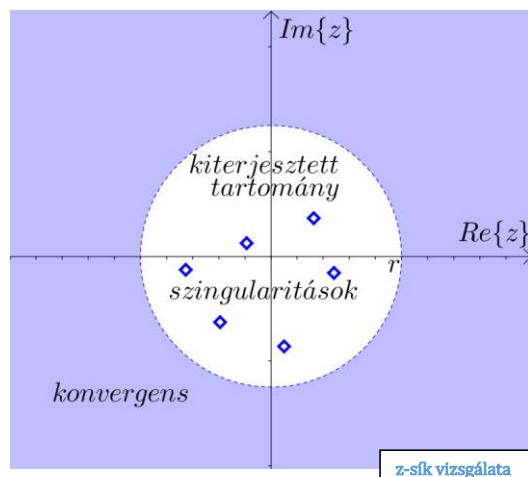
A szorzás ára, hogy a negatív tartományt el kell hagynunk, mivel itt az exponenciális szorzó végtelenbe tart. Definíálhatjuk úgy a transzformációt, hogy a negatív tartományra is korlátos legyen, de ezzel mi nem foglalkozunk. A negatív tartomány elhagyása számunkra általában nem jelent problémát, mivel belépő jelekkel dolgozunk.

Az így abszolút integrálhatóvá tett jelet Fourier-transzformáljuk:

$$\mathcal{F}\{x[k]\} \text{ helyett } \mathcal{F}\{\varepsilon[k]x[k]r^{-k}\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]r^{-k}e^{-j\theta k} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \underbrace{(re^{j\theta})^{-k}}_z = X(re^{j\theta})$$

Legyen  $z = re^{j\theta}$  komplex frekvencia, ekkor

$$Z\{x[k]\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} = x[0] + x[1]z^{-1} + \dots + x[n]z^{-n} + \dots$$



A fenti összeg nem konvergens minden  $z$  értékre. A konvergencia a  $z$  abszolútértékétől ( $r$ -től) függ. A legkisebb olyan  $r$ -t melyre véges az integrál, a konvergenciatartomány határának tekintjük.

Az analitikus kiterjesztés elve szerint,  $X(z)$  azonban formálisan értelmezhető minden  $z$  komplex értékre, a szingularitásokat kivéve.

Példák

$$1. \mathcal{Z}\{\delta[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[k]z^{-k} = 1$$

$$2. \mathcal{Z}\{\varepsilon[k]q^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (qz^{-1})^k = \frac{1}{1 - qz^{-1}} = \frac{z}{z - q}$$

konvergens:  $qz^{-1} < 1 \rightarrow |z| > |q|$

kiterjeszthető:  $|z| \leq |q|$  kivéve  $z = q$  (szingularitás)

$$3. \mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$4. \mathcal{L}\{1\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

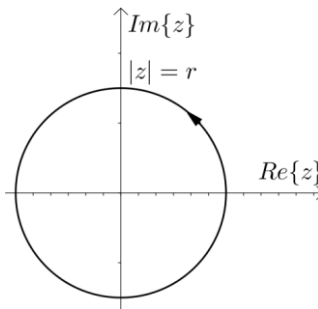
A nem belépő jelek  $\mathcal{Z}$ -transzformáltja megegyezik a belépő változatukéval!

Mivel maga a  $\mathcal{Z}$ -transzformáció a Fourier-transzformációra épül, ezért az inverz transzformációt is abból vezetjük le:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\vartheta})e^{jk\vartheta} d\vartheta = \varepsilon[k]x[k]r^{-k}, \text{ mindkét oldalt } r^{-k} \text{ -val osztva:}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\vartheta})r^k e^{jk\vartheta} d\vartheta = \varepsilon[k]x[k], z := re^{j\vartheta} \rightarrow \frac{dz}{d\vartheta} = jre^{j\vartheta} = jz \rightarrow d\vartheta = \frac{dz}{jz}$$

Helyettesítéses integrál esetén nem csak  $d\vartheta$ -t kell transzformálnunk, hanem az integrál határait is. Így jutunk el a Cauchy-integrál formulához hasonló integrálhoz, mely egy pozitívan irányított  $r$  sugarú kör menti komplex integrál:

$$\varepsilon[k]x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(z)z^k \frac{dz}{jz} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} X(z)z^{k-1} dz$$


Az inverz transzformáció mindig a jel belépő változatát szolgáltatja!

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \left\{ x[k], k \geq 0 \right\} \rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\{\mathcal{Z}\{x[k]\}\} = \varepsilon[k]x[k]$$

Az inverz  $\mathcal{Z}$ -transzformációt a továbbiakban nem ezek alapján végezzük, mivel az általunk vizsgált függvényekre egyszerűbb módszer is van.

A jel Fourier- és Z-transzformáltjának kapcsolata:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}\{x[k]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\vartheta} \\ \mathcal{Z}\{x[k]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} \end{aligned} \right\} X(z) = X(e^{j\vartheta})|_{z=e^{j\vartheta}}, \text{ ha } x[k] \text{ abszolút összegezzethető és belépő}$$

Ellenpélda:

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\vartheta) \leftrightarrow \mathcal{Z}\{1\} = \mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\} = \frac{z}{z-1}$$

Z-transzformációra vonatkozó tételek:

- $\mathcal{Z}\{\}$  és  $\mathcal{Z}^{-1}\{\}$  lineáris operátorok, mert öröklődik az összegzés linearitása.
- Csillapítási-tétel:

$$\mathcal{Z}\{q^k x[k]\} = X\left(\frac{z}{q}\right)$$

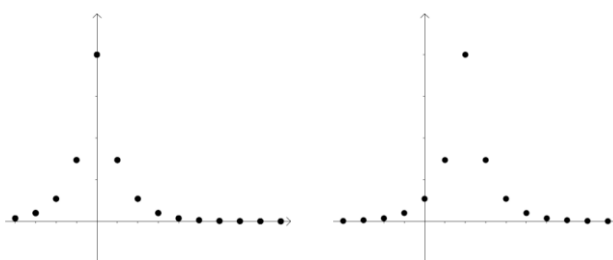
$$\mathcal{Z}\{q^k x[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k x[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\left(\frac{z}{q}\right)^{-k} = X\left(\frac{z}{q}\right)$$

- Eltolási tételek:

Belépő jel késleltetése:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\varepsilon[k-r]x[k-r]\} &= \sum_{k=r}^{\infty} x[k-r]z^{-k} \stackrel{i=k-r}{=} \sum_{i=0}^{\infty} x[i]z^{-i}z^{-r} = \\ &= z^{-r} \sum_{i=0}^{\infty} x[i]z^{-i} = z^{-r}X(z) \end{aligned}$$

Nem belépő jel késleltetése:



$$\varepsilon[k]x[k-2] = \varepsilon[k-2]x[k-2] + x[-2]\delta[k] + x[-1]\delta[k-1]$$

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]x[k-2]\} = z^{-2}X(z) + x[-2] + x[-1]z^{-1}$$

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]x[k-r]\} = z^{-r}X(z) + \sum_{i=1}^r x[-i]z^{-(r-i)}$$



Egyetlen ütemmel siettetett jel:

A késleltetők leírása során ez az eset kiemelt szereppel bír, ezzel érdemes bahatóbban foglalkoznunk.

$$v[k] = \varepsilon[k]x[k+1]$$

$$v[k-1] = \varepsilon[k-1]x[k] = \varepsilon[k]x[k] - x[0]\delta[k]$$

$$z^{-1}V(z) = X(z) - x[0]$$

$$Z\{x[k+1]\} = zX(z) - zx[0]$$

d. Paraméter-tétel ( $\sim$ deriválási tétel):

$$x[k] = x(q)[k], (pl. x[k] = \varepsilon[k]q^k) \rightarrow Z\left\{\frac{\partial x[k]}{\partial q}\right\} = \frac{\partial X(z)}{\partial q}$$

$$Z\left\{\frac{\partial x[k]}{\partial q}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial x[k]}{\partial q} z^{-k} = \frac{\partial}{\partial q} \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} = \frac{\partial X(z)}{\partial q}$$

Példa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} q^k &= kq^{k-1} \rightarrow Z\{kq^{k-1}\} = Z\left\{\frac{\partial}{\partial q} q^k\right\} = \frac{\partial}{\partial q} Z\{q^k\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{1-qz^{-1}} = \frac{0 - (-z^{-1})}{(1-qz^{-1})^2} = \frac{z^{-1}}{(1-qz^{-1})^2} \end{aligned}$$

$$Z\{q \cdot kq^{k-1}\} = Z\{kq^k\} = \frac{qz^{-1}}{(1-qz^{-1})^2} = \frac{qz}{(z-q)^2}$$

e. Kezdeti- és végérték-tétel:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Z\{x[k]\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} = x[0] + \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} x[k] \underbrace{z^{-k}}_{\rightarrow 0} = x[0]$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x[k] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=-\infty}^{k-1} (x[i] - x[i-1]) = \lim_{z \rightarrow 1} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} (x[i] - x[i-1]) z^{-i} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (X(z) - z^{-1}X(z)) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \end{aligned}$$

f. Konvolúció-tétel:

$$Z\{f[k] * g[k]\} = F(z)G(z), \text{ ha } f \text{ és } g \text{ belépő}$$

$$\text{Bizonyítás: } Z^{-1}\{F(z)G(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} F(z)G(z)z^{k-1} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i]z^{-i} \right\} G(z)z^{k-1} dz = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i] \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} G(z)z^{k-i-1} dz \right\}}_{g[k-i]} =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i]g[k-i] = f[k] * g[k]$$

A  $Z$ -transzformációt továbbiakban jellemzően előre kifejezett formulák és a fenti tételek segítségével fogjuk számolni.

| Időfüggvény<br>$x[k]\varepsilon[k] = Z^{-1}\{X(z)\}$ | $Z$ -transzformált<br>$X(z) = Z\{x[k]\}$                       |
|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $\delta[k]$                                          | 1                                                              |
| $\varepsilon[k]$                                     | $\frac{z}{z-1}$                                                |
| $k\varepsilon[k]$                                    | $\frac{z}{(z-1)^2}$                                            |
| $e^{\alpha k}\varepsilon[k] = q^k\varepsilon[k]$     | $\frac{z}{z-e^{\alpha}} = \frac{z}{z-q}$                       |
| $kq^k\varepsilon[k]$                                 | $\frac{qz}{(z-q)^2}$                                           |
| $\sin(\vartheta k)\varepsilon[k]$                    | $\frac{z \sin(\vartheta)}{z^2 - 2z \cos(\vartheta) + 1}$       |
| $k \sin(\vartheta k)\varepsilon[k]$                  | $\frac{z \sin(\vartheta)}{(z^2 - 2z \cos(\vartheta) + 1)^2}$   |
| $\cos(\vartheta k)\varepsilon[k]$                    | $\frac{z^2 - z \cos(\vartheta)}{z^2 - 2z \cos(\vartheta) + 1}$ |
| $(c_1x[k] + c_2y[k])\varepsilon[k]$                  | $c_1X(z) + c_2Y(z)$                                            |
| $x[k]q^k\varepsilon[k]$                              | $X\left(\frac{z}{q}\right)$                                    |
| $\varepsilon[k-r]x[k-r]$                             | $X(z)z^{-r}$                                                   |
| $\frac{\partial x[k]}{\partial q}$                   | $\frac{\partial X(z)}{\partial q}$                             |
| $f * g$                                              | $F(z) \cdot G(z)$                                              |

## II. Inverz transzformáció

### 1. Részlettörtekre bontással:

A részlettörtekre bontás algoritmus azonos a folytonos időnél ismertetett módszerrel, viszont a  $Z$ -transzformáció sajátosságai miatt az alábbi különbségekre kell figyelniük, melyeket nem tárgyalunk áltanosságban, tekintsük az alábbi példát:

$$X(z) = \frac{R(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z^1 + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z^1 + a_n} = \dots = C_0 + \frac{C_1}{(z - q_1)} + \dots + \frac{C_n}{(z - q_n)}$$

Ez az alak nem felel meg a táblázatban szereplő kifejezéseknek, azonban egyszerű átalakítással a következő alakra hozhatjuk:

$$C_0 + z^{-1} \frac{C_1 z}{(z - q_1)} + \dots + z^{-1} \frac{C_n z}{(z - q_n)} = C_0 + z^{-1} \left( \frac{C_1 z}{(z - q_1)} + \dots + \frac{C_n z}{(z - q_n)} \right)$$

A zárójelen belüli értékeket inverz transzformálhatjuk, azonban a kiemelés miatt az időfüggvények egy ütemmel késnek,  $k$  helyére  $k - 1$ -et kell behelyettesíteni. A  $C_0$  konstans inverz transzformáltja  $C_0 \delta[k]$ . Ekkor a fenti spektrumnak megfelelő időfüggvény:

$$x[k] = C_0 \delta[k] + \varepsilon[k - 1] (C_1 q_1^{k-1} + C_2 q_2^{k-1} + \dots + C_n q_n^{k-1})$$

### 2. Polinomosztással:

A diszkrét idő sajátosságának köszönhetően az inverz transzformáció polinomosztással is elvégezhető, a polinomosztás egy műveletelemének vagy lépésének eredménye az adott ütem értéke.

$$X(z) = \frac{R(z)}{Q(z)}, \text{ racionális törtfüggvény, melynek Laurent – sora:}$$

$$X(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots$$

A Laurent-sor inverz transzformálása, a linearitás következtében tagonként végezhető, mely a jelet ütemenként állítja elő:

$$x[k] = c_0 \delta[k] + c_1 \delta[k - 1] + c_2 \delta[k - 2] + \dots$$

### 3. Példa:

$$\text{Inverz transzformáljuk a } H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1}}.$$

$$\frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1}} = \frac{1 - 0.75z^{-1} + 0.25z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1}} = 1 + \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1}} \rightarrow c_0 = 1$$

$$\frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1}} = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}(1 - 0.75z^{-1}) + \frac{1}{4} \cdot 0.75z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1}} = \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{\frac{3}{16}z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1}} \rightarrow c_1 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\frac{3}{16}z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1}} = \frac{3}{16}z^{-2} + \frac{\frac{3}{64}z^{-3}}{1 - 0.75z^{-1}} \rightarrow c_2 = \frac{3}{16}$$

...

Részlettörtekre bontással  $H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1}} = 1 + \frac{0.25}{z - 0.75}$ , ebből a korábban leírtak és a táblázat alapján:  $h[k] = \delta[k] + 0.25 \cdot (0.75)^{k-1} \varepsilon[k - 1]$ .

### III. Átviteli függvény

1. Átviteli függvényről csak kauzális rendszer esetén beszélhetünk, mivel akauzális esetben a  $Z$ -transzformáció levágja az impulzusválasz negatív tartományát így nem helyesen íránk le a gerjesztés-válasz kapcsolatot.

Kauzális rendszer esetén az impulzusválasz,  $h[k]$  belépő, és így a  $Z$ -transzformáltja egyértelmű. Ezt nevezzük a rendszer átviteli függvényének:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[k]\}$$

2. A gerjesztés-válasz kapcsolatot az impulzusválasz a konvolúció segítségével határozza meg, a  $Z$ -transzformáció konvolúció tételének értelmében, ha feltesszük hogy  $u[k]$  belépő, a következőt kapjuk:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{\infty} h[i]u[k-i] \rightarrow Y(z) = H(z)U(z), \text{ melyből}$$

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)U(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\mathcal{Z}\{u[k]\}\} = \mathcal{W}\{u[k]\}$$

Az átviteli függvény, mint a rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatának leírása, az  $Y(z) = H(z)U(z)$  képlet átrendezésével formálisan a következő módon definiálható:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Amennyiben  $u[k] = \delta[k]$ , akkor  $U(z) = 1$  melyből következik, hogy  $y[k] = h[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ , mely a definíciónak teljes mértékben megfelel.

3. Átviteli függvény meghatározása az állapotváltozós leírásból:

A korábban levezetett egyenlet a következő:

$$Y(z) = \left[ \underline{C}^T \left( z\underline{E} - \underline{A} \right)^{-1} \underline{B} + D \right] U(z) + \underline{C}^T \left( z\underline{E} - \underline{A} \right)^{-1} z \cdot \underline{x}[0]$$

Mivel az impulzusválasz transzformáltját keressük, a gerjesztés  $u(t) = \delta(t)$ , melynek transzformáltja  $U(s) = 1$ . A kauzalitásból következően  $\underline{x}[0] = \underline{0}$

Ekkor a következő összefüggés adódik az átviteli függvényre:

$$H(z) = \underline{C}^T \left( z\underline{E} - \underline{A} \right)^{-1} \underline{B} + D$$

4. Pólus-zérus reprezentáció (z-szerint):

Kauzális rendszerek esetén  $H(z)$  racionális törtfüggvény. Ahelyett, hogy a komplex értékű függvényt ábrázolnánk, a számunkra sokat mondó zérusokat és szingularitásokat jelenítjük meg a komplex számsíkon.

$$\text{Legyen } H(z) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}, \text{ ahol } m \leq n, \text{ ekkor}$$

$$H(z) = b_0 \frac{(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_m)}{(z - q_1)(z - q_2) \dots (z - q_n)}$$

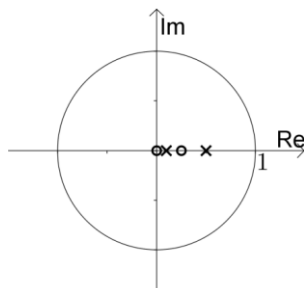
A  $r_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) értékeket zérusoknak nevezzük és körrel jelöljük, míg a  $q_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) értékeket a pólusok, melyeket x-szel jelölünk az ábrán.

