Kalkulus

Sáfár Orsolya

2018/2019 ősz

Elérhetőségek

Előadó: Sáfár Orsolya (safaro@math.bme.hu)

Fogadóóra: hétfő 9-10 (H épület 3. emelet 310-es ajtó)

A pontos tárgykövetelmények a `www.math.bme.hu/~safaro/kalkulus` oldalon találhatóak.

A mátrix definíciója

Mátrixnak egy n sorból és k oszlopból álló (szám)táblázatot nevezzük, például:

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2.5 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$$

esetén $n = 3$, $k = 2$. Ekkor az n, k páros a mátrix mérete, ezt úgy jelöljük, hogy $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Később látni fogjuk, hogy a táblázatunk elemei nem csupán valós számok lehetnek.

Indexelés

A mátrixot többnyire nagy betűvel, az elemeit kisbetűvel jelöljük. A mátrix elemeinek helyét a táblázaton belül az adott elem indexével jellemezzünk. Az első szám azt mondja meg, hogy hányadik sorban, a második szám pedig azt, hogy hányadik oszlopban van. Ezeket a kisbetű alsó indexébe írjuk.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}$$

Ekkor $a_{1,2}$ elem az első sor második oszlopában lévő elem, itt 4.

Transzponálás

Az A, $n \times k$ méretű mátrix transzponáltján azon $k \times n$-es mátrixot értjük, amelynek első sora megegyezik az eredeti mátrix első oszlopával, a második sora a második oszloppal, ... Jele: A^{T}. Például:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Ha a mátrix négyzetes (azaz sorainak száma megegyezik az oszlopainak számával), akkor a transzponáltját úgy kapjuk, hogy az elemeit a főátlóra ($a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ elemek) tükrözzük.

Indexekkel kifejezve az A^{T} mátrix (i, j)-edik eleme megegyezik az eredeti mátrix (j, i)-edik elemével.

Konstanssal szorzás

Egy mátrix és egy valós szám szorzatát úgy képezzük, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, például

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 0.5A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2.5 & 3 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix}$$

Mátrixok összeadása

Két mátrixot csak abban az esetben tudunk összeadni, ha megegyezik a méretük, azaz a sorok és oszlopok száma külön-külön is. Ekkor elemenként vesszük az összeget (az azonos pozíciókban lévőket adjuk össze). Például:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Nem értelmezett viszont az $A + B^T$!

A műveletek tulajdonságai

- **Asszociativitás** Az összeadás átzárójelezhető, azaz $(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C}=\mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C})$
- **Kommutativitás** Az összeadás sorrendje felcserélhető, azaz $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{B}+\mathrm{A}$
- **Zérus elem** Létezik egy olyan mátrix, amellyel tetszőleges A mátrixra $\mathrm{A}+0=0+\mathrm{A}=\mathrm{A}$
- **Ellentett** Minden A mátrixhoz van olyan $-\mathrm{A}$-val jelölt mátrix, amelyre $-\mathrm{A}+\mathrm{A}=\mathrm{A}+(-\mathrm{A})=0$ (itt a jobboldalon egy mátrix áll, nem egy szám!)
- **Konstans kiemelhető** Ha c és d valós számok és A és B tetszőleges mátrixok, akkor $(c+d)\mathrm{A}=c\mathrm{A}+d\mathrm{A}$, $c(\mathrm{A}+\mathrm{B})=c\mathrm{A}+c\mathrm{B}$, $(cd)\mathrm{A}=c(d\mathrm{A})$

Mátrixok szorzatának definíciója

Definíció: Legyen A egy $n \times k$ méretű, míg B egy $k \times m$ méretű mátrix. Ekkor az AB mátrix (a két mátrix szorzata) azon $n \times m$ méretű mátrix, amelynek $a_{i,j}$-dik eleme az A mátrix i. sorának és a B mátrix j. oszlopának (mint k elemű vektoroknak) a skalárszorzata.

Az AB mátrixszorzás tehát csak akkor elvégezhető, ha A-nak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora B-nek (azaz ha egymás mellé írjuk a méreteket, akkor a két belsőnek kell stimmelnie). Az ilyen párt kompatibilisnek nevezzük.

Példa

Vegyük az alábbi két mátrixot, és döntsük el, hogy összeszorozhatóak-e.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 1 & 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Az AC szorzás elvégezhető, mert A-nak 2 oszlopa van, C-nek pedig 2 sora. Ugyanakkor a CA szorzás nem végezhető el, mert C-nek 6 oszlopa van, de A-nak csak 3 sora.

Példa- folyt.

Az AC szorzat kiszámításához rendezzük el átlósan a két mátrixot.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 1 & 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Példa- folyt.

