Valószínűségszámítás 2 pótzárthelyi
2016. május 18.

1. Az X, Y valószínűségi változó pár együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(u,v) = 2(u^3+v^3)$, ha $0 \le u, v \le 1$. Számolja ki a perem sűrűség függvényeket! Mekkora $\mathbf{P}(X < 2Y) = ?$

Megoldás: Szimmetria miatt

$$f_X(u) = f_Y(u) = \int_0^1 2(u^3+v^3)dv = 2\left[u^3v + \frac{v^4}{4}\right]_0^1 = 2u^3 + 0,5, 0 \le u \le 1$$

$$\mathbf{P}(X < 2Y) = \int_0^1 \int_{u/2}^1 2(u^3+v^3)dvdu = \int_0^1 \left[2u^3v + \frac{v^4}{2}\right]_{u/2}^1 du =$$

$$= \int_0^1 2u^3 + 0,5 - u^4 - \frac{u^4}{32}du = \left[\frac{u^4}{2} + 0,5u - \frac{33}{160}u^5\right]_0^1 = 1 - \frac{33}{160} = 0,79375$$

2. Először egy szabályos kockával dobunk, majd a dobott értéknek megfelelően kihúzunk lapokat egy 32 lapos kártyatömegből. Jelölje X a kihúzott lapok között található *figurás* (alsó, felső, király, ász) lapok számát, Y pedig legyen a kihúzott *királyok* száma. *Adja meg a $\mathbf{P}(X = 2, Y = 2)$ valószínűséget!

Megoldás: Legalább 2-őt kell dobni a kockával. Jelölje Z a kockadobás eredményét.

$\mathbf{P}(X = 2, Y = 2 \mid Z = 2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}}, \mathbf{P}(X = 2, Y = 2 \mid Z = 3) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{16}{1}}{\binom{32}{3}},$

$\mathbf{P}(X = 2, Y = 2 \mid Z = 4) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{16}{2}}{\binom{32}{4}}, \mathbf{P}(X = 2, Y = 2 \mid Z = 5) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{16}{3}}{\binom{32}{5}},$

$\mathbf{P}(X = 2, Y = 2 \mid Z = 6) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{16}{4}}{\binom{32}{6}}$

A teljes valószínűség tételéből:

$\mathbf{P}(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} + \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{16}{1}}{\binom{32}{3}} + \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{16}{2}}{\binom{32}{4}} + \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{16}{3}}{\binom{32}{5}} + \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{16}{4}}{\binom{32}{6}}\right]$

3. Legyen $X \in N(2,1)$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(X^2 \ge 10) \le 0,5!$

Megoldás: A Markov-egyenlőtlenségből: $\mathbf{E}X^2 = \sigma^2 X + (\mathbf{E}X)^2 = 1 + 4 = 5,$
$\mathbf{P}(X^2 \ge 10) \le \frac{5}{10} = 0,5.$

4. Legyenek $X \in E(2)$ és $Y \in U(0,2)$ függetlenek. Legyen továbbá $Z = X - 2Y$ és $V = 2X + Y$. Számolja ki Z és V korrelációs együtthatóját.

Megoldás: $\sigma^2 Z = \sigma^2 X + 4\sigma^2 Y = \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{12}, \sigma^2 V = 4\sigma^2 X + \sigma^2 Y = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$\mathrm{cov}(Z, V) = 2\sigma^2 X - 2\sigma^2 Y = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$

$\mathrm{R}(Z, V) = \frac{\mathrm{cov}(Z,V)}{\sigma Z \cdot \sigma V} = \frac{-\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{19}{12}\cdot\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{38}\sqrt{19} = -0.11471$

5. Legyenek $X, Y \in E(2)$ függetlenek és $Z = X + Y$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Konvolúciót kell számolni.

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \cdot f_Y(t-u)du, t > 0$$

$$f_Z(t) = \int_0^t 2e^{-2u} \cdot 2e^{-2(t-u)}du = 4 \cdot e^{-2t}\int_0^t du = 4t \cdot e^{-2t}, t > 0$$