Példa:

$$H(z) = \frac{-4+z^{-1}}{1-0.6z^{-1}+\frac{1}{20}z^{-2}} = \frac{-4z^2+z}{1z^2-0.6z+\frac{1}{20}} = -4 \frac{(z-0)(z-0.25)}{(z-0.5)(z-0.1)}$$

$$r_1 = 0; r_2 = 0.25$$

$$q_1 = 0.5; q_2 = 0.1$$



#### 5. Gerjesztés-válaszstabilitás:

A rendszer gerjesztés-válasz stabilis ha  $h[k]$  abszolút összegezhető.

A  $h[k]$  kifejezés zárt alakban megadható:

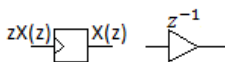
$$h[k] = B_0\delta[k] + B_1\delta[k-1] + \dots + B_r\delta[k-r] + \varepsilon[k-r](C_1q_1^{k-r} + \dots + C_nq_n^{k-r}),$$

mely akkor lesz abszolút összegezhető, ha  $|q_i| < 1, i = 1, \dots, n$

### IV. A hálózat transzformálása z-tartományba

Az egyetlen ütemmel siettetett jel  $Z$ -transzformáltja  $Z\{x[k+1]\} = zX(z) - zx[0]$ .

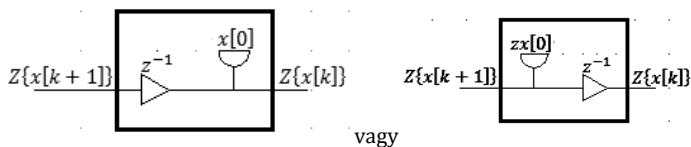
- Ha  $u[k]$  belépő akkor a rendszer kauzalitása miatt az állapotváltozó,  $x[0] = 0$ , mely esetben az elemkarakterisztikák triviálisan a következők:



- Ha  $u[k]$  nem belépő, a folytonos időhöz hasonlóan egy fiktív forrás bevezetésével számolhatunk:

$$Z\{x[k]\} = z^{-1}Z\{x[k+1]\} + x[0], \text{ vagy } zZ\{x[k]\} = Z\{x[k+1]\} + zx[0]$$

melyek modelljei a következők lehetnek:



## V. Az állapotegyenletek transzformálása

$$\begin{cases} \underline{x}[k+1] = \underline{A}\underline{x}[k] + \underline{B}u[k] \\ y[k] = \underline{C}^T \underline{x}[k] + Du[k] \end{cases} \xrightarrow{z} \begin{cases} z\underline{X}(z) - z\underline{x}[0] = \underline{A}\underline{X}(z) + \underline{B}U(z) \\ Y(z) = \underline{C}^T \underline{X}(z) + DU(z) \end{cases}$$

$$\underline{X}(z) = (z\underline{E} - \underline{A})^{-1} (\underline{B}U(z) + z\underline{x}[0]), \text{ ezt a választ kifejezésébe behelyettesítve:}$$

$$Y(z) = \left\{ \underline{C}^T (z\underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + D \right\} U(z) + \underline{C}^T (z\underline{E} - \underline{A})^{-1} z\underline{x}[0]$$

1. Ha  $u[k] = \delta[k]$ , akkor  $U(z) = 1$ , a kauzalitásból következően  $\underline{x}[0] = 0$ , tehát  $H(z) = Z^{-1}\{h[k]\}$ :

$$H(z) = \underline{C}^T (z\underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + D$$

2. Redukált átviteli függvény:

Az átviteli függvény az állapotváltozós leírással ellentétben a rendszernek csak azon részét jellemzi mely a gerjesztés-válasz kapcsolatban szerepet játszik. Az átviteli függvény alapján az aszimptotikus stabilitás nem egyértelmű, mivel az az összes állapotváltozóra vonatkozik, és nem csak a gerjesztés-válasz kapcsolatban résztvevőkre. A pólusok a rendszer sajátértékeinek részhalmazát képezik.

Mindezt egy példán szemléltetve, tekintsük a következő állapotváltozós leírást és annak  $Z$ -transzformáltját:

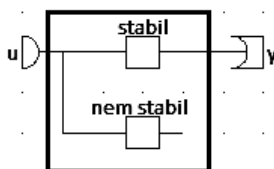
$$\begin{cases} x_1[k+1] = 0.6x_1[k] - 0.224x_2[k] + u[k] \\ x_2[k+1] = 0.224x_1[k] \\ y[k] = -7.6x_1[k] + 17x_2[k] + u[k] \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \lambda\underline{E} - \underline{A} = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0.5 \\ \lambda_2 = 0.1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$H(z) = \frac{4z^2 - 10z + 4}{z^2 - 0.62 + 0.05} = \frac{4(z-2)(z-0.5)}{(z-0.5)(z-0.1)} \rightarrow H^*(z) = \frac{4z-8}{z-0.1} \rightarrow q_1 = 0.1$$

Az átviteli függvény zérusait és pólusait meghatározva jól látható, hogy leegyszerűsíthetnénk. Az elemek karakterisztikájának transzformálásával és közvetlenül a hálózati egyenletekkel számolva gyakran az egyszerűsített alakhoz jutunk. Az egyszerűsítés azonban nem végezhető el, ha a hálózat fizikai viselkedését (pl.: stabilitást) befolyásolja.

Jól látható, hogy a sajátértékek ( $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.1$ ) részhalmazát képezik a pólusok ( $q_1 = 0.1$ ).

Mivel  $\{q_i | i = 1, \dots, n\} \subseteq \{\lambda_j | j = 1, \dots, N\}$ , ezért az aszimptotikus stabilitásból következik a gerjesztés-válasz stabilitás, fordítva azonban nem igaz!



Az alábbi rendszer bár gerjesztés-válasz stabilis, de aszimptotikusan nem az.

## VI. DI rendszerjellemező függvények (összefoglalás)

### 1. Impulzusválasz - $h[k]$ :

Lineáris, invariáns (LI) rendszerekre szorítkozunk, hogy a konvolúciót használhassuk, mely megteremt a kapcsolatot a gerjesztés és a válasz között.

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]u[k-i]$$

A kauzalitás feltétele az impulzusválasz belépő volta, míg a gerjesztés-válasz stabilitás az impulzusválasz abszolút összegezhetőségéből következik.

### 2. Átviteli karakterisztika - $H(e^{j\theta})$ :

Lineáris, invariáns (LI) rendszerekre szorítkozunk, de megköveteljük a gerjesztés-válasz stabilitást is, mely a spektrum létezését garantálja.

Gerjesztés-válasz kapcsolatot a Fourier-transzformáció konvolúció tételének értelmében a gerjesztés spektruma és az átviteli karakterisztika szorzata határozza meg:

$$y[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\theta})\mathcal{F}\{u[k]\}\}, u[k] \text{ abszolút összegezhető}$$

A kauzalitás közvetlenül eldönthető az átviteli karakterisztikából, a rendszer kauzális, ha a számláló fokszáma kisebb, vagy egyenlő a nevező fokszámánál.

### 3. Átviteli függvény - $H(z)$ :

Lineáris, invariáns (LI) rendszerekre hagyatkozunk, de megköveteljük a kauzalitást is, mely a  $Z$ -transzformáció egyértelműségét garantálja.

Gerjesztés-válasz kapcsolatot a  $Z$ -transzformáció konvolúció tételének értelmében a gerjesztés komplex spektrumának és az átviteli függvénynek a szorzata határozza meg:

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\mathcal{Z}\{u[k]\}\}, u[k] \text{ belépő}$$

Gerjesztés-válasz stabilitás feltétele, hogy az összes pólus az egységkörön belülre essen, azaz  $|q_i| < 1 \forall i$ -re.

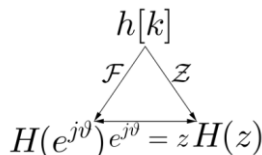
A  $H(z)$  racionális törtfüggvényként áll elő.

### 4. Kapcsolatok a három rendszerjellemező függvény közt:

$H(e^{j\theta})|_{e^{j\theta}=z} = H(z)$ , ha a rendszer gerjesztés-válasz stabilis és kauzális is.

$h[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\theta})\}$ , ha a rendszer G-V stabilis.

$h[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ , ha a rendszer kauzális.



### 5. Rendszeregyenlet:

Bár kilóg a sorból és folytonos esetben nem is tárgyaltuk, de a korábban megismert rendszeregyenlet is felsorolható a rendszert leíró összefüggések közt.

$$y[k] + a_1y[k-1] + \dots + a_ny[k-n] = b_0u[k] + \dots + b_mu[k-m]$$

**Commented [MD7]:** Itt kisebb betűket használhatnánk az ábrán.

## VII. Speciális tulajdonságú rendszerek

### 1. Véges impulzusválaszú (FIR - Finite Impulse Response) rendszerek:

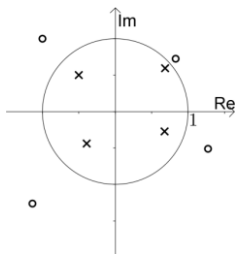
Olyan rendszerek, melyek impulzusválasza egy adott ütem után azonosan 0. A  $h[k] = \varepsilon[k] \cdot q^k$  például nem ilyen, az impulzusválasz csak tart 0-hoz, de soha nem éri el. Elégséges feltétel, hogy a hálózat ne tartalmazzon visszacsatolt késleltetést a gerjesztés-válasz kapcsolatban szerepet játszó részben.

$$h[k] = C_0 \delta[k] + C_1 \delta[k-1] + \dots + C_{L-1} \delta[k-(L-1)], \text{ azaz } h[k] = 0, \text{ ha } k \geq L$$

$$H(z) = C_0 + C_1 z^{-1} + \dots + C_{L-1} z^{L-1} = \frac{C_0 z^{L-1} + C_1 z^{L-2} + \dots + C_{L-1}}{z^{L-1}}$$

### 2. Definiáljuk úgy a mindent áteresztő rendszert, mint aminek amplitúdó karakterisztikája konstans, $K(\vartheta) = K_0$ , valamint követeljük meg a gerjesztés-válasz stabilitást.

A feltételek akkor teljesülnek, ha  $H(z) = K_A z^{-r} \frac{\prod_{i=1}^n (z - \frac{1}{q_i^*})}{\prod_{i=1}^n (z - q_i)}$ , és  $|q_i| < 1$ .



Tetszőleges számú késleltetés megengedett, nem befolyásolja a számunkra érdekes tulajdonságokat.

Bizonyítás  $z = e^{j\vartheta}$  helyettesítéssel:

$$\left| \frac{z - \frac{1}{q_i^*}}{z - q_i} \right| = \left| \frac{(z - \frac{1}{q_i^*})^*}{z - q_i} \right| = \left| \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{q_i}}{q_i - z} \right| = \left| \frac{\frac{z - q_i}{z q_i}}{z - q_i} \right| = \left| \frac{1}{z q_i} \right| = \frac{1}{|q_i|} = C$$

### 3. Minimálfázisúnak nevezünk egy adott amplitúdó karakterisztikájú rendszert, ha fáziskarakterisztikája a lehető legkisebb.

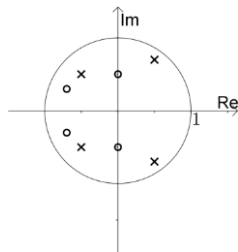
Azaz, ha adott  $K(\vartheta)$ , akkor  $\varphi(\vartheta) \geq \varphi_{MF}(\vartheta)$ .

$$\text{Kritérium: } H(z) = A \frac{\prod_{j=1}^m (z - r_j)}{\prod_{i=1}^n (z - q_i)}, \text{ ahol } |q_i| < 1, \forall i \text{ és } |r_j| < 1, \forall j$$

Bizonyítás  $z = e^{j\vartheta}$  helyettesítéssel:

$$K(\omega) = \left| \pm K_0 \frac{\prod_{j=1}^m (z - r_j)}{\prod_{i=1}^n (z - q_i)} \right| = K_0 \frac{\prod_{j=1}^m |z - r_j|}{\prod_{i=1}^n |z - q_i|} = K_0 \frac{\prod_{j=1}^m \left| z - \frac{1}{r_j^*} \right|}{\prod_{i=1}^n |z - q_i|}$$

tehát  $r_j$  és  $\frac{1}{r_j^*}$  zérusok esetén is ugyanaz az amplitúdó karakterisztika.

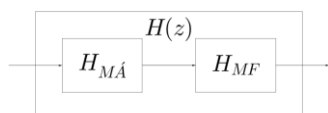


A fázis karakterisztika akkor lesz minimális, ha az egyes tényezők fázisa minimális. Az  $\arg(z - r_j)$  és  $\arg(z - \frac{1}{r_j^*})$  közül a kisebbet kell választanunk,  $z - r_j = e^{j\vartheta} - |r_j| e^{j \arg(r_j)}$ , és  $z - \frac{1}{r_j^*} = e^{j\vartheta} - \frac{1}{|r_j|} e^{j \arg(r_j)}$  ezek közül a kisebb fázisút választjuk. Ha  $|r_j| < 1$  akkor meghagyjuk, ha  $|r_j| > 1$ , akkor a párját  $\frac{1}{r_j^*}$ -t választjuk.



#### 4. Felbontási tétel:

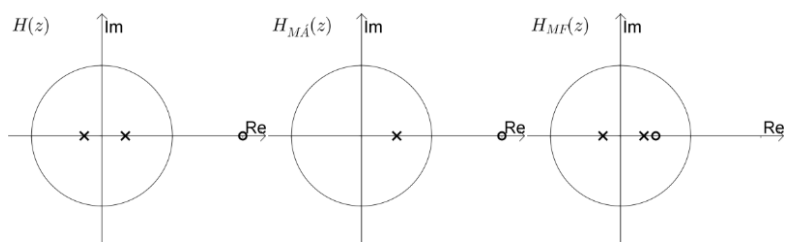
Minden rendszer felbontható átviteli függvénye alapján egy sorba kapcsolt minimál fázisú és mindent áteresztő rendszerre.



$H(z) = H_{MA}(z)H_{MF}(z)$  egy konstans erejéig egyértelmű.

Példa:

Mindig a mindent áteresztő rendszer átviteli függvényének meghatározásával kezdjük. Látható, hogy az egységkörön kívül eső zérusok póluspárjait kell előállítanunk a körön belül. Ehhez gyakran új fiktív pólusokat kell felvennünk, melyeket a minimál fázisú rendszerben zérusokkal kell lefednünk. A körön belül eső maradék pólusok és zérusok a minimál fázisú rendszerhez tartoznak.



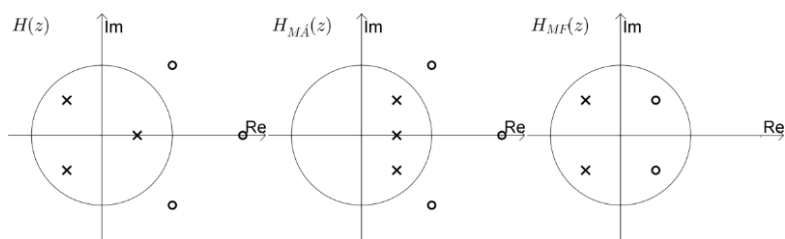
$$H(s) := \frac{3(z-2)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)} = 3 \cdot \frac{z-2}{z-\frac{1}{2}} \cdot \frac{z-\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)}$$

Példa:

$$H(z) := \frac{3z^3 - 3z^2 + 18z - 12}{z^3 + 0.5z^2 - 0.25} = 3 \frac{(z - (1+j))(z - (1-j))(z - 2)}{\left(z - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\right)\right)\left(z - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j\right)\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

$$H_{MA}(z) = 3 \cdot \frac{(z - (1+j))(z - (1-j))(z - 2)}{(z - (0.5 + 0.5j))(z - (0.5 - 0.5j))(z - 0.5)}$$

$$H_{MF}(z) = \frac{(z - (0.5 + 0.5j))(z - (0.5 - 0.5j))}{(z - (-0.5 + 0.5j))(z - (-0.5 - 0.5j))}$$



## VIII. Vizsgapélda

Péter az évi jövedelme felét félreteszi a bankszámlájára, szilveszterkor pedig az addig megtakarított pénze 1/4 részét elkártyázza. Egy diszkrét idejű rendszer állapotváltozója a számla év eleji egyenlege, gerjesztése az évi jövedelem, válasza pedig maga az állapotváltozó.

a, Adja meg a rendszer állapotegyenletét normál alakban! (1,5 pont)

Keressük egyváltozós esetben, mint  $x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$  és most  $y[k] = x[k]$  a szöveg alapján.

Vizsgáljuk az évi pénzforgalmat a  $k+1$ . évben Péter számláján. A  $k$ . év elején  $x[k]$  összeget halmozott fel, melyhez az év során  $0.5u[k]$  összeg adódik, mivel a bevételének csak a felét tudja megtakarítani. Év utolsó napján az eddig felhalmozott összes pénzének negyedét elkártyázza, tehát a háromnegyede marad meg. Ezt a következőképpen írhatjuk:

$$x[k+1] = 0.75(x[k] + 0.5u[k])$$

Az állapotváltozós leírás normál alakja tehát:

$$x[k+1] = 0.75x[k] + 0.375u[k]$$

$$y[k] = x[k]$$

Bár a feladat konkrétan nem kéri határozzuk meg rendszeregyenletet, az átviteli karakterisztikát, az átviteli függvényt, és az impulzus választ. Valamint valósítsuk is meg a rendszert.