A szorzat első sorának első eleme az A mátrix első sorának, és a C mátrix első oszlopának skalárszorzata.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 1 & 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Most $(2,4)$-nek és $(6,5)$-nek kell a skalárszorzata. Két vektor skalárszorzata úgy számítható ki, hogy az azonos pozíciókban lévő elemeket összeszorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk. Itt: $<(2,4)|(6,5)>= 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 32$.

Példa folyt.

A többi elemen végighaladva:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 1 & 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 32 & 46 & 20 & 46 & 34 & 14 \\ 60 & 83 & 46 & 87 & 53 & 27 \\ 83 & 112 & 71 & 121 & 64 & 38 \end{bmatrix} \end{array}$$

A kapott 3×6-os mátrix az AC szorzat.

Nincs kommutativitás

Ha AB elvégezhető, attól még lehet, hogy BA nem végezhető el. Ha mindkettő értelmezett és egyforma méretű is lenne (ez sem biztos), általában akkor sem igaz, hogy $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Például:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} 59 & 27 \\ 15 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{BA} = \begin{bmatrix} 38 & 48 \\ 22 & 28 \end{bmatrix}$$

A mátrixszorzás tulajdonságai

- **Asszociativitás** Ha a mátrixok kompatibilisek, akkor a mátrixok szorzása átzárójelezhető, azaz $\mathrm{A}(\mathrm{BC}) = (\mathrm{AB})\mathrm{C}$
- **Disztributivitás(ok)!** Ha a megfelelő mátrixok kompatibilisek, akkor $\mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{AB}+\mathrm{AC}$, és $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{C} = \mathrm{AC}+\mathrm{BC}$
- **Konstans kiemelhető** Ha a megfelelő mátrixok kompatibilisek, akkor $d(\mathrm{AB}) = (d\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}(d\mathrm{B})$
- **Egységelem** Az $n \times n$-es mátrixok körében egyértelműen létezik egy olyan I mátrix (egységmátrix), amellyel $\mathrm{AI} = \mathrm{IA} = \mathrm{A}$. Ez a mátrix egyébként a főátlójában csupa egyest, egyébként nullákat tartalmazó mátrix.

Inverz

Kérdés, hogy találunk-e minden négyzetes mátrixhoz olyan másik mátrixot, amellyel megszorozva az egységmátrixot kapjuk. Ha létezik ilyen mátrix, akkor az a A mátrix inverzének nevezzük, és A^{-1}-el jelöljük.

Nem biztos azonban, hogy minden mátrixnak létezik inverze. Például a csupa 0 elemekből álló mátrix minden más mátrixszal megszorozva csupa 0-t ad, így ez biztosan nem invertálható. Kérdés, hogy rajta kívül van-e még más nem invertálható mátrix is? Ennek a kérdésnek a megválaszolásához szükségünk lesz a determináns fogalmára.

A determináns definíciója

Legyen A egy négyzetes $n \times n$-es mátrix. Az A mátrix determinánsa egy valós szám, amelyet a következőképpen definiálhatunk.

Válasszunk ki n elemet a mátrixból úgy, hogy minden oszlopból, és minden sorból pontosan egyet veszünk. Ezeket a számokat szorozzuk össze, és a szorzatot lássuk el egy előjellel.

Egy szorzat előjelét úgy kapjuk, hogy megnézzük, hogy az első sorból hányadik oszlopbeli elem kerül a szorzatba, ennek felírjuk a számát. Aztán a második sorbeli elem oszlopának a számát is leírjuk, így haladva az utolsó sorig.

A determináns definíciója - folyt.

Amikor megkaptunk n darab oszlopindexet (oszlopok sorszámát), ami nem más mint az 1-től n-ig számok egy sorrendje (permutációja), megszámoljuk, hogy ebben a permutációban hány olyan pár van, ahol egy nagyobb számot követ egy kisebb. Ha páros sok ilyen pár van, akkor a szorzatunk előjele pozitív lesz, ha páratlan sok, akkor negatív.

Végül adjuk össze az összes lehetséges előjeles szorzatot, ez a szám lesz a mátrix determinánsa.

Kétszer kettes eset

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

Ehhez a mátrixhoz két különböző módon tudjuk előállítani a kéttényezős szorzatokat.

Első esetben az első sorból az első elemet választjuk, $a_{1,1}$-t. A második sorból akkor csak a második oszlopbeli elem jöhet szóba, $a_{2,2}$. Ekkor az oszlopok sorrendje 1 2, ebben nincs (0 darab) fordított pár van, így az előjel pozitív.

