

Elméleti kérdések „Forgalmi modellezés”-hez

1. Ismertesse a Little-formula alkalmazásának feltételeit, a formulát, a bizonyításának alapgondolatát (nem levezetést), alkalmazási lehetőségeit részrendszerekre!
2. Mi a Little-formula lényege? Alkalmazza a formulát egy rendszer különböző részeire! Miért eredményes a kiszolgálóra való alkalmazás?
3. Adja meg folytonos idejű Markov láncok egyensúlyi eloszlása létezésének feltételét véges és végtelen állapottér esetén, ismertesse az egyensúlyi egyenleteket és alkalmazásukat állapotcsoportok esetén!
4. Ismertesse az M/M/m rendszert, állapotgráfját, egyensúlyi eloszlásának meghatározási módját, valamint a rendszer alkalmazási területét!
5. Ismertesse az M/G/1 rendszer modellezésének problémáját, a modellezés megoldásának elvét, a rendszerjellemzők származtatásának egy lehetséges megoldását
6. Hasonlítsa össze a folyamegyensúly és a Little-formula alkalmazásának feltételeit és a formulát, s alkalmazza mindkettőt az M/M/1 rendszerre!
7. Adja meg a diszkrét idejű Markov láncok egyensúlyi eloszlása létezésének feltételét véges és végtelen állapottér esetén, ismertesse az egyensúlyi egyenleteket és alkalmazásukat állapotcsoportok esetén!
8. Ismertesse az M/M/m/m rendszert, állapotgráfját, egyensúlyi eloszlásának meghatározási módját, valamint a rendszer alkalmazási területét!
9. Hasonlítsa össze a folytonos és diszkrét idejű Markov láncok egyensúlyi eloszlása létezésének feltételét véges és végtelen állapottér esetén!
10. Ismertesse a születési-halálozási folyamatokat. Adja meg a stabilitás feltételét, valamint ismertesse az egyensúlyi eloszlás származtatásának módját!
11. Ismertesse az M/M/ ∞ rendszert, annak állapotgráfját, stabilitási feltételét, egyensúlyi eloszlásának meghatározási módját! Mit tudunk a rendszer fontosabb teljesítményjellemzőiről?
12. Ismertesse a hátralévő idő paradoxonát és mutassa meg, hogy a hátralévő kiszolgálási időre vonatkozó eredmények hogyan alkalmazhatók az M/G/1 rendszerek vizsgálatában!
13. Ismertesse a nyílt sorbanállási hálózatok lényegét, és a kapcsolódó legfontosabb összefüggéseket!
14. Ismertesse a réselt csatornán való csomagtovábbítás modellezésének módszerét! Mit jelent a korai vagy késői érkezés, hogyan interpretálható a kiszolgálási idő réselt csatorna esetén?
15. Mi a különbség a zárt és a nyílt sorbanállási hálózatok között? Hasonlóság?
16. Milyen hasonlóság és milyen különbség van az M/G/1 rendszer és a réselt csatornán való csomagtovábbítás modellezése között? Adja meg az M/G/1 rendszer átmenetvalószínűségeit! Milyen időpontokra igazak ezek az átmenetvalószínűségek?
17. Mikor nevezünk memóriamentesnek egy eloszlást? Bizonyítsa be, hogy az exponenciális eloszlás memóriamentes!
18. Ismertesse a sorbanállási rendszerek Kendall-féle jelölésrendszerét!
19. Sorolja fel a Poisson folyamat összes tanult tulajdonságát! Ahol tudja mutassa meg e tulajdonságok kapcsolatát!

Mikor nevezünk memóriamentesnek egy eloszlást? Bizonyítsa be, hogy az exponenciális eloszlás memóriamentes!

Egy eloszlás akkor memóriamentes, ha egy esemény bekövetkezésének valószínűsége nem függ attól, hogy az előző bekövetkezés óta mennyi idő telt el.

Egy esemény bekövetkezésének első időpontja: η

Exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye: $F(\eta) = P(\eta \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Annak valószínűsége, hogy az esemény t idő után fog bekövetkezni: $P(\eta > t) = e^{-\lambda t}$ Exponenciális eloszlás memóriamentes, hiszen:

$$P(\eta > t + \Delta t | \eta > t) = \frac{P(\eta > t + \Delta t, \eta > t)}{P(\eta > t)} = \frac{P(\eta > t + \Delta t)}{P(\eta > t)} = \frac{e^{-\lambda(t + \Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = P(\eta > \Delta t)$$

Sorolja fel a Poisson folyamat összes tanult tulajdonságát! Ahol tudja mutassa meg e tulajdonságok kapcsolatát!