Rendszeregyenlet meghatározása:

$$\text{Az állapotegyenleteket megoldva: } y[k] - 0.75y[k-1] = 0.375u[k-1]$$

Átviteli függvény meghatározása:

A rendszeregyenlet alapján a rendszer kauzális, tehát létezik átviteli függvénye. A rendszer egyenletet  $Z$  transzformálva és átrendezve adódik:

$$Y(z) - 0.75 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} = 0.375 \cdot U(z) \cdot z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.375 \cdot z^{-1}}{1 - 0.75 \cdot z^{-1}} = \frac{0.375}{z - 0.75}$$

Átviteli karakterisztika meghatározása:

Az átviteli függvényből a pólus meghatározható ( $q_1 = 0.75$ ), melyből látható, hogy a rendszer gerjesztés-válasz stabilis, tehát létezik átviteli karakterisztikája. Az átviteli függvényből a kauzalitás és a gerjesztés-válasz stabilitás következtében  $z = e^{j\theta}$  helyettesítéssel kapjuk:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{0.375}{e^{j\theta} - 0.75}$$

Impulzusválasz meghatározása:

Az előbbiekből bármelyikéből adódik inverz Fourier- vagy inverz  $Z$ -transzformáció segítségével, vagy a rendszeregyenletből is számolható.

$$h[k] = 0.375 \cdot \varepsilon[k-1] \cdot 0.75^{k-1}$$

- b, Péter éves fizetése 120 krajcár és a 0. év elején 1000 krajcár volt a számláján. Mennyi pénz lesz Péter számláján az 1. év elején? (1 pont)

Ha az előző feladatot nem sikerül megoldani, akkor is kiszámolható, hogy ha 1000 krajcár kezdőtőkéhez 120 krajcár felét sikerül félre tennünk, majd az így összespórolt pénzünk negyedét elkártyázzuk akkor:

$$\left(1000 + \frac{120}{2}\right) - \left(1000 + \frac{120}{2}\right) \cdot 0.25 = 0.75 \cdot \left(1000 + \frac{120}{2}\right) = 795$$

Az előző feladatrész megoldásába behelyettesítve a következőket:  $u[0] = 120$ ,  $x[0] = 1000$  akkor adódik:

$$y[1] = x[1] = 0.75x[0] + 0.375u[0] = 0.75 \cdot 1000 + 0.375 \cdot 120 = 795$$

- c, Adja meg zárt formulával, hogy hány krajcár lesz Péter számláján a  $k$ . év elején! (2,5 pont)

Kamatos kamattal is ki lehetne fejezni, mely a kifejtős módszerrel adódik. Tanulmányainkhoz sokkal közelebbi szemléletmód, ha a gerjesztést  $u[k] = 1000\delta[k] + 120\varepsilon[k]$  alakban vizsgáljuk és megkeressük a rendszer válaszát erre a gerjesztésre. Erre több módszerünk is létezik, időtartományban a diszkrét idejű konvolúció, frekvencia tartományban a Fourier- és  $Z$ -transzformációk lehetnek segítségünkre. Bármelyik használatához már korábban minden szükséges rendszerjellemző függvényt meghatároztunk.

$$\begin{aligned} y[k] &= Z^{-1}\{H(z)Z\{u[k]\}\} = Z^{-1}\left\{\frac{0.375}{z-0.75}\left(1000 + \frac{120}{z-1}\right)\right\} = \\ &= Z^{-1}\left\{\frac{375}{z-0.75} + \frac{45}{(z-0.75)(z-1)}\right\} = \varepsilon[k](180 + 820 \cdot 0.75^k) \end{aligned}$$

- d, Péter már nagyon régóta (több évtizede) dolgozik és páros években 140, míg páratlan években 100 krajcárt keres. Adja meg zárt formulával, hogy mennyi pénze lesz a  $k$ . év elején?

Észre kell vennünk, hogy a gerjesztés felírható, mint  $u[k] = 120 + 20 \cos(\pi k)$ . A választ a szuperpozíció és az átviteli karakterisztika segítségével a következő módon számíthatjuk:

$$\begin{aligned} y[k] &= 120 \cdot H(e^{j\theta})\big|_{\theta=0} + 20 \cdot H(e^{j\theta})\big|_{\theta=\pi} \cos(\pi k) = \\ &= 120 \cdot 1.5 + 20 \cdot (-0.2143) \cos(\pi k) = 180 - 4.286 \cos(\pi k) \end{aligned}$$

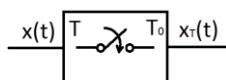
Természetesen, ha ezt nem vesszük észre akkor sorba fejthetjük a gerjesztést.

# 13. Mintavételezés és jelrekonstrukció

## I. Mintavételezés időtartományban

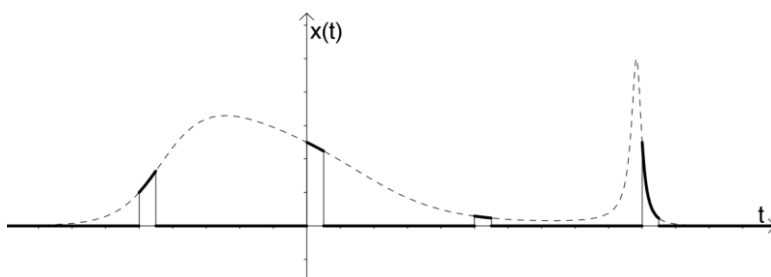
Folytonos jelek kezelése analóg módon sok esetben problémát jelenthet, elég olyan mindennapi tevékenységet tekintenünk, mint a zenehallgatás. A bakelit korszakban a zenét analóg formában a lemezre rögzítették, nem volt digitális-analóg átalakítás. Napjainkban például az MP3 lejátszók esetén az eredetileg folytonos jelet digitális formában tároljuk, majd alakítjuk újra folytonos jellé, hanggá. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy mi történik a jellel a mintavételezés során.

1. Folytonos idejű reprezentáció:



A folytonos idejű jelből vegyünk mintát úgy, hogy  $T$  periódusidőnként  $T_0$  időre zárunk egy kapcsolót a fenti ábra szerint. Ekkor az alábbi folytonos idejű reprezentációhoz jutunk:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & kT \leq t \leq kT + T_0, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\{\varepsilon(t - kT) - \varepsilon(t - T_0 - kT)\}}_{\text{"ablaksereg"}}$$



Az eredeti és a mintavételezett jel

$T$  a mintavételezési periódus (idő).

$T_0$  a mintavételezési idő.

$f_s = \frac{1}{T}$  az órajel frekvencia, más néven mintavételezési frekvencia.

$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  a mintavételezési körfrekvencia.

Láthatóan fontos paraméter a  $T_0$  mintavételezési időnek és a jel „változékonyságának” aránya.

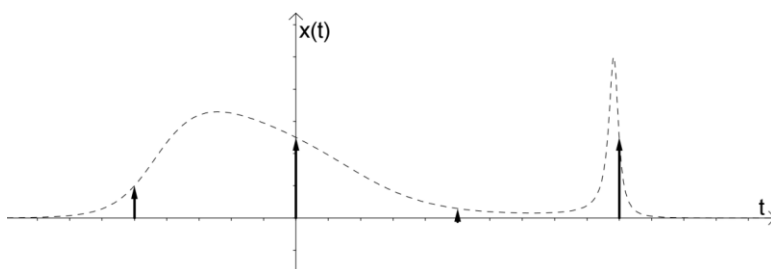
2. Egyszerűsített folytonos idejű reprezentáció – „csillagozott jel”:

Amennyiben a mintavételezés ideje kellően kicsi, az  $\frac{1}{T_0}$  értékkel megszorozva egy ablakot, a  $\delta(t)$ -hoz igen hasonló rövid impulzust kapunk:

$$\frac{1}{T_0} \{\varepsilon(t - kT) - \varepsilon(t - T_0 - kT)\} \underset{T_0 \ll T}{\approx} \varepsilon'(t - kT) = \delta(t - kT)$$

Ennek segítségével bevezethetünk egy, az előbbinél egyszerűbb reprezentációt:

$$x_T(t) \approx T_0 x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = x_*(t) \rightarrow x_*(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$

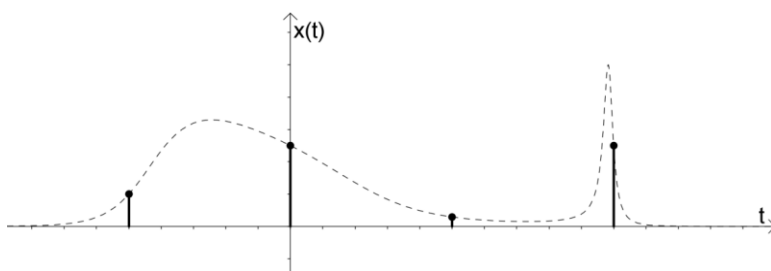


3. A diszkrét idejű reprezentáció:

Az eddigi folytonos reprezentációkhoz nagyon hasonló a diszkrét idejű reprezentáció is, ebben az esetben a jelet a  $kT$  időpillanatokban értelmezett diszkrét jelnek tekintjük:  $x_D[k] = x(kT)$ .

$$x_D[k] = x(kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) = \frac{x_*(t)}{T_0}, \text{ ebből látható, hogy}$$

$x_*$  és  $x_D$  ekvivalens, csak konstans szorzóban térnek el:



4. Példa:

Határozzuk meg az alábbi függvény diszkrét és csillagozott reprezentációit:

$$x(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t}, \text{ valamint } T \text{ és } T_0 \text{ adottak}$$

$$x_D[k] = \varepsilon(kT)e^{-\alpha(kT)} = \varepsilon[k]a^k, \text{ ahol } a = e^{-\alpha T}$$

$$x_*(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k \delta(t - kT)$$

## II. Mintavételezés leírása frekvenciatartományba

Ahogy a korábbiakban is fontos szerepet játszottak a jelek spektrumi, úgy most is hasznosak lehetnek a számunkra. A későbbiekben a spektrum alapján is megpróbáljuk visszaállítani az eredeti jelet. Láttuk, hogy időtartományban az egyes reprezentációk közt szoros kapcsolat áll fenn. Keressük a különböző reprezentációk spektrumainak kapcsolatát az eredeti jel spektrumával.

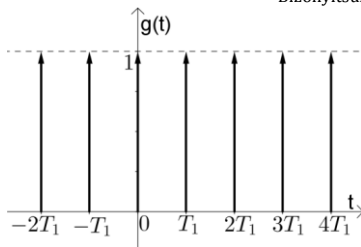
Tegyük fel, hogy  $x(t)$  abszolút integrálható és folytonos, ekkor  $x_D[k]$  abszolút összegezzhető, és a spektrumok biztos léteznek.

1.  $X_D(e^{j\vartheta})$  és  $X(j\omega)$  kapcsolata:

Az eredeti jelből a diszkrét reprezentációt úgy kapjuk, ha egy úgynevezett Dirac-fésű függvénnyel összekonvolváljuk az eredeti jelet, mely egy frekvencia tartománybeli szorzásnak felel meg. A kapcsolatot úgy kapjuk meg, ha rájövünk a Dirac-fésű spektrumára. Ezt matematikai formában a következő bizonyítás tartalmazza:

$$\begin{aligned} X_D(e^{j\vartheta}) &= \mathcal{F}\{x_D[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)|_{t=kT}\}e^{-j\vartheta k} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega kT} d\omega \right\} e^{-j\vartheta k} \stackrel{x(t) \text{ folytonos}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \underbrace{\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk(\omega T - \vartheta)} \right\}}_{?} d\omega \end{aligned}$$

Bizonyítsuk, hogy a kérdéses rész a Dirac fésű  $\left( g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \right)$  spektruma:



$$\begin{aligned} G_m &= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \delta(t) e^{-jm\frac{2\pi}{T_1}t} dt = \frac{1}{T_1}, m \in \mathbb{Z} \\ g(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_1} e^{jn\frac{2\pi}{T_1}t} = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\frac{2\pi}{T_1}t}, \text{ ebből adódik} \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\frac{2\pi}{T_1}t} &= T_1 g(t) = T_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \quad \begin{matrix} T_1 \leftarrow 2\pi \\ m \leftarrow k \\ n \leftarrow p \end{matrix} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk(\omega T - \vartheta)} &= 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega T - \vartheta - 2\pi p) \end{aligned}$$

Visszatérve a kapcsolat levezetéséhez:

$$\begin{aligned} X_D(e^{j\vartheta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega T - \vartheta - 2\pi p) d\omega = \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \delta(\underbrace{\omega T - \vartheta - 2\pi p}_{\omega = \frac{2\pi + \vartheta}{T} = \frac{\vartheta}{T} + \frac{2\pi}{T}}) d\omega = \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\vartheta}{T} + p\frac{2\pi}{T}\right)\right) \end{aligned}$$

A végeredmény ezek alapján:

$$X_D(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\vartheta}{T} + p\frac{2\pi}{T}\right)\right), \text{ mely periodikus!}$$

2.  $X_D(e^{j\vartheta})$  és  $X_*(j\omega)$  kapcsolata:

A Fourier-transzformáció linearitásából következően, mivel  $T_0 x_D[k] = x_*(t)$ , ezért a spektrumuk is csak  $T_0$  konstans szorzóban tér el egymástól  $\vartheta = \omega T$  helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} \text{Bizonyítás: } X_*(j\omega) &= \mathcal{F}\{x_*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt = \\ &= T_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt = T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] e^{-jk\omega T} = T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] e^{-jk\vartheta} \Big|_{\vartheta=\omega T} \\ \text{Míg } X_D(e^{j\vartheta}) &= \mathcal{F}\{x_D[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] e^{-jk\vartheta} \end{aligned}$$

A végeredmény ezek alapján:

$$X_*(j\omega) = T_0 X_D(e^{j\vartheta}) \Big|_{\vartheta=\omega T}$$

3.  $X_*(j\omega)$  és  $X(j\omega)$  kapcsolata:

Az előbbi két pont eredményeit összegyűrve:

$$X_D(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\vartheta}{T} + p \frac{2\pi}{T}\right)\right) \quad \text{és} \quad X_*(j\omega) = T_0 X_D(e^{j\vartheta}) \Big|_{\vartheta=\omega T}, \text{ tehát:}$$

$$X_*(j\omega) = \frac{T_0}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X(j(\omega + p\omega_s)), \text{ ahol } \omega_s = \frac{2\pi}{T} \text{ a mintavételezési körfrekvencia}$$

4. Értelmezés:

Az előbb levezett kifejezésből jól látható, hogy a mintavételezett jel spektruma alakra hasonló az eredeti jeléhez, azonban periodikus.

### III. A mintavételi tétel

1. Nyquist-Shannon mintavételezési tétele:

A jel rekonstruálható a mintáiból, akkor és csak akkor, ha sávkorlátozott és  $2 \leq \frac{\omega_s}{\Omega}$ ,  $\Omega$  a sávkorlát.

Az alábbi összefüggések ekvivalensek a tétellel:

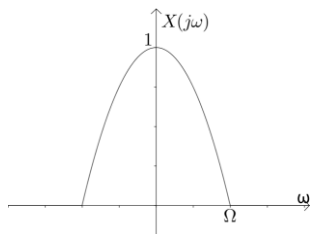
$$(\omega_s \geq 2\Omega) \equiv \left(\frac{1}{T} \geq \frac{\Omega}{\pi}\right) \equiv \left(f_s \geq \frac{\Omega}{\pi}\right) \equiv (f_s \geq f_B)$$

ahol  $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$  a mintavételezési körfrekvenia és

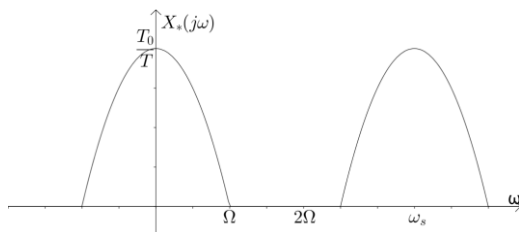
$\Omega = 2\pi f_B$  a sávkorlát,  $\frac{\Omega}{\pi} = f_n$  a Nyquist frekvencia.

A tétel következménye, hogy a természetben előforduló időkorlátos jelek (például zenénk) soha nem állíthatók pontosan vissza, mivel időkorlátozott jel nem lehet sávkorlátozott.

