Valószínűségszámítás ZH megoldás

1. Véletlenszerűen kiválasztunk egymástól függetlenül két számot a $[0,1]$ intervallumból. Jelöljük őket X-szel és Y-nal. Számolja ki a $\mathbf{P}\left(|X-Y|<\frac{1}{2}\right)$ és a $\mathbf{P}\left(X^2+Y^2<\frac{1}{2}\right)$ valószínűségeket!
   Megoldás: Geometriai módszerrel. Az első valószínűség azzal a területtel egyenlő, ami $y=x-\frac{1}{2}$ és $y=x+\frac{1}{2}$ egyenesek között áll. Ez úgy számítható ki, ha a négyzet területéből kivonjuk a sarkokban keletkező derékszögű háromszöget területét:
   $\mathbf{P}\left(|X-Y|<\frac{1}{2}\right)=1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$. A másik valószínűség megegyezik az origó középpontú, $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ sugarú negyedkör területével, azaz
   $\mathbf{P}\left(X^2+Y^2<\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$.

2. Egyszerre dobunk fel 10 szabályos érmét. Jelölje X a kapott fejek, Y pedig a kapott írások számát. Mennyi a $\mathbf{P}(X>Y)$ valószínűség? Adja meg az $\mathrm{R}(X,Y)$ korrelációs együtthatót!
   Megoldás: $X\in B\left(10,\frac{1}{2}\right), Y=10-X\Longrightarrow R(X,Y)=-1$.
   $\mathbf{P}(X>Y)=\frac{1-\mathbf{P}(X=Y)}{2}=\frac{1-\mathbf{P}(X=5)}{2}=\frac{1-\binom{10}{5}\frac{1}{2^{10}}}{2}=\frac{772}{2048}\approx 0,377$.

3. Egy dobozban 3 db piros és 4 db fehér színű golyó van. Belemarkolva a dobozba egyszerre kiveszünk 4 db-ot mintának. Tekintsük az alábbi három eseményt:
   A : páros számú piros golyó van a mintában;
   B : több piros golyó van, mint fehér a mintában;
   C : van fehér színű golyó a mintában.
   Számolja ki a $\mathbf{P}\left(\left(\bar{A}+B\right)C\right)$ valószínűséget!
   Megoldás: Mivel C a biztos esemény, és $B\subseteq\bar{A}$ ezért elég a $\mathbf{P}\left(\bar{A}\right)$ valószínűséget kiszámítani.
   $\mathbf{P}\left(\bar{A}\right)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{3}+\binom{3}{3}\binom{4}{1}}{\binom{7}{4}}=\frac{16}{35}$.

4. Legyen $X\in N(-3,2)$. Számolja ki az $Y=(X+5)^2$ valószínűségi változó várható értékét!
   Megoldás: $\mathbf{E}Y=\mathbf{E}\left(X^2+10X+25\right)=\mathbf{E}X^2+10\mathbf{E}X+25=$
   $=13-30+25=8$,
   mivel $\mathbf{E}X^2=\boldsymbol{\sigma}^2X+(\mathbf{E}X)^2=4+3=13$.

5. Addig dobunk a kockával, amíg 6-ost nem kapunk. Jelölje X a dobások számát! Számolja ki a $\mathbf{P}(5\le X<8)$ valószínűséget!
   Megoldás: $X\in G\left(\frac{1}{6}\right), \mathbf{P}(5\le X<8)=\mathbf{P}(X=5)+\mathbf{P}(X=6)+\mathbf{P}(X=7)=$
   $=\left(\frac{5}{6}\right)^4\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^5\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^6\frac{1}{6}=\frac{56875}{279936}\approx 0,203$.