- t idő alatt az érkezések számának eloszlása λt paraméterű Poisson eloszlású: $P(\eta = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$
- Δt idő alatt 0 érkezés valószínűsége $1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$, 1 érkezés valószínűsége: $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, 1-nél több érkezés valószínűsége: $o(\Delta t)$
- érkezési időközök független λ paraméterű exponenciális eloszlásúak
- független Poisson folyamatok összege is Poisson folyamat
- Poisson folyamat független p valószínűségű szűrése is Poisson folyamat

Tulajdonságok kapcsolata: minden Δt intervallumban azonos az érkezés valószínűsége $\rightarrow$ örökfjú érkezési időköz $\rightarrow$ exponenciális eloszlású érkezési időköz

Ismertesse a Little formulát és a formula érvényességi feltételeit!

Érvényességi feltételek: a rendszer veszteségmentes és munkamegőrző, valamint léteznek az $E[\lambda] = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$ és az $E[T] = \lim_{t \rightarrow \infty} T_t$ határértékek, ahol T_t az igények által eltöltött átlagos idő a $(0, t)$ intervallumban.

Little formula: a fenti érvényességi feltételek teljesülése esetén $E[X] = E[\lambda]E[T]$

Mi az Erlang-C formula jelentése? Milyen sorbanállási rendszerhez kapcsolódik ez a formula és hogyan?

A formula az M/M/m sorban mutatja meg a várakozás (azaz a foglaltság) valószínűségét. Ez a valószínűség az M/M/m sort leíró Markov lánc $m, m+1, m+2, \dots$ állapotvalószínűségeinek összegeként adódik.

M/G/1

Ismertesse az M/G/1 rendszer modellezésének problémáját, a modellezés megoldásának elvét!

Az alapgond az, hogy az $X(t)$ rendszerbeli igények száma nem emlékeztetmentes. A rendszer mégis modellezhető Markov láncsal mégpedig úgy, hogy a kiszolgálás befejezésekor, diszkrét időpontokban vizsgáljuk a rendszert, és az ilyenkor rendszerben lévő igények számát tekintjük állapotoknak.

Az állapotátmenetek evolúciós egyenlettel írhatók le:

- X_i = a rendszerben lévő igények száma az i . kiszolgálás végén.
- Y_i = az i . kiszolgálás alatt beérkező új igények száma.

A két változó között felírható a következő összefüggés: $X_{i+1} = (X_i - 1)^+ + Y_{i+1}$

Az evolúciós egyenletből levezethető a [Pollaczek–Hincsin-féle várható érték formula](#). A képlet megadja az átlagos várakozási időt a kihasználtságból, illetve a kiszolgálási idő eloszlásának várható értékéből és relatív szórásnégyzetéből. A többi teljesítményjellemző a Little-formula alapján számolható.

Mi a különbség a zárt és a nyílt sorbanállási hálózatok között? Mi a hasonlóság?

A zárt sorbanállási hálózat a nyílt egy olyan speciális esete, amelyben új igény nem érkezik és nem is hagyhatja el a rendszert, azaz csak az i . csomópontból a j . csomópontba való átlépés megengedett. A különbség tehát, hogy a zárt hálózatban az igények száma állandó, míg nyílt hálózat esetén változó.

A hasonlóság abból adódik, hogy a zárt hálózat gyakorlatilag ugyanolyan, mint egy nyílt hálózat, ha az igények nem távoznak el a rendszerből, és nem is érkeznek újak. Az egyensúlyi egyenlet is ugyanúgy írható fel a zárt rendszerre, csak értelemszerűen a kilépő és a bejövő valószínűségeket nem kell figyelembe venni, kizárólag az átlépések valószínűségét.

Mi a Little-formula lényege? Alkalmazza a formulát egy rendszer különböző részeire! Miért eredményes a kiszolgálóra való alkalmazás?

A Little formula összefüggést ad a rendszerben sorbanálló entitások száma és az átlagos érkezési ráta, valamint az átlagos rendszerben eltöltött idő között. Minél nagyobb a rendszerben eltöltött idő, annál több lesz a sorban állók száma. Továbbá minél nagyobb az átlagos érkezési ráta, annál többen fognak sorban állni.

Alkalmazása szerverre: $E[X_s] = E[\lambda]E[x]$ Alkalmazása sorra/bufferre: $E[X_w] = E[\lambda]E[W]$ Alkalmazása veszteséges rendszerre: $E[X] = (1 - p_{loss})E[\lambda]E[T]$

TODO: miért eredményes a kiszolgálóra való alkalmazás?