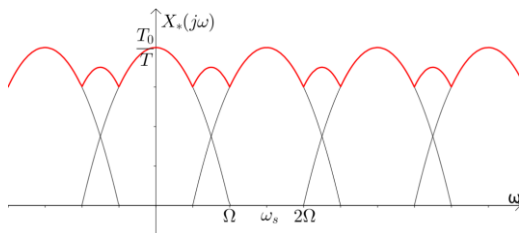
Szemplétetés: Tekintsük a következő sávkorlátos jel spektrumát:



Amennyiben  $\omega_s > 2\Omega$ , akkor nincs átlapolódás a mintavételezett jel spektrumában:

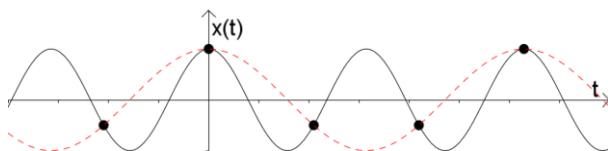


Ha  $\omega_s < 2\Omega$ , átlapolódást tapasztalunk, az így kapott spektrum nem az eredeti spektrum eltoltaiból áll, hanem azok egymást átfedve összeadódnak:



## 2. Alulmintavételezés (aliasing):

Torzítást okoz a jel rekonstrukciójában, ha a mintavételezési frekvencia felénél magasabb frekvenciákat próbálunk helyre állítani (az átlapolódás következtében az alacsonyabb frekvenciák is torzulhatnak). Egy  $44.1\text{kHz}$  frekvenciával mintavételezett zene  $22.05\text{kHz}$  feletti komponensei már nem állíthatók vissza, egy eredetileg például  $24\text{kHz}$ -es hang helyreállítás után  $12\text{kHz}$ -es hangként lép fel. Tekintsünk egy  $x(t) = \cos(2t)$  jelet, és mintavételezzük  $T = \frac{2\pi}{3}$  időközönként:



A mintákra a koszinusz függvény visszarajzolása nem egyértelmű, a rekonstruált jel mindig a legkisebb frekvenciájú szinuszos jel, a példában a  $\cos(t)$  függvény lesz. A helyes visszaállításhoz periódusonként legalább két mintavételezés szükséges.



## IV. Jelrekonstrukció

### 1. A jelrekonstrukció célja:

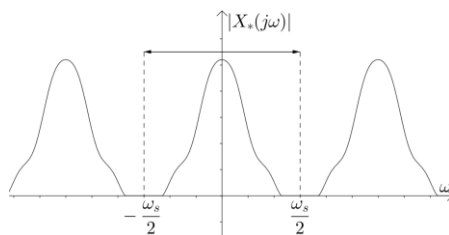
A korábban ismertetett mintavételezett jelek alapján kíséreljük meg az eredeti jel visszaállítását. A feladat gyakorlatilag nem megoldható, mivel nem létezik sávkorlátos jel és mint később látjuk az egyébként szükséges hálózat sem megvalósítható, azonban megfelelő közelítést találhatunk.

$$\begin{array}{c} x_s(t) \\ x_D[k] \end{array} \rightarrow \boxed{\phantom{rekonstruált}} \begin{array}{c} \hat{x}(t) \cong x(t) \\ \text{rekonstruált} \\ \text{jel} \end{array}$$

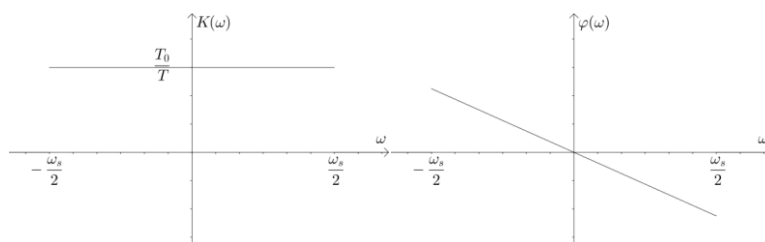
### 2. Jelrekonstrukció (Ideális) aluláteresztővel:

Láthattuk, hogy a mintavételezett jel spektruma periodikus, és az egyes periódusokban alakja megfelel az eredeti spektrumnak. Tegyük fel, hogy a mintavételezési tétel teljesül, és egy megfelelő sávkorlátú ideális aluláteresztő szűrővel vágjuk le a spektrumból a felesleges részeket:

$$X_*(j\omega) = \frac{T_0}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X(j\omega + p\omega_s)$$



Az ideális aluláteresztő szűrő amplitúdó karakterisztikája egy ablak, míg fáziskarakterisztikája legyen lineáris:



$$H_A(j\omega) = \frac{T}{T_0} \left[ \varepsilon\left(\omega + \frac{\omega_s}{2}\right) - \varepsilon\left(\omega - \frac{\omega_s}{2}\right) \right] e^{-j\omega\tau}, \text{ ahol } \frac{\omega_s}{2} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$$

Az általánosság teljes megszorítása nélkül  $\tau := 0$  egyszerűsítéssel élünk.

A fentiek alapján a helyreállított jel:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\hat{X}(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H_A(j\omega)X_s(j\omega)\} = \\
 &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{T}{T_0}\left[\varepsilon\left(\omega + \frac{\omega_s}{2}\right) - \varepsilon\left(\omega - \frac{\omega_s}{2}\right)\right]X_s(j\omega)\right\} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \frac{T}{T_0} X_s(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} T_0 X_D(e^{j\vartheta})|_{\vartheta=\omega T} e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \mathcal{F}\{x_D[k]\}|_{\vartheta=\omega T} e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] e^{-jk\omega T} e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\omega(t-kT)} d\omega = \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{e^{j\frac{\pi}{T}(t-kT)} - e^{-j\frac{\pi}{T}(t-kT)}}{j(t-kT)} \\
 \hat{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T} - k\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T} - k\right)}
 \end{aligned}$$

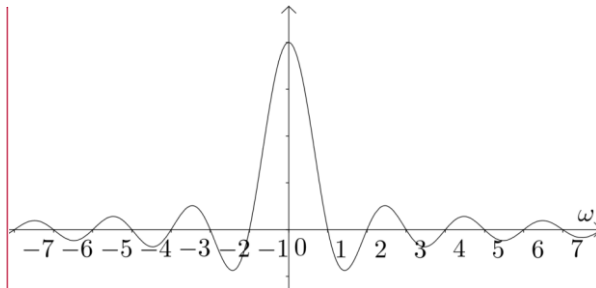
A jelrekonstrukció ideális aluláteresztő szűrővel mindig pontos, ha  $T < \frac{\pi}{2\Omega}$ , míg a  $t = kT$  helyeken bármely esetben pontos.

Azonban korábban már láttuk, hogy az ideális aluláteresztő nem kauzális, így nem is megvalósítható.

Interpolációs függvény:

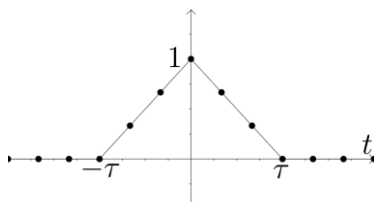
Az akauzalitás azonban, ha a mintákat előre ismerjük, akkor kikerülhető, úgynevezett interpolációs eljárással. Megpróbálhatjuk visszaállítani az eredeti függvényt úgy, hogy az időben később megjelenő mintát egy impulzusnak vesszük, és meghatározzuk előre a nem belépő impulzusválaszt. Ha az összes mintához az impulzusválaszt meghatároztuk, akkor az eredő jel azok szuperpozíciójaként számolható.

Észrevehetjük az eljárást az  $\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T} - k\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T} - k\right)}$  kifejezésben, ahol  $S(w) = \frac{\sin(\pi w)}{\pi w}$  az interpolációs függvény, így  $\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) S\left(\frac{t}{T} - k\right)$ .



Példa:

Tekintsük a következő időkorlátos jelet, melyet  $T = \frac{\tau}{3}$  ( $\omega_s = \frac{6\pi}{\tau}$ ) időpillanatonként mintavételezünk:

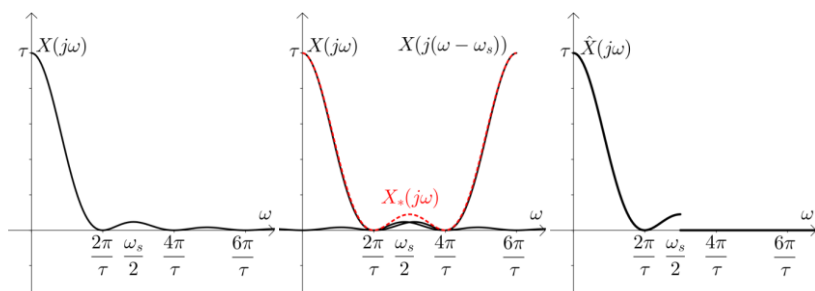


A jel, a mintavételezett jel és az ideális aluláteresztővel helyreállított jel spektruma a következők:

$$X(j\omega) = \tau \left( \frac{\sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)}{\omega \frac{\tau}{2}} \right)^2, \text{ levezetését most nem tárgyljuk (ld.: } \mathcal{F}\{ \} \text{ definíció).}$$

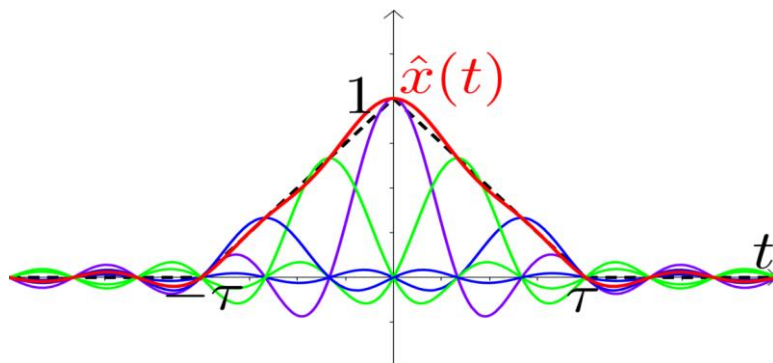
$$X_s(j\omega) \cong X(j\omega) + X(j(\omega - \omega_s)) + X(j(\omega + \omega_s)), 0 < \omega < \frac{6\pi}{\tau}$$

$$\hat{X}(j\omega) = X_s(j\omega) \left( \varepsilon(\omega) - \varepsilon\left(\omega - \frac{\omega_s}{2}\right) \right)$$



Jelrekonstrukció interpolációval:

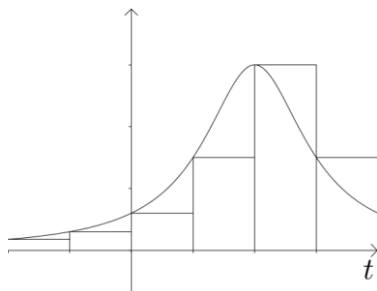
Mindenegyik mintára az interpolációs függvényt felrajzolva, és összegezve az alábbi pirossal jelölt rekonstruált jelet kapjuk:



3. Jelrekonstrukció nulladrendű tartóval:

Az eredeti függvényt közelíthetjük úgy is, ha a  $kT$  időpillanatbeli értéket tartjuk a  $(k+1)T$  időpillanatig. Ekkor az alábbi ábrán is látható függvényt kapjuk:

$$\hat{x}(t) = x(kT), kT \leq t < kT + T$$



Nulladrendű tartón egy olyan rendszert értünk, mely  $T_0$  ideig tartja a bemenetére  $kT$  időpillanatban érkező jel értékét. Impulzusválasza  $h(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T_0)$

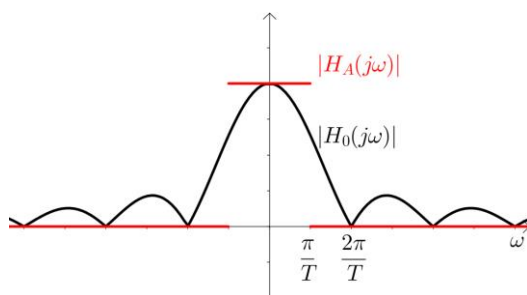
Ha  $x_D[k] = \delta[k]$ , akkor  $x_*(t) = T_0 \delta(t)$ , míg  $\hat{x}(t) = T_0(\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T))$ , ebből látszik, hogy  $h_0 = \frac{1}{T_0}(\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T))$ , melynek átviteli függvénye és karakterisztikája:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{T_0 s} \text{ és } H_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{T_0 j\omega} = \frac{T}{T_0} \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega \frac{T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

A módszer előnye, hogy azonnali (on the fly) rekonstrukciót valósít meg, és a  $t = kT$  helyeken mindig pontos, azonban a függvény gyors változása esetén az ilyen közelítés nagyon durva.  $H_0(s)$  nem racionális törtfüggvény, tehát a hálózat nem valósítható meg idő invariáns elemekkel, ez manapság nem jelent problémát.

4. A két fajta rekonstrukció összehasonlítása:

$$|H_0(j\omega)| = \left| \frac{T}{T_0} \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega \frac{T}{2}} \right|, \text{ míg } |H_A(j\omega)| = \frac{T}{T_0} \left[ \varepsilon\left(\omega + \frac{\omega_s}{2}\right) - \varepsilon\left(\omega - \frac{\omega_s}{2}\right) \right]$$

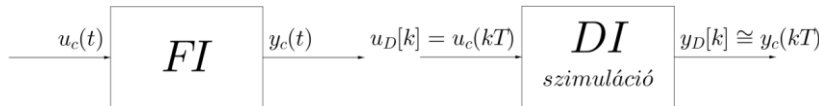


Jól látszik, hogy mindkét amplitúdó karakterisztika aluláteresztő jellegű, mely várható volt.

## 14. Diszkrét idejű szimuláció

### I. Feladatkitűzés

Vegyünk egy folytonos idejű rendszert, annak gerjesztését és válaszát. A feladat, hogy ezen rendszerhez találjunk egy olyan diszkrét idejű reprezentánst, mely az eredeti gerjesztés diszkrét változatára az eredeti válasz diszkrét változatát adja. A feladat megvalósítása közben a cél, ha  $u_D[k] = u_c(kT)$  akkor  $y_D[k] = y_c(kT)$ . Ez általában megoldhatatlan, azonban több jó közelítés is létezik.



A feladatot célszerűen úgy oldjuk meg, hogy az alapvető rendszertulajdonságok, mint például a gerjesztés-válasz stabilitás, öröklődjenek!

A mintavételezési periódus ( $T$ ) megválasztásánál vegyük figyelembe, a mintavételezési tételt. Meg kell felelnie a  $T < \frac{\pi}{\Omega_u}, \frac{\pi}{\Omega_y}$ -nek ám mivel nem ismerhetjük a válasz sávszélességét, ezért a rendszer és a gerjesztés sávszélességéből következtetünk.  $\Omega_y \leq \min(\Delta\omega_u, \Delta\omega_H)$  a válasz jelszélessége, felülről becsüljük a rendszer és a gerjesztés sávszélességének minimumával. A rendszer sávszélessége a legnagyobb abszolút értékű sajátértékével arányos ( $\Delta\omega_H \sim |\lambda|_{max}$ ).

Ideális a szimulátor, ha  $u_D[k] = u_c(kT)$ , akkor  $y_D[k] = y_c(kT)$ ,  $\forall u_c(t)$  esetén. Ilyen mint már említettük nem létezik, viszont lehet egy bizonyos jelfajtára specifikálni egy szimulátort, de más jelek esetén pontatlanná válik.

Példa:

Képzeli el egy önszabályozó rendszert, mely valamilyen érzékelővel vizsgálja a környezet változását, és arra valamilyen mechanizmus szerint reagál. Egy beágyazott számítógépes rendszer esetén az érzékelő folytonos jelet szolgáltat, azonban ahhoz, hogy ezt egy számítógéppel kezelhessük egy analóg-digitális átalakítóval digitalizálnunk kell. A számítógép a beépített algoritmus alapján a digitális „gerjesztésre” digitális vezérlő jelet szolgáltat, melyet digitális-analóg átalakítóval újra folytonos jellé alakítunk.

## II. Szimuláció impulzusválasz alapján

Az impulzusválasz ( $h_c(t)$ ) a gerjesztés-válasz kapcsolatot a konvolúció segítségével határozza meg lineáris, invariáns rendszerek esetén. Tehát ha ez alapján szeretnénk szimulálni a folytonos idejű hálózatunkat, akkor egy olyan diszkrét rendszert keresünk, mely impulzusválaszát ( $h_D[k]$ ) a gerjesztés diszkrét függvényével összekonvolválva a válasz diszkrét függvényét szolgáltatja.

Kauzális rendszer impulzusválaszának időfüggvénye a következő alakban írható:

$$h_c(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)f(t)$$

Ezt a gerjesztéssel konvolválva a válasz kifejezését kapjuk:

$$\begin{aligned} y_c(t) &= \int_{-\infty}^t h_c(\tau)u_c(t-\tau)d\tau \text{ ebből:} \\ y_c(kT) &= \int_{-\infty}^{kT} D\delta(\tau)u_c(kT-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{kT} f(\tau)u_c(kT-\tau)d\tau = \\ &= Du_c(kT) + \sum_{i=1}^k \int_{(i-1)T}^{iT} f(\tau)u_c(kT-\tau)d\tau \stackrel{\substack{\text{Integrál} \\ \text{közéérték} \\ \text{tétel} \\ T \ll}}{=} Du_c(kT) + \sum_{i=1}^k Tf(iT)u_c((k-i)T) \\ y_c(kT) &= Du_c(kT) + \sum_{i=1}^k Tf(iT)u_c((k-i)T) \end{aligned}$$

A diszkrét idejű konvolúciót felírva a következő adódik

$$y_D[k] = \sum_{i=0}^k h_D[i]u_D[k-i] = h_D[0]u_D[k] + \sum_{i=1}^k h_D[i]u_D[k-i], \text{ melyet}$$

összevetve az előző kifejezéssel, adódik a rendszer impulzusválasza:

$$h_D[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ D, & k = 0 \\ Tf(kT), & k > 0 \end{cases}, \text{ tehát } h_D[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]Tf(kT)$$

Példa:  $y_c(t) = \int_{-\infty}^t u_c(\tau)d\tau$ , mely átalakítható  $\int_{-\infty}^{\infty} u_c(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau$ , melyből  $h(t) = \varepsilon(t)$ .

A fentebb levezett átalakítás alapján  $h_D[k] = \varepsilon[k-1]T$ .