A második lehetőség, hogy az első sorból a második oszlopbeli elemet választjuk ki, $a_{1,2}$-t. Ekkor a második sorból csak az első oszlopbeli tudjuk, $a_{2,1}$-t. Itt az oszlopok sorrendje 2 1, ebben egy fordított pár található, azaz a szorzat előjele negatív.

Kétszer kettes eset -folyt.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

Végül tehát a determináns: $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ (azaz a főátlóban lévő elemek szorzata mínusz a mellékátlóban lévő elemek szorzata).

Általában nem a definíció alapján számítjuk ki a mátrix determinánsát. Két gyakran használt módszer a determináns meghatározására a kifejtési tétel (ezt nézzük meg most) és a Gauss-elimináció (ez következő előadáson fog szerepelni).

A determináns kiszámítása kifejtési tétellel

Kifejtési tétel

Ez egy rekurzív módszer, amelynek segítségével egy $n \times n$-es determináns kiszámítását visszavezethetjük n db $(n-1) \times (n-1)$ determináns kiszámítására.

Ehhez kiválasztjuk a mátrix egy tetszőleges sorát (ez szerint fogjuk kifejteni a determinánst). Minden pozíciót ellátunk egy előjellel a sakktábla-szabály szerint: a bal felső elem pozitív (fehér mező), a többi elem előjele pozitív, ha a sakktáblán fehér mező, negatív, ha fekete.

Indexekkel ezt úgy fejezhetjük ki, hogy az (i, j) indexű pozíció előjele $(-1)^{i+j}$ lesz.

A determináns kiszámítása - folyt.

Az eredeti mátrix determinánsa meg fog egyezni egy összeggel: sorban megyünk a kiválasztott sor (= amely szerint ki szeretnénk fejteni a determinánst) elemein.

Minden tagban egy háromtényezős szorzat szerepel: a sakktábla-szabály szerinti előjel, az aktuális elem és az az $(n-1) \times (n-1)$-es determináns, amelyet úgy kapunk, hogy a mátrixból kitakarjuk az aktuális elem sorát és oszlopát.

Ezen eljárás alkalmazható nem csupán sorokra, hanem oszlopokra is. Azaz oszlop szerint is kifejthető a determináns. Ilyenkor az előjelek megállapítása szintén a sakktáblaszabály szerint történik.

Példa

Számítsuk ki az alábbi determinánst!

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Ezt a determináns a második sor szerint célszerű kifejteni, mert az abban szereplő 0 miatt egy taggal kevesebbet kell kiszámolnunk.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

Most alkalmazhatjuk a 2×2-es determináns kiszámításának szabályát.

$$-1 \cdot 2 + 1 \cdot (-8) = -10.$$

Példa

Számoljuk végig ugyanezen példát úgy, hogy a harmadik oszlop szerint fejtjük ki a determinánst!

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 = -10.$$

A determináns tulajdonságai

- Ha egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor λ-szorosát, akkor a determináns nem változik.
- Ha a főátló alatt minden elem 0 (ezeket a mátrixokat háromszögmátrixoknak nevezzük), akkor a determináns a főátlóban lévő elemek szorzata.
- Ha valamelyik sor vagy oszlop minden eleme 0, akkor a determináns is 0.
- Ha két sort felcserélünk, akkor a determináns (-1)-szeresére változik

A determináns tulajdonságai - folyt

- Ha valamelyik sor minden elemét λ-val megszorozzuk, akkor a determináns is λ-val szorzódik. Ugyanez oszlopra is igaz.
- Ha két sor megegyezik, akkor a determináns 0. Ugyanez oszlopra is igaz.
- Ha egyik sor a másik λ-szorosa, akkor a determináns 0.
- A mátrix transzponáltjának determinánsa megegyezik az eredeti mátrixéval.

Szorzástétel Az AB mátrixszorzat determinánsa megegyezik az A és B mátrixok determinánsának szorzatával, azaz $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$.

A determináns és az inverz kapcsolata

Pontosan azon mátrixoknak létezik inverze, amelyeknek a determinánsa nem 0. Ez onnan is következik, hogy $\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}$, és $\det(\mathrm{I}) = 1$ (mert háromszögmátrix), ezért A determinánsa nem lehet 0, hiszen akkor a baloldal is 0 lenne.

Az invertálható mátrixokat más szóval regulárisnak nevezzük. Azon mátrixokat, amelyek nem invertálhatóak szingulárisnak hívjuk.

A mátrixműveletek kapcsolata

Amennyiben valamennyi művelet értelmezett, akkor az alábbi szabályok érvényesek:

- $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathrm{A})}$
- $(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$
- $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$
- $\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$