Hasonlítsa össze a folyamegyensúly és a Little-formula alkalmazásának feltételeit és a formulát, s alkalmazza mindkettőt az M/M/1 rendszerre!

Folyamegyensúly alkalmazásának feltételei: veszteségmentes, stabil sorbanállási rendszerben létezniük kell az $E[\lambda] = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$ és az $E[S] = \lim_{t \rightarrow \infty} S_t$ határértékeknek.

Folyamegyensúly: a fenti feltételek teljesülése esetén $E[\lambda] = E[S]$

A folyamegyensúly tehát akkor alkalmazható, ha az érkezési intenzitás és a távozási (kiszolgálási) intenzitás határértéke létezik. A Little-formula pedig a fentiek szerint akkor, ha az érkezési intenzitás és a rendszerben levő igények által eltöltött átlagos idő határértéke létezik. A folyamegyensúly tehát mintegy a kiszolgáló rendszer szempontjából (kiszolgálási intenzitás) írja le ugyanazon követelményt, amelyet a Little-formula a kiszolgálandó igények szempontjából (várható rendszerben töltött idő) fogalmaz meg.

Folyamegyensúly az M/M/1 rendszerre:

Érkezés: $E[\lambda] = \sum_i \lambda_i p_i = \lambda$

Távozás: $E[S] = \sum_i \mu_i p_i = \mu(1 - p_0)$, ahonnan $E[\lambda] = E[S]$ miatt $p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

Little-formula az M/M/1 rendszerre:

Érkezés: $E[\lambda] = \sum_i \lambda_i p_i = \lambda$

Rendszerben töltött átlagos idő: $E[T] = E[x] + E[W]$

Ha ismerjük $E[x]$ és $E[W]$ értékét, akkor $E[X] = E[\lambda]E[T]$ számítható. Ha $E[X]$ -et és $E[x]$ -et ismerjük, akkor szintén számítható $E[T]$ és így $E[W]$ is, stb.

Ismetesse a hátralévő idő paradoxonát és mutassa meg, hogy a hátralévő kiszolgálási időre vonatkozó eredmények hogyan alkalmazhatók az M/G/1 rendszerek vizsgálatában!

Hátralévő idő paradoxon: az érkezési időközök exponenciális eloszlásúak, viszont a kiszolgálási idő, és így a következő érkezésig hátralévő idő már NEM az! Mi lesz a hátralévő idő eloszlása? Mi a várható értéke?

Jelölés: η : véletlen időtartam v.v., γ : az η időintervallum belsejében az intervallum végéig hátralévő idő

Várható hátralévő idő: $E[\gamma] = E[\eta] \frac{1+C_\eta^2}{2}$

Alkalmazás M/G/1 rendszer esetén:

Várható várakozási idő: $E[W] = \frac{\sigma}{1-\sigma} E[x] \frac{1+C_x^2}{2}$ (Pollaczek-Hincsin várhatóérték formula)

Várható rendszerben eltöltött idő: $E[T] = E[x] + E[W]$

Rendszerbeli igények várható száma: $E[X] = E[\lambda]E[T]$ (Little-formula felhasználása)

Milyen hasonlóság és milyen különbség van az M/G/1 rendszer és a réselt csatornán való csomagtovábbítás modellezése között?

Különbség: réselt csatornán a csomagok ún. időrésekben érkeznek. p valószínűséggel 1, $1-p$ valószínűséggel 0 csomag. M/G/1 rendszerben a csomagok exponenciális eloszlás szerint érkeznek.

Hasonlóság: mind a réselt csatornán mind az M/G/1 rendszerben a csomagokra csak időreseként egy diszkrét időpontban, vagy az időrés elején, vagy az időrés végén tekintünk. Ez utóbbi esetben azért, hogy a modellezés egyszerűsödjön (másképp ugyanis a hátralévő idő eloszlását is ismernünk kellene, hiszen a kiszolgálás ideje nem memóriamentes!). Hasonlóság még, hogy mindkét rendszerben alkalmazható a Little-formula.

Adja meg az M/G/1 rendszer átmenetvalószínűségeit! Milyen időpontokra igazak ezek az átmenetvalószínűségek?

Evolúciós egyenlet: $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} - \chi(X_n)$, ahol $\chi(X)$ értéke 0, ha a rendszer üres, 1, ha a rendszerben van kiszolgálandó igény.

Átmenetvalószínűségek az evolúciós egyenletből: $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(Y_{n+1} = j - i + \chi(X_n))$