Példa:  $h(t) = 3\delta(t) + \varepsilon(t)e^{-\alpha t}$  és  $T = \frac{1}{10\alpha}$ .

$$h_D[k] = 3\delta[k] + \varepsilon[k-1] \frac{1}{10\alpha} e^{-\alpha k \frac{1}{10\alpha}} = 3\delta[k] + \varepsilon[k-1] \frac{1}{10\alpha} \underbrace{\left(e^{-\frac{1}{10}}\right)^k}_{0.9048}$$

### III. Szimuláció a $H_c(s)$ vagy $H_c(j\omega)$ alapján

Frekvenciatartomány és komplex frekvencia tartomány közt oda-vissza fogunk járni a bizonyítások során, annak megfelelően, hogy melyik az alkalmasabb. Mivel tetszőleges jel felbontható szinuszos összegére, ezért tekintsünk elsőként egy szinuszra optimalizált szimulátort. Nem külön a szinuszt és a koszinuszt fogjuk vizsgálni, hanem a mindkettőt magában foglaló  $e^{j\omega t}$ -t.

Legyen a gerjesztés  $u_c(t) = e^{j\omega t}$ , melynek mintavételezett alakja:

$$u_D[k] = u_c(kT) = e^{j\omega kT} = e^{j\vartheta k}, \text{ ahol } \vartheta = \omega T.$$

A folytonos idejű rendszer kimenete ekkor a következő:

$$y_c(t) = H_c(j\omega)e^{j\omega t},$$

míg a diszkrét idejű rendszer válasza a következőképpen alakul:

$$y_D[k] = H_D(e^{j\vartheta})e^{j\vartheta k}.$$

Vegyük figyelembe, hogy akkor pontos a szimuláció, ha  $y_c(kT) = y_D[k]$ , tehát

$$H_D(e^{j\vartheta}) = H_c(j\omega)|_{\omega=\frac{\vartheta}{T}}.$$

Ennek általánosan igaznak kell lennie, mivel nem szorítkoztunk egy adott  $\omega$  körfrekvenciára.

Tekintsük ugyanezen két rendszer átviteli függvényei közti kapcsolatot, ha a kauzalitás és a gerjesztés-válasz stabilitás fennáll. Mindkét átviteli karakterisztika átirható:

$$H_D(e^{j\vartheta}) = H_D(z)|_{z=e^{j\vartheta}} \quad \text{és} \quad H_c(j\omega) = H_c(s)|_{s=j\omega=\frac{\vartheta}{T}},$$

A fenti kifejezésből  $\vartheta = -j \ln z$ , valamint  $s = \frac{1}{T} \ln z$ , azaz  $H_D(z) = H_c(s)|_{s=\frac{1}{T} \ln z}$ .

Ez a kifejezés nem racionális törtfüggvény, transzcendens függvényeket tartalmaz, tehát nem realizálható általunk ismert diszkrét idejű rendszerekkel.

A  $(s = \frac{1}{T} \ln z \Leftrightarrow) z = e^{sT}$  kifejezést Taylor-sorának lineáris tagjaival közelítjük:

- a. Közvetlenül Taylor sorból, tehát  $z = 1 + sT$ , melyből  $s = \frac{z-1}{T}$ .

Ha ezt a helyettesítést végezzük el, akkor racionális törtfüggvényhez jutunk, ám a gerjesztés-válasz stabilitás nem mindig öröklődik.

- b. A  $z = e^{sT}$  kifejezést az alábbi módon átalakítva és az egyes tagokat Taylor-soraik lineáris tagjaival közelítve:

$$z = e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}} \cong \frac{1 + s\frac{T}{2}}{1 - s\frac{T}{2}} \rightarrow s = \frac{2z-1}{Tz+1}, \text{ bilineáris transzformáció}$$

Ez a transzformáció megőrzi a gerjesztés-válasz stabilitást, és a pólus-zérus elrendezést számunkra megfelelően transzformálja, így a mindent áteresztő és minimálfázisú tulajdonságok is öröklődnek.

Általánosan, hangolható formában:  $H_D(z) = H_c(s)|_{s=\frac{p}{T} \frac{z-1}{z+1}}, 0 \leq p \leq 2$ .

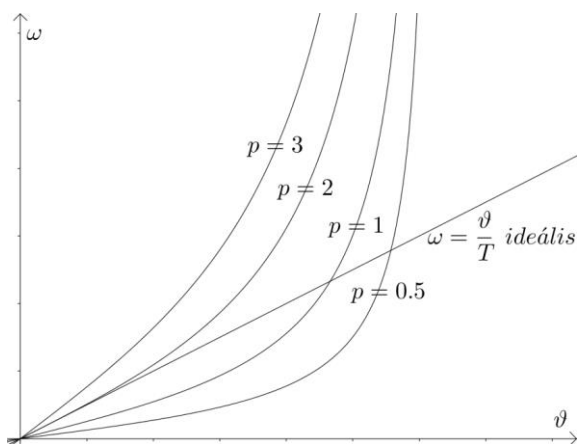
A szimulátor „hangolása” a fenti formula segítségével.

Beláttuk, hogy  $s = \frac{p}{T} \frac{z-1}{z+1}$  helyettesítéssel élünk, melyet tovább alakítva:

$$j\omega = s = \frac{p}{T} \frac{e^{j\vartheta} - 1}{e^{j\vartheta} + 1} = \frac{p}{T} \frac{e^{j\frac{\vartheta}{2}} e^{j\frac{\vartheta}{2}} - e^{-j\frac{\vartheta}{2}} e^{-j\frac{\vartheta}{2}}}{e^{j\frac{\vartheta}{2}} e^{j\frac{\vartheta}{2}} + e^{-j\frac{\vartheta}{2}} e^{-j\frac{\vartheta}{2}}} = \frac{p}{T} j \tan \frac{\vartheta}{2}, \text{ melyből}$$

$$\omega = \frac{p}{T} \tan \frac{\vartheta}{2}$$

Különböző  $p$  paraméterekre ábrázolva az  $\omega$  kifejezést, láthatjuk, hogy milyen frekvencia tartományon mennyire közelítjük az ideális szimulátort.



Jól látható, hogy kis frekvenciákon a  $p = 2$  paraméter választás a megfelelő.

Levezethető, hogy adott  $\omega_0$  frekvencián pontos és annak környékén „megfelelően pontos” szimulációhoz a következő  $p$  paraméterválasztás szükséges:

$$p = \left. \frac{T\omega}{\tan \frac{\vartheta}{2}} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ \vartheta=\omega_0 T}} = \frac{T\omega_0}{\tan \frac{\omega_0 T}{2}}$$

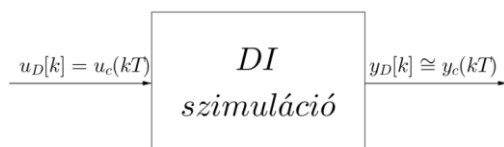


#### IV. Adott jeltípusra optimális szimulátor

Ahogy a szimuláció optimalizálható volt adott frekvenciájú szinuszos jelekre, úgy tetszőleges jeltípushoz is levezethetjük az optimális szimulátor paramétereit.

##### 1. Általánosan:

Adott  $u_c(t)$  gerjesztés esetén, az optimális szimulátor átviteli függvényei a következőképp alakulnak:



$$H_D(z) = \frac{Y_D(z)}{U_D(z)} = \frac{Z\{y_D[k]\}}{Z\{u_D[k]\}} = \frac{Z\{y_c(kT)\}}{Z\{u_c(kT)\}} = \frac{Z\{\mathcal{L}^{-1}\{H_c(s)U_c(s)\}|_{t=kT}\}}{Z\{u_c(kT)\}}$$

Tehát a kapcsolat a gerjesztés és a rendszer átviteli függvényei közt:

$$H_D(z) = \frac{Z\{\mathcal{L}^{-1}\{H_c(s)\mathcal{L}\{u_c(t)\}\}|_{t=kT}\}}{Z\{u_c(kT)\}}$$

##### 2. $\varepsilon(t)$ -re optimális szimuláció – tartó ekvivalens:

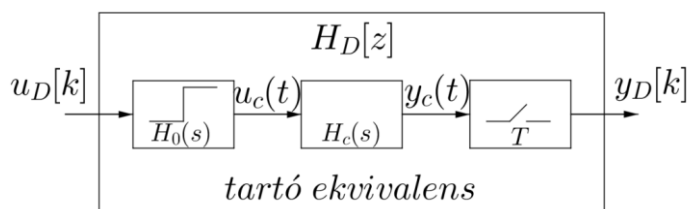
A gerjesztés  $u_c(t) = \varepsilon(t)$ , mely Laplace-transzformáltja  $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{1}{s}$ .

A mintavételezett jel  $u_c(kT) = u_D[k] = \varepsilon[k]$ , melynek  $Z$ -transzformáltja  $Z\{\varepsilon[k]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ .

A fenti formula alapján:

$$H_D(z) = Z\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{H_c(s)\frac{1}{s}\right\}\right\}_{t=kT} \cdot (1-z^{-1})$$

Ez alapján a rendszer megvalósítható, egy nulladrendű tartóval, a szimulálandó rendszerrel és egy mintavételező kapcsolóval:



## V. Példák

1. Átviteli függvényével adott rendszerhez határozzuk meg, az impulzusválasz és az átviteli függvény alapján a szimulátort:

$$H_c(s) = \frac{2s}{s+5}, T = 0.1$$

- a.  $h_c(t)$  alapján:

A szimulálandó rendszer impulzusválasza inverz Laplace-transzformációval:

$$H_c(s) = \frac{2(s+5) - 10}{s+5} = 2 - \frac{10}{s+5} \rightarrow h_c(t) = 2\delta(t) - 10e^{-5t}\varepsilon(t)$$

A korábban levezetett összefüggés alapján, miszerint:

$$h_D[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]Tf(kT)$$

A megfelelő értékeket behelyettesítve:

$$\begin{aligned} h_D[k] &= 2\delta[k] - \varepsilon[k-1]0.1 \cdot 10e^{-5k \cdot 0.1} = \\ &= 2\delta[k] - e^{-0.5} \varepsilon[k-1](e^{-0.5})^{k-1} = \\ &= 2\delta[k] - 0.61 \varepsilon[k-1](0.61)^{k-1} \end{aligned}$$

A későbbi összehasonlíthatóság kedvéért fejezzük ki az átviteli függvényt:

$$H_D(z) = 2 - 0.61z^{-1} \frac{z}{z-0.61} = \frac{2z-1.83}{z-0.61}$$

- b.  $H_c(s)$  alapján:

A korábban levezetett összefüggéshez hasonlóan:

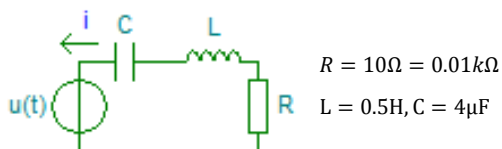
$$H_D(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz+1}} = \frac{2 \frac{z-1}{0.1z+1}}{\frac{z-1}{0.1z+1} + 5} = \frac{4z-4}{2.5z-1.5} = \frac{1.6z-1.6}{z-0.6}$$

Melyből az összehasonlíthatóság érdekében:

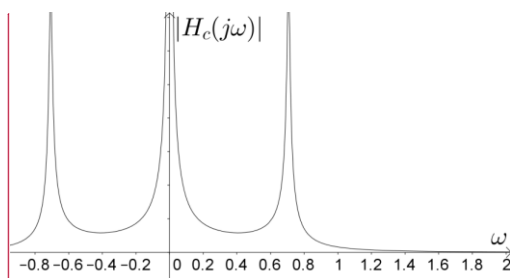
$$h_D[k] = 1.6\delta[k] - \varepsilon[k-1] \cdot 0.64 \cdot 0.6^{k-1}$$

Jól látható, hogy nem egyezik a két kifejezés, mivel az egyik időtartománybeli szimuláció, míg a másik egy frekvencia tartománybeli szimuláció, de nagyon hasonlóak.

3. Példa – már korábbi példa alapján hivatkozunk az ott levezetettre (ld.: [15. oldal](#)).



Határozzuk meg az  $\omega_0 = 0.7 \frac{\text{krad}}{s}$  környékén szinuszra optimális szimulátort a fenti hálózathoz átviteli függvényének alapján.



**Commented [MD9]:** Ez nem jó spektrum, ahogy a jegyzet elején is ugyan ez a hiba.

$$H_c(j\omega) = 2 \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 0.02j\omega + 0.5}, \text{ melyből } H_c(s) = \frac{2s}{s^2 + 0.02s + 0.5}$$

$T$  megválasztásánál, vegyük figyelembe a mintavételezési tételt:

$$T < \frac{\pi}{\omega_0} \cong 4.488 \text{ ms}, \text{ ez alapján válasszuk a } T := 1 \text{ ms}.$$

A szimulátor paramétere meghatározható az adott frekvenciából:

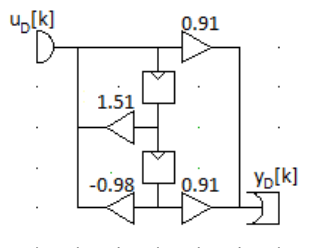
$$p = \frac{T\omega_0}{\tan \frac{\omega_0 T}{2}} \cong 1.92$$

A diszkrét idejű rendszer átviteli függvényét meghatározhatjuk

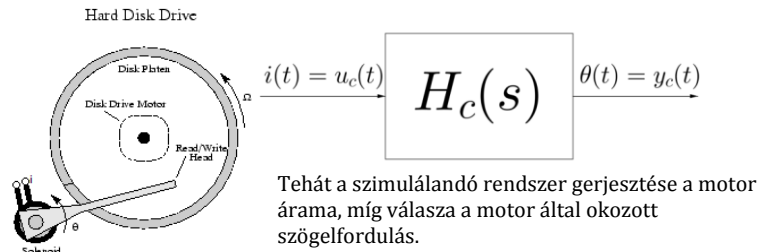
$$H_D(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{1.92}{1} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{2 \frac{1.92}{1} \frac{z-1}{z+1}}{\left(\frac{1.92}{1} \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 0.02 \frac{1.92}{1} \frac{z-1}{z+1} + 0.5} =$$

$$= \frac{0.91z^2 - 0.91}{z^2 - 1.51z + 0.98}$$

Az átviteli függvény alapján realizálhatunk kanonikus hálózatot:



### 3. HDD olvasófej szabályozása (MATLAB példa)



Tekintsük a rendszer mozgásegyenletét:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + C \frac{d\theta}{dt} + K\theta = K_i i, \text{ ahol}$$

$$J = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \text{ a fej tehetetlenségi nyomatéka}$$

$$C = 0.004 \frac{\text{Nm}}{\frac{\text{rad}}{\text{s}}}, \text{ csillapítás ; } K = 10 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}, \text{ rugóállandó}$$

$$K_i = 0.05 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}, \text{ motornyomaték állandó}$$

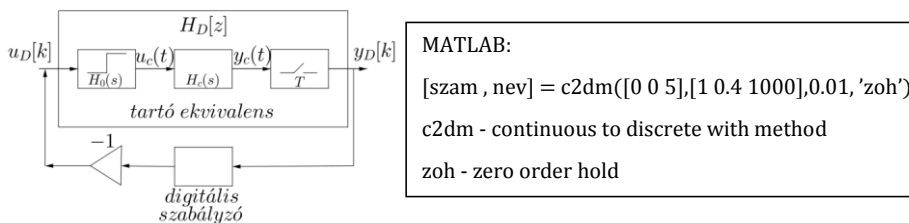
Laplace-transzformálva a mozgásegyenletet a következő adódik:

$$0.01s^2 Y_c + 0.004s Y_c + 10 Y_c = 0.05 U_c, \text{ ebből az átviteli függvény:}$$

$$H_c(s) = \frac{Y_c}{U_c} = \frac{5}{s^2 + 0.4s + 1000}, \quad p_{1,2} = (-0.2 \pm 31.6j) \text{ms}$$

A mintavételezési tétel értelmében  $T < \frac{\pi}{|p|} \cong 0.1 \text{s}$ , ezek alapján legyen  $T = 0.01 \text{s}$

A rendszer szimulálása egységugrásra, valamint Matlab-os leírása (Control System Toolbox szükséges hozzá):



$$H_D(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} H_c(s) \right\} \right\} \Big|_{t=kT} = 2.47 \cdot 10^{-4} \frac{z + 1}{z^2 - 1.897z + 0.996}$$

$$y_c(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} H_c(s) \right\} = \varepsilon(t) [0.005 - 0.005 e^{-0.2t} \cos(31.6t)]$$

$$y_c(kT) = \varepsilon[k] 0.005 \left[ 1 - \underbrace{(e^{-0.2T})^k}_{a=e^{-0.002} \cong 0.998} \cos(\underbrace{31.6kT}_{\vartheta_0=31.6T \cong 0.316 \text{ rad}}) \right]$$

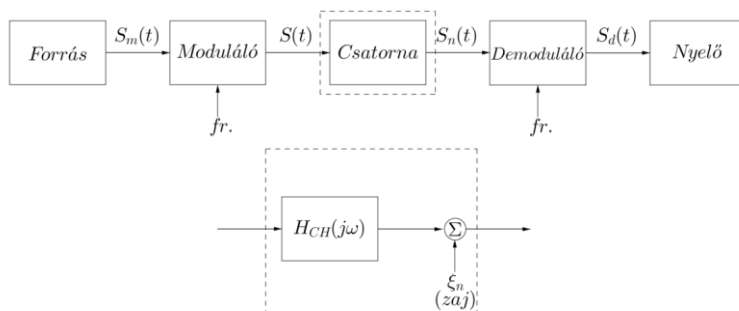
# 15. Analóg Moduláció

## (tananyagból kikerült fejezet)

### I. Modell

Motivációnk, hogy szeretnénk meghallgatni egy rádióműsort. Az emberi beszéd nagyságrendileg a 0-10kHz tartományba esik, azonban ilyen frekvencián nem sugározhatjuk ki több ok miatt sem, például azért, mert így egyszerre egyetlen rádió sugározhatna csak. Szerencsére a Fourier-transzformációra vonatkozó modulációs tétel segítségével a fent említett tartományt a frekvenciatartományban bárhová eltolhatjuk, így a különböző rádióadók műsorait egyszerre is kisugározhatjuk, és azok közül a vevő oldalon választhatunk úgy, hogy a teljes frekvenciatartomány megfelelő szeletét vizsgáljuk. Nem csak rádióknál, de mobil eszközeinknél is hasonló elvek működnek.

FI jelek alakhű átvitele esetén, a következő modellt tekinthetjük, mely alapján a forrásból érkező általunk generált jelet moduláljuk, majd egy csatornán (levegő, vezeték) keresztül továbbítjuk. Ezen csatornák szintén egy rendszerként foghatóak fel, melyek kimenetéhez egy normális eloszlású (GWN-Gaussian White Noise) zaj szuperponálódik. A vevő oldalon demoduláljuk a jelet és a nyelő befogadja.



Feltehetjük, hogy moduláció és a demoduláció alakhű jelátvitelt valósít meg. Vizsgáljuk meg a csatorna átviteli tulajdonságait:

Legyen a csatorna átviteli karakterisztikája  $H_{CH}(j\omega) = \alpha_{CH} e^{-j\omega \Delta t_{CH}}$ , ahol  $\alpha_{CH}$  a csillapítás és  $\Delta t_{CH}$  a késleltetés. Látható hogy a csatorna is alakhű jelátvitelt valósít meg, de a kimenetre a zaj szuperponálódik. Az úgy nevezett Gaussi fehér zaj egy olyan jel, melynek sűrűségfüggvénye:

$$f_{\xi_n}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

Ezen jel teljesítményének átlaga  $P_{\text{átlag}} = \sigma^2$ .

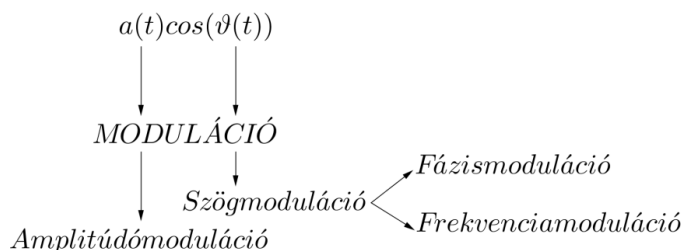
A moduláció célja a csatorna megosztása és a jel illesztése a csatornához.

Mivel csatornaként jellemzően a levegő áll rendelkezésünkre, ezen kell az mindenféle kommunikációt lefolytatnunk egyidejűleg. Ennek megvalósításához különböző jeleket, különböző frekvencia sávokba tolunk el.

Bár a tárgy keretein belül nem foglalkozunk hullámterjedéssel, fogadjuk el, hogy különböző felhasználásokra különböző frekvenciákat érdemes használnunk.

A Fourier-transzformáció modulációs tételénél már láthattuk, hogy a jelet megszorozva egy exponenciális jellel egy frekvenciatartománybeli eltolást kapunk. A moduláció során koszinuszos függvényt használunk, mely lényegében két exponenciális függvény összegének felel meg.

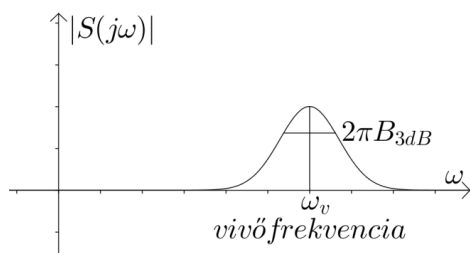
A koszinusz függvény tulajdonságaiból három különböző moduláció típust vezethetünk be. Változtathatjuk a koszinusz függvény amplitúdóját, frekvenciáját és fázisát, a továbbiakban az ezeken alapuló modulációs eljárásokat vizsgáljuk.



Térjünk még vissza a frekvencia tartománybeli vizsgálatra. A továbbiakban a keskenysávú adatátvitellel foglalkozunk, ahol az átvendő jel sávszélessége ( $B$ ) legfeljebb a vivő frekvencia ( $f_p$ ) körülbelül harmincad része:

$$\frac{B}{f_{12}} < 3\%$$

A jel sávzélességén azt a frekvenciatartományt értjük, amelyen kívül a jel elhanyagolható, ez szokásosan az a frekvenciatartomány, amelyen kívül spektrum értéke a maximumának  $\sqrt{2}$ -ed részénél ( $k_{max} - 3dB$ ) kisebb.

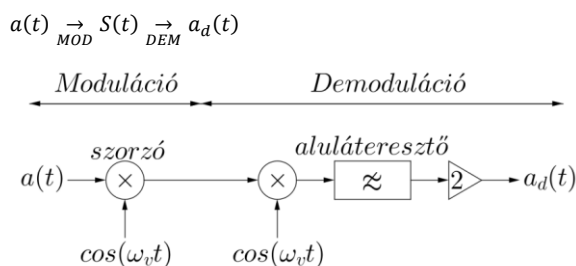


## II. Amplitúdómoduláció

Az információt hordozó jelet a vivő koszinuszos jel amplitúdójába próbáljuk elrejteni.

Céljaink a moduláció során, az alakhű jelátvitel ( $S_{DEM}(t) \sim S_{MOD}(t)$ ), a jel-zaj viszony maximalizálása ( $\max\left\{\frac{S}{N}\right\}$ ), a teljesítmény ( $P$ ) hatékonyság, valamint a sávszélesség ( $B$ ) hatékony kihasználása.

Az amplitúdómoduláció és demoduláció folyamatát az alábbi diagram vázolja:



### 1. AM-DSB (Amplitude Modulation – Dual-SideBand):

A legegyszerűbb eset, a két oldalsáv amplitúdómoduláció.

Az átviendő jel két komponensből áll, egyrészt egy vivőfeszültségből, mely a vivő jel amplitúdóját határozza meg, másrészt az információt hordozó jelből:  $a(t) = U_v + S_m(t)$

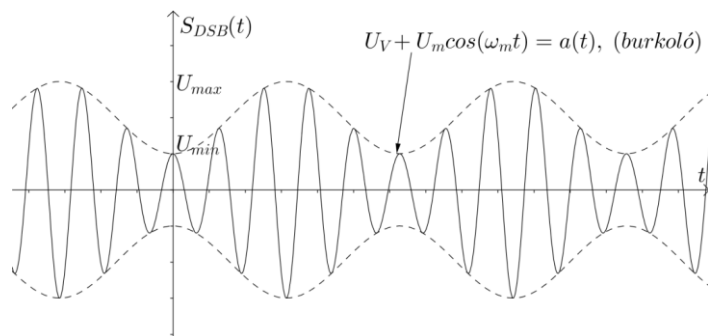
A módszer bemutatásához az  $U_m$  amplitúdójú,  $\omega_m$  körfrekvenciájú koszinuszos jelet visszük át:  $a(t) = U_v + U_m \cos(\omega_m t)$

Ahogy a bevezetőben láttuk, a moduláció koszinuszos vivőjellel való szorzásként valósul meg, tehát a modulált jel:

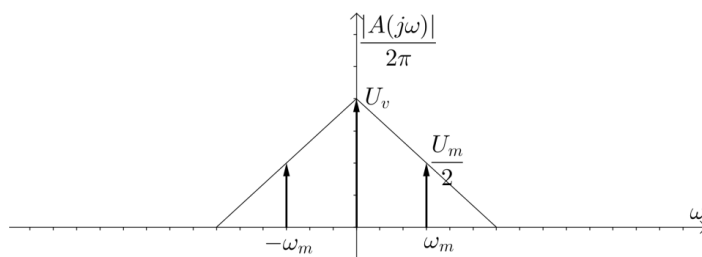
$$S_{DSB}(t) = a(t) \cos(\omega_v t) = U_v \cos(\omega_v t) + U_m \cos(\omega_m t) \cos(\omega_v t)$$

Az  $U_m \cos(\omega_m t) \cos(\omega_v t)$  kifejezés trigonometrikus azonosságok segítségével átalakítható, ezek alapján:

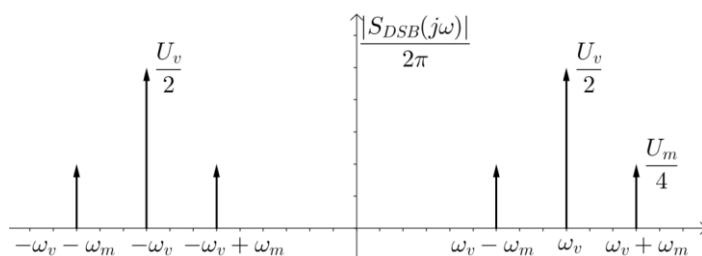
$$S_{DSB}(t) = \underbrace{U_v \cos(\omega_v t)}_{\text{nincs információ}} + \underbrace{\frac{U_m}{2} \cos((\omega_v - \omega_m)t)}_{\text{alsó oldalsáv}} + \underbrace{\frac{U_m}{2} \cos((\omega_v + \omega_m)t)}_{\text{felső oldalsáv}}$$



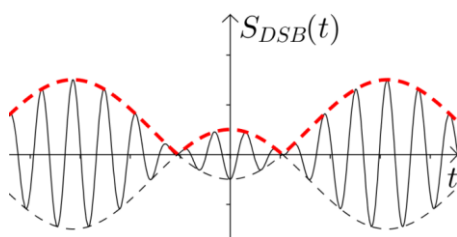
Az  $a(t) = U_v + U_m \cos(\omega_m t)$  kifejezést frekvencia tartományban a következő módon ábrázolható (az értékkészlet az amplitúdó spektrum  $2\pi$ -ed része!):



Az  $S_{DSB}(t) = U_v \cos(\omega_v t) + \frac{U_m}{2} \cos((\omega_v - \omega_m)t) + \frac{U_m}{2} \cos((\omega_v + \omega_m)t)$  jel frekvencia tartományban a következő alakot ölti:



Az  $S_{DSB}(t) = U_v \cos(\omega_v t) + \frac{U_m}{2} \cos((\omega_v - \omega_m)t) + \frac{U_m}{2} \cos((\omega_v + \omega_m)t)$  kifejezésben az információ redundánsan szerepel, a vivő frekvenciához képest szimmetrikusan  $\omega_m$  távolságra. Amennyiben az  $U_m > U_v$ , akkor a burkoló metszi az idő tengelyt, így az alábbi ábrán pirossal jelölt jelet tudjuk demodulálni, mely azonban nem egyezik az átvendő jellel, tehát ésszerű megkötés, hogy a vivő jel amplitúdója legyen nagyobb a modulált jel amplitúdójánál.



Az  $m = \frac{U_m}{U_v}$  hányadoszt modulációs mélységnek nevezzük, és értékét jellemzően százalékban adjuk meg. A fentebbi megkötés értelmében értéke 0% és 100% közé esik normális felhasználás mellett. A teljesítményhatékonyság érdekében célszerű minél nagyobb modulációs mélységet elérni.

A moduláció hátránya, hogy a vivő jelet is kell sugároznunk, azonban nem hordoz információt, tehát a teljesítmény ( $P$ ) egy része felesleges. A két oldalsáv miatt az egyébként szükséges sávszélességnél nagyobb tartományt használunk fel.



Az eddigi vizsgálataink után tekintsünk egy teljesen általános jelet, ekkor:

$$a_{DEM}(t) = 2[a(t) \cos(\omega_v t) \cos(\omega_v t)] = 2 \left[ \frac{1}{2} a(t) + \underbrace{\frac{1}{2} a(t) \cos(2\omega_v t)}_{\substack{\text{nagyobb frekvenciás} \\ \text{nem engedi át a} \\ \text{szűrő, } \approx 0}} \right] = a(t)$$

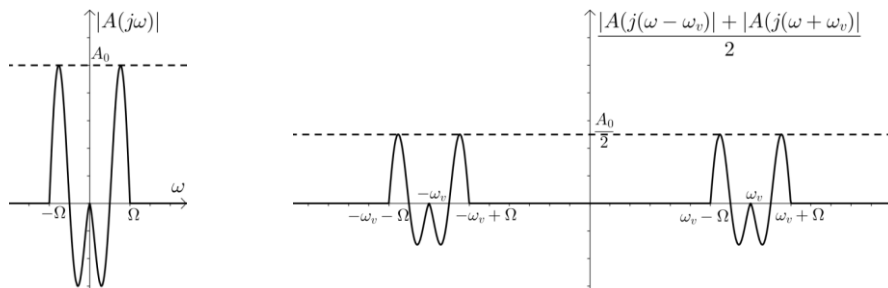
Tekintsük ugyanezen jelet frekvenciatartományban:

A modulációs-tétel alapján:  $x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(j(\omega - \omega_0))$

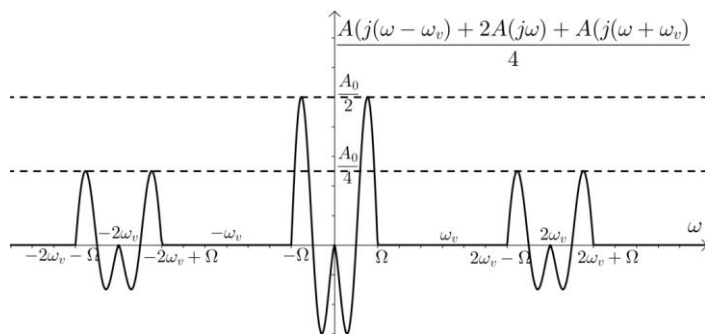
$$x(t) \cos(\omega_0 t) = x(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \leftrightarrow \frac{X(j(\omega - \omega_0)) + X(j(\omega + \omega_0))}{2}$$

$$x(t) \cos^2(\omega_0 t) = x(t) \frac{e^{j2\omega_0 t} + 2 + e^{-j2\omega_0 t}}{4} \leftrightarrow \frac{X(j(\omega - \omega_0)) + 2X(j\omega) + X(j(\omega + \omega_0))}{4}$$

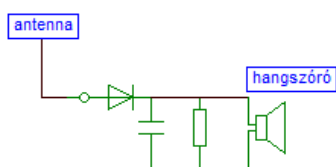
Az eredeti és a modulált jel spektruma:



A demodulált jel spektruma az aluláteresztő szűrő előtt:



Ez a kezdetleges módszer azért terjedt el, mert a demoduláció az alább látható nagyon egyszerű hálózattal megoldható.



## 2. AM-DSB/SC - (Suppressed-Carrier):

A két oldalsávós amplitúdómoduláció teljesítményhatékonyságán első körben a vivő feszültség megszüntetésével javíthatunk, azonban ekkor még nem foglalkoztunk a sávzélesség hatékony felhasználásával.

Az átviendő jel így egy komponensből áll, mely az információt hordozó jel:  $a(t) = S_m(t)$

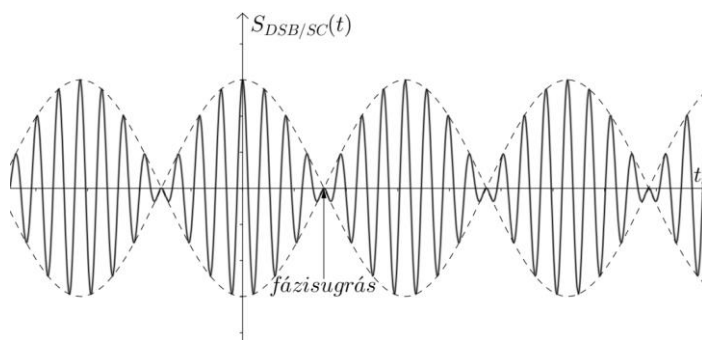
A módszer bemutatásához az  $U_m$  amplitúdójú,  $\omega_m$  körfrekvenciájú koszinuszos jelet visszük át:  $a(t) = U_m \cos(\omega_m t)$

Ahogy a bevezetőben láttuk, a moduláció koszinuszos vivőjellel való szorzásként valósul meg, tehát a modulált jel:

$$S_{DSB/SC}(t) = a(t) \cos(\omega_v t) = U_m \cos(\omega_m t) \cos(\omega_v t)$$

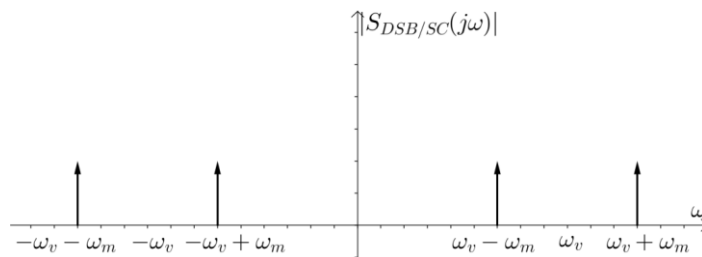
Az  $U_m \cos(\omega_m t) \cos(\omega_v t)$  kifejezés trigonometrikus azonosságok segítségével átalakítható, ezek alapján:

$$S_{DSB/SC}(t) = \underbrace{\frac{U_m}{2} \cos((\omega_v - \omega_m)t)}_{\text{alsó oldalsáv}} + \underbrace{\frac{U_m}{2} \cos((\omega_v + \omega_m)t)}_{\text{felső oldalsáv}}$$



Ebben az esetben az ábra alapján is látható, hogy az AM-DSB-nél megismert demoduláció nyilvánvalóan nem működik, a dióda kimenetén egyenirányított jel jelenik meg, mely nem azonos az eredetivel.

A korábban felrajzolt spektrumokhoz képest, itt annyi a különbség, hogy a vivőfrekvenciás koszinuszos jelhez tartozó  $\delta(\pm\omega_v)$  eltűnik.



### 3. AM-SSB (Amplitude Modulation – Single-SideBand):

Az AM-DSB modulációnál felmerülő sávkihasználtság problémáját az egy oldalsávós amplitúdómodulációval oldjuk meg, azonban jelenleg még nem foglalkozunk a teljesítményhatékonysággal.

Az átviendő jel ismét két komponensből áll, egyrészt egy vivőfeszültségből, mely a vivő jel amplitúdóját határozza meg, másrészt az információt hordozó jelből:  
 $a(t) = U_v + S_m(t)$

A módszer bemutatásához az  $U_m$  amplitúdójú,  $\omega_m$  körfrekvenciájú koszinuszos jelet visszük át:  $a(t) = U_v + U_m \cos(\omega_m t)$

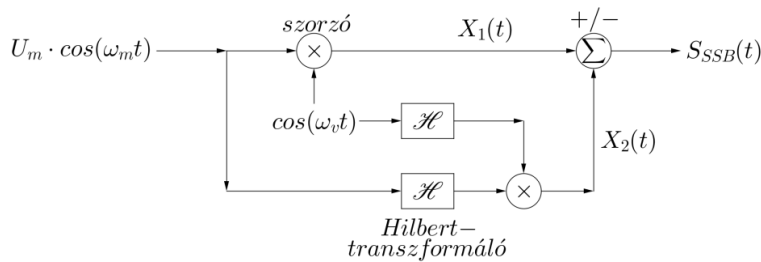
Ahogy a bevezetőben láttuk, a moduláció koszinuszos vivőjellel való szorzásként valósul meg, tehát a modulált jel:

$$S_{SSB}(t) = a(t) \cos(\omega_v t) = U_m \cos(\omega_m t) \cos(\omega_v t)$$

Az  $U_m \cos(\omega_m t) \cos(\omega_v t)$  kifejezés trigonometrikus azonosságok segítségével átalakítható, ezek alapján:

$$S_{SSB}(t) = \underbrace{U_v \cos(\omega_v t)}_{\substack{\text{nincs információ} \\ \text{vivő}}} + \underbrace{\frac{U_m}{2} \cos((\omega_v - \omega_m)t)}_{\text{alsó oldalsáv}} + \underbrace{\frac{U_m}{2} \cos((\omega_v + \omega_m)t)}_{\text{felső oldalsáv}}$$

A kifejezés, ahogy már korábban is megállapítottuk, az információt redundánsan tartalmazza, a két oldalsávból elég lenne egyet választanunk. Egy oldalsáv nem jelenne meg, és ezzel javítanánk a sávzélesség kihasználtságát, ha a Fourier-transzformáció modulációs tételét eredeti formájában használnánk, azaz a  $\cos(\omega_v t)$  helyett  $e^{j\omega_v t}$ -vel szoroznánk. Ezt az Euler-formula értelmében ( $e^{\pm j\omega_v t} = \cos(\omega_v t) \pm j \sin(\omega_v t)$ )-vel való szorzásként valósíthatnánk meg. Az előjel attól függ, hogy melyik oldalsávot szeretnénk használni. A  $\cos(\omega_v t) \pm j \sin(\omega_v t)$  helyett azonban a Hilbert-transzformációt hívjuk majd segítségül, jelenleg elég annyit tudnunk, hogy  $\mathcal{H}\{\cos(\omega_v t)\} = \sin(\omega_v t)$ . Ezek alapján az AM-SSB generálása a következő vázlat alapján történik:



$$X_1(t) = U_m \cos(\omega_m t) \cos(\omega_v t) = \frac{U_m}{2} [\cos((\omega_v - \omega_m)t) + \cos((\omega_v + \omega_m)t)]$$

$$X_2(t) = U_m \sin(\omega_m t) \sin(\omega_v t) = \frac{U_m}{2} [\cos((\omega_v - \omega_m)t) - \cos((\omega_v + \omega_m)t)]$$

Ezen jelek összegeként vagy különbségeként kapjuk meg a két oldalsáv egyikét:

$$X_1(t) - X_2(t): S_{BB\uparrow} = U_m \cos((\omega_v - \omega_m)t) - \text{felső oldalsáv}$$

$$X_1(t) + X_2(t): S_{BB\downarrow} = U_m \cos((\omega_v + \omega_m)t) - \text{alsó oldalsáv}$$

Hilbert-transzformáció:

A Hilbert-transzformáció felfogható lineáris transzformációnak is, tehát megfeleltethetünk neki átviteli karakterisztikát:

$$\mathcal{H}(j\omega) = \begin{cases} -j, & \text{ha } \omega > 0 \\ 0, & \text{ha } \omega = 0 \\ j, & \text{ha } \omega < 0 \end{cases}, \text{ ebből a koszinusz Hilbert-transzformáltja:}$$

$$\mathcal{H}\{\cos(\omega t)\} = \mathcal{H}\left\{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right\} = \frac{-je^{j\omega t} + je^{-j\omega t}}{2} = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \sin(\omega t)$$

Hilbert transzformáció matematikai leírása:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{x(t)\} &= x(t) * \frac{1}{\pi t} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{1}{\pi(t-\tau)} d\tau \\ \mathcal{H}\{x(t)\} &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\left\{x(t) * \frac{1}{\pi t}\right\}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{x(t)\}\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{X(j\omega)\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\}\right\} \\ \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{\pi t} dt}_{0, \text{ páratlan függvény}} - j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\pi t} dt = \\ &= -\frac{j}{\pi} [Si(\omega t)]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{j}{\pi} \text{sgn}(\omega)\pi = -j\text{sgn}(\omega), \text{ ezek alapján} \\ \mathcal{H}\{x(t)\} &= \mathcal{F}^{-1}\{-j\text{sgn}(\omega)X(j\omega)\} \\ \mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x(t)\}\} &= \mathcal{F}^{-1}\{-j\text{sgn}(\omega)\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{-j\text{sgn}(\omega)X(j\omega)\}\}\} = -x(t), \text{ ebből} \\ \mathcal{H}^{-1}\{x(t)\} &= -\mathcal{H}\{x(t)\} \end{aligned}$$

#### 4. AM-SSB/SC - (Single-SideBand/Suppressed-Carrier):

Az amplitúdómodulációt tovább optimalizálhatjuk, amennyiben a már ismert AM-SSB jelből elhagyjuk a vivő jelet, ahogy azt már az AM-DSB-nél is megtettük.

Az átvendő jel így újra egy komponensből áll, mely az információt hordozó jel:  $a(t) = S_m(t)$

A módszer bemutatásához az  $U_m$  amplitúdójú,  $\omega_m$  körfrekvenciájú koszinuszos jelet visszük át:  $a(t) = U_m \cos(\omega_m t)$

Ahogy már többször láttuk, a moduláció koszinuszos vivőjellel való szorzásként valósul meg, tehát a modulált jel:

$$S_{DSB/SC}(t) = a(t) \cos(\omega_v t) = U_m \cos(\omega_m t) \cos(\omega_v t)$$

A  $U_m \cos(\omega_m t) \cos(\omega_v t)$  kifejezés trigonometrikus azonosságok segítségével átalakítható, ezek alapján:

$$S_{DSB/SC}(t) = \underbrace{\frac{U_m}{2} \cos((\omega_v - \omega_m)t)}_{\text{alsó oldalsáv}} + \underbrace{\frac{U_m}{2} \cos((\omega_v + \omega_m)t)}_{\text{felső oldalsáv}}$$

$$\underbrace{S_{SSB/SC\uparrow}}_{\text{felső}} = \frac{U_m}{2} \cos((\omega_v + \omega_m)t) \quad \xleftrightarrow[\text{csak az egyik lehet egyszerre}]{XOR} \quad \underbrace{S_{SSB/SC\downarrow}}_{\text{alsó}} = \frac{U_m}{2} \cos((\omega_v - \omega_m)t)$$

### III. Szög-moduláció

Az információt hordozó jelet a vivő koszinuszos jel fázisában vagy frekvenciájában próbáljuk elrejteni. A két módszer bár erősen különböznek tőnik, mégis egyszerre tárgyaljuk őket, mivel a fázis a frekvencia integráltja, és így a modulációk közt is szoros kapcsolat van. Céljaink a moduláció során, az alakhú jelátvitel ( $S_{DEM}(t) \sim S_{MOD}(t)$ ), a jel-zaj viszony maximalizálása ( $\max \left\{ \frac{S}{N} \right\}$ ), a teljesítmény ( $P$ ) hatékonyság, valamint a sávszélesség ( $B$ ) hatékony kihasználása.

#### 1. Fázis moduláció (PM):

Egy koszinuszos jel argumentumában az adott vivőfrekvencia és az információt hordozó jel jelenik meg:

$$\cos(\omega_v t + \Delta\varphi(t)), \text{ ahol } \Delta\varphi(t) = k_{PM} S_m(t).$$

A modulált koszinuszos jel pillanatnyi körfrekvenciáját a következőképp kaphatjuk meg:

$$\Delta\omega(t) = \frac{d\Delta\varphi(t)}{dt} = k_{PM} \frac{dS_m(t)}{dt} \rightarrow \Delta f(t) = \frac{k_{PM}}{2\pi} \frac{dS_m(t)}{dt}$$

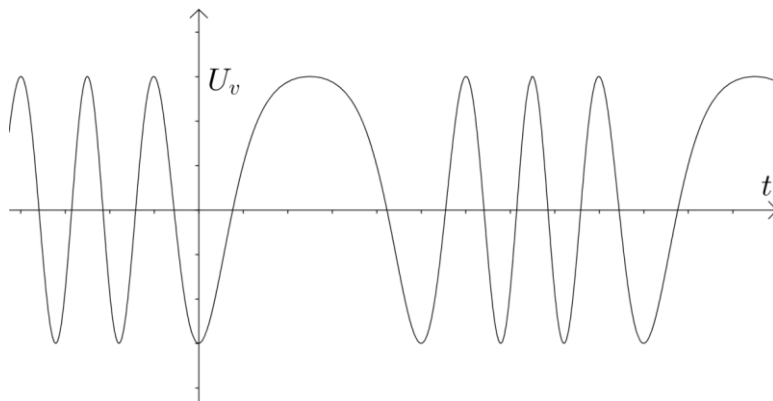
A modulált jel időfüggvénye:  $S_{PM}(t) = U_v \cos(\omega_v t + k_{PM} S_m(t))$

A módszer bemutatásához az  $U_m$  amplitúdójú,  $\omega_m$  körfrekvenciájú koszinuszos jelet visszük át:  $S_m(t) = U_m \cos(\omega_m t)$

Ekkor  $\Delta\varphi(t) = k_{PM} U_m \cos(\omega_m t)$ , mely kifejezéshez bevezetjük a fázislöketet:

$$\Phi_D = k_{PM} U_m$$

A modulált jel időfüggvénye:  $S_{PM}(t) = U_v \cos(\omega_v t + \Phi_D \cos(\omega_m t))$



## 2. Frekvencia moduláció (FM):

Egy koszinuszos jel argumentumában az adott vivőfrekvencia mellett az információt hordozó tag a fázis, amely ahogy már megállapítottuk a jelet hordozó frekvencia integráljaként jelenik meg. A jelet a frekvenciában rejtjük el:

$$\Delta f(t) = k_{FM} S_m(t), \text{ melyből } \Delta \omega(t) = 2\pi k_{FM} S_m(t)$$

Ahogy fizika tanulmányaink során megismertük:

$$\Delta \varphi(t) = \int_0^t \Delta \omega(\alpha) d\alpha = 2\pi k_{FM} \int_0^t S_m(\alpha) d\alpha$$

A modulált jel időfüggvénye:

$$S_{FM}(t) = U_v \cos\left(\omega_v t + 2\pi k_{FM} \int_0^t S_m(\alpha) d\alpha\right)$$

A módszer bemutatásához az  $U_m$  amplitúdójú,  $\omega_m$  körfrekvenciájú koszinuszos jelet visszük át:  $S_m(t) = U_m \cos(\omega_m t)$

Ekkor  $\Delta f(t) = k_{FM} U_m \cos(\omega_m t)$ , mely kifejezéshez bevezetjük a frekvencialöketet:

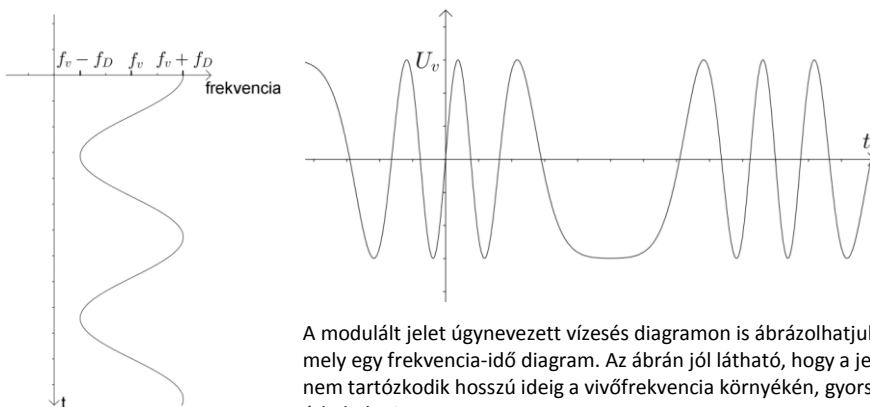
$$f_D = k_{FM} U_m$$

A pillanatnyi frekvencia ekkor:

$$\Delta \varphi(t) = 2\pi k_{FM} \int_0^t U_m \cos(\omega_m \alpha) d\alpha = 2\pi f_D \int_0^t \cos(\omega_m \alpha) d\alpha$$

$$\Delta \varphi(t) = \frac{2\pi f_D}{\omega_m} \sin(\omega_m t) = \frac{f_D}{f_m} \sin(\omega_m t)$$

A modulált jel időfüggvénye tehát:  $S_{FM}(t) = U_v \sin\left(\omega_v t + \frac{f_D}{f_m} \sin(\omega_m t)\right)$



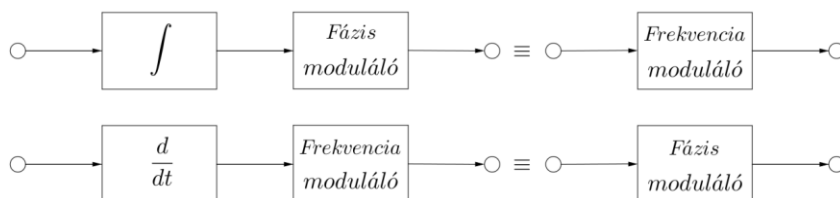
A modulált jelet úgynevezett vizesés diagramon is ábrázolhatjuk, mely egy frekvencia-idő diagram. Az ábrán jól látható, hogy a jel nem tartózkodik hosszú ideig a vivőfrekvencia környékén, gyorsan áthalad rajta.

3. Fázis és frekvencia moduláció összehasonlítása:

A pillanatnyi fázis és frekvencia összefüggéseit az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

|                    | $PM$                                      | $FM$                                       |
|--------------------|-------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\Delta\varphi(t)$ | $k_{PM}S_m(t)$                            | $2\pi k_{FM} \int_0^t S_m(\alpha) d\alpha$ |
| $\Delta f(t)$      | $\frac{k_{PM}}{2\pi} \frac{d}{dt} S_m(t)$ | $k_{FM} S_m(t)$                            |

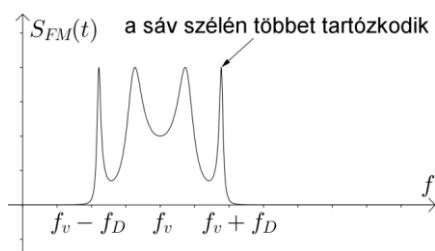
A táblázat alapján jól látható, hogy az információt hordozó jel integráljának fázismoduláltja megegyezik a jel frekvencia moduláltjával, és ugyanez igaz visszafelé is deriválással:



A fázis- és frekvenciajel összefüggéseit az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

|          | $PM$         | $FM$              |
|----------|--------------|-------------------|
| $\Phi_D$ | $k_{PM}U_m$  | $\frac{f_D}{f_m}$ |
| $f_D$    | $\Phi_D f_m$ | $k_{FM}U_m$       |

Vizsgáljuk meg a szög modulációk sávszélességét:



A modulált jel sávszélességét az úgynevezett Carson-formula segítségével közelítjük, a pontos megoldást nem tárgyaljuk:

Fázis moduláció esetén:  $B_{PM} = 2f_m(\Phi_D + 1)$

Frekvencia moduláció esetén  $B_{FM} = 2(f_D + f_m)$





2. Vizsgáljuk meg az alábbi  $S_m(t) = 2 \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t)$  jel AM-DSB moduláltját, ha tudjuk, hogy  $f_1 = 1\text{kHz}$ ;  $f_2 = 1\text{MHz}$  és

$$a(t) = \underbrace{4}_{U_v} + S_m(t)$$

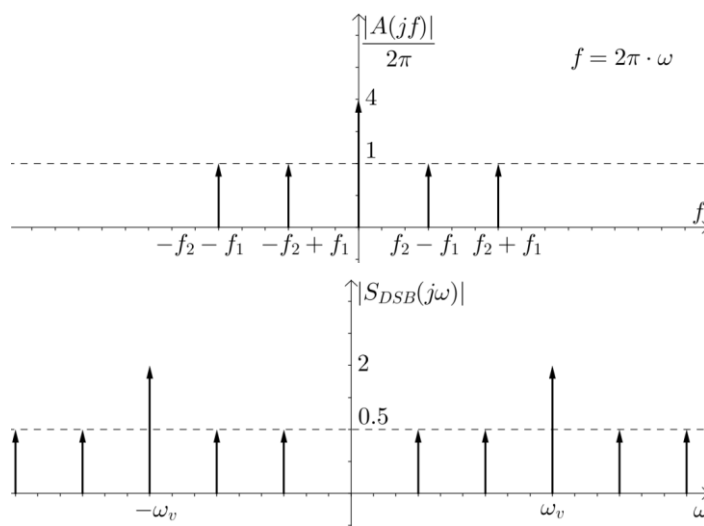
- a. Határozzuk meg a modulációs mélységet ( $m = ?$ )

$$m = \frac{U_{max}}{U_v}$$

$$U_{max} = \max\{S_m(t)\} = 2$$

$$m = \frac{2}{4} = 50\%$$

- b. Rajzoljuk fel az eredeti és a modulált jel spektrumát:



15.21 bra

3. Határozzuk meg a következő  $S_{FM}(t) = 100 \cos(\omega_v t + 10 \sin(\omega_m t))$ ;  $\omega_v = 2\pi 10\text{MHz}$ ;  $\omega_m = 2\pi 1\text{kHz}$  frekvencia modulált jel következő paramétereit:  $f_D = ?$ ,  $B = ?$

$$S_{FM}(t) = U_v \cos\left(\omega_v t + \frac{f_D}{f_m} \sin(\omega_m t)\right) \rightarrow U_v = 100; \frac{f_D}{f_m} = 10$$

a.  $f_D = ? \rightarrow f_D = 10 f_m = 10\text{kHz}$

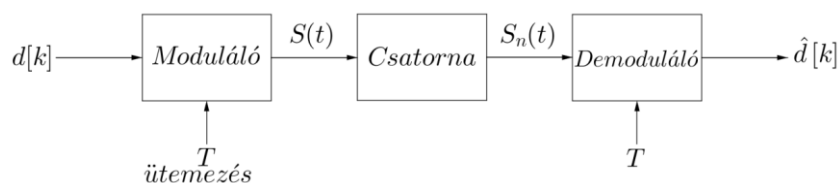
b.  $B \approx 2(f_D + f_m) = 2(10\text{kHz} + 1\text{kHz}) = 22\text{kHz}$

# 16. Digitális moduláció (tananyagból kikerül fejezet)

## I. Modell

Nem meglepő igény, hogy nem folytonos jeleket is szeretnénk átvinni valamilyen csatornán. Hétköznapijainkban ilyen eljárást használunk például, amikor vezeték nélkül internetezünk, de ilyen a GPS, a műholdas TV, vagy a bluetooth is.

A digitális moduláció modelljét az alábbi ábra szemlélteti:



A moduláció minőség a bithibák aránya ( $P_b$  – BER – Bit Error Rate) jellemezheti.

## II. Billentyűzés

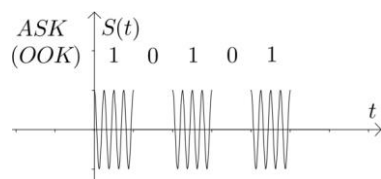
Az egyes bitmintákhoz rendeljük hozzá egy jeltulajdonságot (amplitúdó, szög).

### 1. ASK (Amplitude Shift Key):

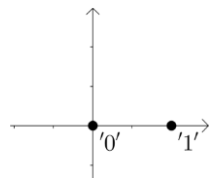
Amplitúdó billentyűzés legegyszerűbb esete, ha a 0 bithez 0, míg az 1 bithez konstans amplitúdójú vivőjelet rendelünk.

$$0 \rightarrow S_0(t) = 0$$

$$1 \rightarrow S_1(t) = \cos(\omega_v t)$$



A hozzárendeléseket a továbbiakban konstellációs ábrán szemléltetjük, mely egy fázorábraként értelmezhető:

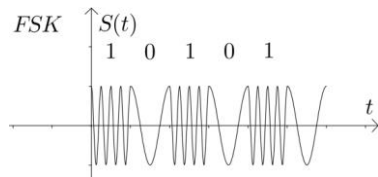


## 2. FSK (Frequency Shift Key):

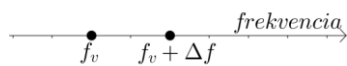
Frekvencia billentyűzés legegyszerűbb esete, ha a 0 bithez  $\omega_v$ , míg az 1 bithez  $\omega_v + \Delta\omega$ , azaz a két bithez különböző frekvenciájú vivőjelet rendelünk.

$$0 \rightarrow S_0(t) = \cos(\omega_v t)$$

$$1 \rightarrow S_1(t) = \cos((\omega_v + \Delta\omega)t)$$



A konstellációs ábrája:

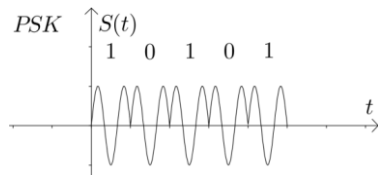


## 3. BPSK/PSK (Binary Phase Shift Key)

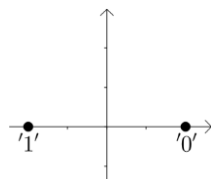
Bináris fázis billentyűzés legegyszerűbb esete, ha a 0 bithez 0, míg az 1 bithez  $\pi$ , azaz a két bithez különböző fázisú vivőjelet rendelünk.

$$0 \rightarrow S_0(t) = \cos(\omega_v t)$$

$$1 \rightarrow S_1(t) = \cos(\omega_v t + \pi)$$



Konstellációs ábrája:



### III. Kiterjesztés több bitre

Egyszerre több bitet is átvihetünk, ha például az adatot nem egy, hanem 4 különböző amplitúdójú jel kódolja. A fenti modulációk 2 bitre való kiterjesztése az alábbi módon történhet:

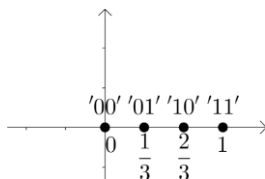
1. ASK:

$$00 \rightarrow S_{00}(t) = 0 \cos(\omega_v t)$$

$$01 \rightarrow S_{01}(t) = \frac{1}{3} \cos(\omega_v t)$$

$$10 \rightarrow S_{10}(t) = \frac{2}{3} \cos(\omega_v t)$$

$$11 \rightarrow S_{11}(t) = 1 \cos(\omega_v t)$$



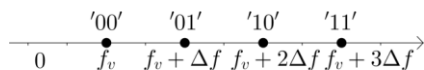
3. FSK:

$$00 \rightarrow S_{00}(t) = \cos((\omega_v + 0 \cdot \Delta\omega)t)$$

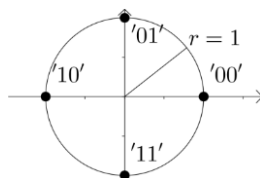
$$01 \rightarrow S_{01}(t) = \cos((\omega_v + 1 \cdot \Delta\omega)t)$$

$$10 \rightarrow S_{10}(t) = \cos((\omega_v + 2 \cdot \Delta\omega)t)$$

$$11 \rightarrow S_{11}(t) = \cos((\omega_v + 3 \cdot \Delta\omega)t)$$



3. QPSK (quadra):



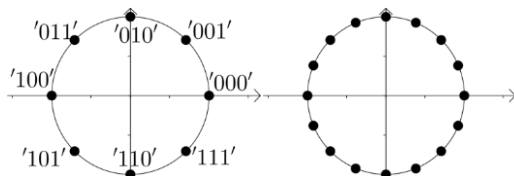
$$00 \rightarrow S_{00}(t) = \cos\left(\omega_v t + 0 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$01 \rightarrow S_{01}(t) = \cos\left(\omega_v t + 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$10 \rightarrow S_{10}(t) = \cos\left(\omega_v t + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$11 \rightarrow S_{11}(t) = \cos\left(\omega_v t + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

4. 8-PSK és 16PSK konstellációs ábrája:



5.  $2^N$ -PSK fázisai közti távolság:

Az egyre több állapot bevezetésével az egyes jelek egyre jobban hasonlítanak egymásra, mely a demodulációt nehezíti. Ez a hasonlóság a konstellációs ábrákon az egyes pontok távolságával jellemezhető mindegyik esetben. A PSK modulációnál az egyes pontok közötti távolság az állapotok függvényében az alábbi táblázatban van összefoglalva:

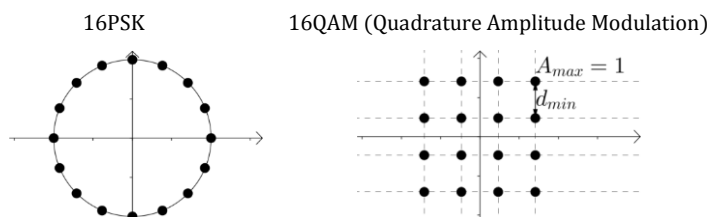
| bitek száma – $N$ | állapotok száma – $2^N$ | $d_{min}$                                              |
|-------------------|-------------------------|--------------------------------------------------------|
| 1                 | 2                       | 2                                                      |
| 2                 | 4                       | $\sqrt{2}$                                             |
| 3                 | 8                       | $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$                                  |
| 4                 | 16                      | $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$                       |
| 5                 | 32                      | $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$            |
| 6                 | 64                      | $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$ |
| ...               | ...                     | ...                                                    |
| $N$               | $2^N$                   | $2 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{2^{N+1}}\right)$ |

Az egyre kisebb távolságok miatt a zaj hatására összetéveszthetőbbek a jelek.

## IV. QAM (Quadrature amplitude modulation)

### 1. 16-PSK és 16-QAM

Észrevehetjük, hogy a pontok közti távolság nagyobb lehet, amennyiben nem egy körön, hanem négyzetesen helyezzük el a pontokat. Ekkor viszont egyszerre a jel több tulajdonságát is változtatnunk kell. Így kapjuk meg a QAM modulációt.



Mivel a QAM modulációnál a pontok távolsága nagyobb, ezért a bithibák aránya kisebb lesz. A bithiba-arányt a jel-zaj viszony határozza meg.

$$\text{Shannon átviteli sebességre vonatkozó tétele: } c = B \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$$

Hasonlítsuk össze a távolságokat a két moduláció esetén:

$$16\text{PSK} \rightarrow d_{min} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \approx 0.3902$$

$$16\text{QAM} \rightarrow d_{min} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.4714$$

### 2. Példa, analóg telefon esetén tudjuk, hogy $B := 3\text{kHz}$ kérdéses a jel terjedési sebessége. Valamint ha váltsuk át a jel-zaj viszonyt ha $\frac{S}{N} = 1000$

a.  $\frac{S}{N} \text{ dB} = 10 \log\left(\frac{S}{N}\right)$ , decibelben szokás megadni, de nem azzal számolunk

$$\frac{S}{N} \text{ dB} = 10 \log(10^3) = 10 \cdot 3 \text{ dB} = 30 \text{ dB}$$

b.  $c = 3k \frac{\text{bit}}{\text{s}} \cdot \log_{1024}(1001) = 30k \frac{\text{bit}}{\text{s}}$

## V. QAM Moduláció és demoduláció

### 1. QAM moduláció:

A QAM moduláció során az amplitúdót és a fázisszöget is módosítjuk, tehát:

$$S(t) = A \cos(\omega_v t + \Phi)$$

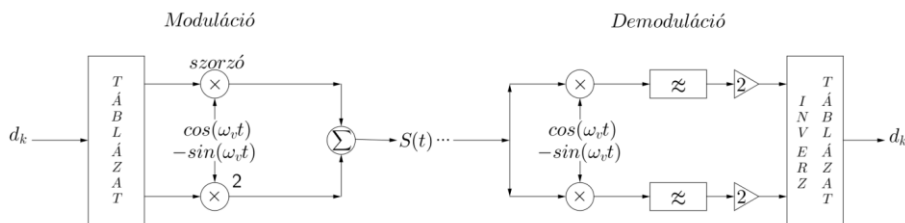
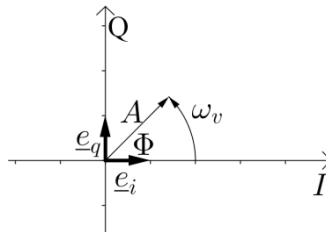
Ezt az alábbi bázisban felírva tehetjük meg:

$$\underline{e}_i = \cos(\omega_v t) \text{ és } \underline{e}_q = -\sin(\omega_v t)$$

Ekkor az  $S(t)$  a következő alakban írható fel az egységvektorokkal:

$$S(t) = A \cos(\Phi) \underline{e}_i + A \sin(\Phi) \underline{e}_q$$

$$S(t) = A \cos(\Phi) \cos(\omega_v t) + A \sin(\Phi) (-\sin(\omega_v t))$$



### 2. QAM Demoduláció:

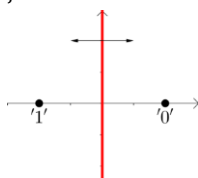
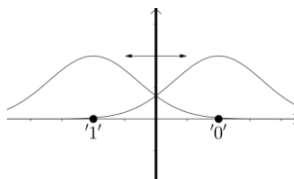
Mint azt már amplitúdó modulációnál megszoktuk koszinuszos szorzással és aluláteresztő szűrővel demodulálunk:

$$A \cos(\omega_v t + \Phi) 2 \cos(\omega_v t) = A \cos(\Phi) + \underbrace{A \cos(2\omega_v t + \Phi)}_{\substack{\text{aluláteresztő} \\ \text{kiszűri}}}$$

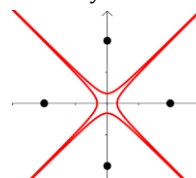
$$A \sin(\omega_v t + \Phi) 2 \cos(\omega_v t) = A \sin(\Phi) - \underbrace{A \sin(2\omega_v t + \Phi)}_{\substack{\text{aluláteresztő} \\ \text{kiszűri}}}$$

### 3. Zaj és döntési eljárás:

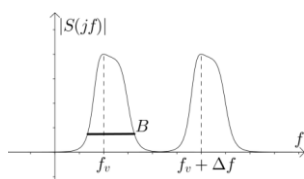
A jelre a csatornán zaj szuperponálódik, mely sok független zajforrás esetén nulla várható értékű normális eloszlás, melyet a szórása jellemez. Ezen zaj hatására az eredetileg küldött érték bizonyos valószínűséggel egy másik értéként érzékel meg a vevőhöz. Minél kisebb a zaj szórása és minél távolabb helyezkednek el a konstellációk, annál kisebb a hiba lehetősége, erre törekszünk. Adott elküldött jelnél a vett érték a konstellációs ábrán bárhol elhelyezkedhet. Könnyen



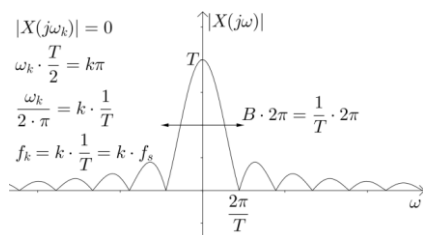
belátható, hogy azon értékhez kell rendelnünk a kapott értéket, amelyhez a legközelebb esik. A döntési határokat jól láthatjuk BPSK és QPSK esetére.



A hiba forrása nem csak a csatornán a jelre szuperponálódó zaj lehet, hanem a moduláció és demoduláció során is adódhatnak hibák. Példának tekintsük az FSK esetén fellépő hibákat. Felhasználásaink során a folytonos idejű jelek mind időkorlátosak, így spektrumuk végtelen. A két spektrum a modulációs során átlapolódhat, így demoduláció esetén nem az eredeti jelet állítjuk vissza. Ahhoz, hogy a hiba elhanyagolható legyen eleget kell tennünk a  $B \leq \Delta f = \frac{1}{T}$  feltételt.

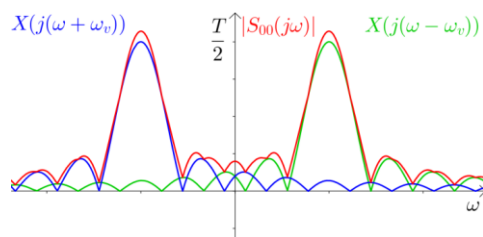


Tekintsük az egyszerűség kedvéért az ablakozó jelet  $x(t) = \varepsilon\left(t + \frac{T}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right)$ , melynek spektrumát már jól ismerjük  $X(j\omega) = T \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}$



Tekintsük a frekvencia moduláltját:

$$00 \rightarrow S_{00}(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_v t) \rightarrow S_{00}(j\omega) = X(j(\omega + \omega_v)) + X(j(\omega - \omega_v))$$



A hiba két forrásból fakadhat. A demoduláció során a spektrum átlapolódhat, valamint a demoduláció során alkalmazott aluláteresztő szűrőnek köszönhetően a visszaállított jel periodikus lesz.



**Köszönjük a figyelmet, sok sikert  
kívánunk mindenkinek a vizsgán!**