1. Egy hengerkondenzátor sugarai $r_1 = 3$ mm és $r_2 = 6$ mm, hossza $l = 6$ mm, a szigetelőanyag dielektromos állandója $\varepsilon_r = 4$. A belső és a külső elektróda töltése egyaránt 0, ugyanakkor a szigetelőben $\rho = 3\ \mu C/m^3$ sűrűségű, egyenletes eloszlású térfogati töltés van jelen. Határozza meg a kondenzátor feszültségét!

A IV. Maxwell egyenletet felírva:

$$\oint_{A(V)} \vec{E}\ dA = \frac{1}{\varepsilon}\oint_V \rho\ dV$$

Mivel tudjuk, hogy hengerszimmetrikus az elrendezés és a kialakult tér, így:

$$E(r)\cdot 2\pi\cdot r\cdot l = \frac{1}{\varepsilon}\rho(r^2 - {r_1}^2)\cdot\pi\cdot l$$

Az egyenletet átrendezve a következőt kapjuk a térerősségre:

$$E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon}\frac{(r^2 - {r_1}^2)}{r} = \frac{\rho}{2\varepsilon}\left(r - \frac{{r_1}^2}{r}\right)$$

A két elektróda feszültségét megkaphatjuk a térerősség r_1-r_2-ig vett integráljaként:

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} E(r)\ dr = \int_{r_1}^{r_2}\frac{\rho}{2\varepsilon}\left(r - \frac{{r_1}^2}{r}\right)dr = \frac{\rho}{2\varepsilon}\left[\frac{r^2}{2} - {r_1}^2\cdot\ln(r)\right]_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[\left(\frac{{r_2}^2}{2} - {r_1}^2\cdot\ln(r_2)\right) - \left(\frac{{r_1}^2}{2} - {r_1}^2\cdot\ln(r_1)\right)\right] = \underline{0{,}307\ V}$$

---

2. Elektrosztatikus térben a P_1 pont potenciálja $\Phi_1 = -20$ V. Az elektromos térerősség vektorának vonalintergárja a a P_1 ponttól a a P_2 pontig, az őket összekötő egyenes mentén: $\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l} = -30\ \boldsymbol{V}$. Adja meg a P_2 pont Φ_2 potenciálját!

Mivel egy referenciaponthoz képesti potenciál:

$$\Phi(\mathrm{r}) = \Phi(\mathrm{r}_0) - \int_{r_0}^{r}\boldsymbol{E}\ dr$$

Ha a P_1 pont potenciálját vesszük referenciának:

$$\Phi_2 = \Phi(\mathrm{r}_1) - \int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{E}\ dr = -20\ V - (-30\ V) = \underline{10\ V}$$

---

3. A P pont környezetében az elektromos térerősség vektora derékszögű kordinátákban kifejezve: E = (30; 40; 0) kV/m. Az elektromos eltolás vektora: D = (0,84; 1,12; 0) As/m². Az elektromos tér energiasűrűsége ugyanebben a pontban $w_e = 0{,}07\ J/m^3$. Mit állíthatunk ez alapján a teret kitöltő közeg P pontbeli viselkedéséről?

Amennyiben lineáris a közegünk a következőképpen számolhatjuk az energiasűrűséget:

$$w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{DE} = \frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E^2}$$

A feladatban megadott E és D alapján a következőt kapjuk az energiasűrűségre:

$$w_e = \frac{1}{2}\ 50\frac{kV}{m}\cdot 1{,}4\frac{As}{m^2} = 0{,}035\ J$$

Vagy másféleképpen: kiszámolhatjuk az elméleti permittivitást (mennyi lenne, ha tényleg lineáris lenne az anyag):

$$\varepsilon_x = \frac{D_x}{E_x} = 2{,}8 * 10^{-11}\,\frac{As}{Vm} \qquad \varepsilon_y = \frac{D_y}{E_y} = 2{,}8 * 10^{-11}\,\frac{As}{Vm}$$

Ebből pedig számolhatjuk az energiasűrűséget:

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}8 * 10^{-11}\,\frac{As}{Vm} \cdot \left(50\,\frac{kV}{m}\right)^2 = 0{,}035\,J$$

Látható, hogy nem a feladatban megadott értéket kapjuk, tehát nemlineáris az anyag.

---

4. Két légmagos tekercs egymáshoz közel helyezkedik el. Ha áramaik $I_1 = 2$ A és $I_2 = 0$, akkor fluxusaik rendre $\Psi_1 = 2{,}5$ Wb ill. $\Psi_2 = 0{,}6$Wb. Mekkora lehet Ψ_1 fluxus, ha $I_1 = 0$ és $I_2 = 0{,}5$ A?

Definíció szerint tudjuk, hogy:

$$L_{12} = \frac{\psi_1}{I_2}, \quad ha\; I_1 = 0 \qquad és \qquad L_{12} = L_{21} = M$$

Így tehát:

$$M = \frac{\psi_2}{I_1} = 0{,}3\,H$$

Ebből pedig számolhatjuk Ψ_1 –t $I_2 = 0{,}5$ A esetén:

$$\psi_1 = M \cdot I_2 = \underline{0{,}15\,Wb}$$

---

5. A 0,1 S/m fajlagos vezetőképességű talajban h =5 m mélyen egy $r_1 = 20$ cm sugarú fém földelőgömb van. Mekkora a földfelszínen, a gömb feletti pontban a potenciál (a végtelen távoli, 0 potenciálú ponthoz képest), ha a földelő árama 100 A?

Az gömb kis sugara miatt és mivel úgyse a gömb belsejében érdekel minket a potenciál, vehetjük az pontszerű áramforrásnak a gömböt és ekkor a következő árameloszlást írhatjuk fel:

$$\boldsymbol{J} = \frac{I}{S} = \frac{I}{4r^2\pi}$$

A differenciális Ohm törvényből:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\sigma} = \frac{I}{4r^2\pi\sigma}$$

Ebből a potenciált a következőképpen írhatjuk fel:

$$\Phi(\mathrm{r}) = \Phi(\infty) - \int_\infty^r \boldsymbol{E}\,dr = -\int_\infty^r \frac{I}{4r^2\pi\sigma}\,dr = \frac{I}{4r\pi\sigma}$$

Mivel a levegő nem vezeti az áramot, így ezt is figyelembe kell vennünk, mely megtehető a tükrözéses módszerrel. Tehát felveszünk a földfelszínre tükrözve még egy pontszerű áramforrás szintén I árammal. Ekkor a potenciál a fölfelszínen a földelőgömb felett az eredeti és a fiktív áramforrás szuperpozíciója lesz. Tehát:

$$\Phi = \frac{I}{4h\pi\sigma} + \frac{I}{4h\pi\sigma} = \frac{I}{2h\pi\sigma} = \underline{31{,}83\,V}$$

6. Egy 4 m hosszú, 75 Ω hullámimpedanciájú, ideálisnak tekinthető távvezetéket 10 Ω belső ellenállású szinuszos generátor táplál. A távvezetéken a hullámhossz 2,5 m az adott frekvencián. Mekkora impedanciával kell lezárni a távvezetéket a másik végén, hogy az a lehető legnagyobb hatásos teljesítményt vegye fel?

Ahhoz hogy a lehető legnagyobb legyen a felvett hatásos teljesítmény, úgy kell lezárni a távvezetéket, hogy ne legyen reflexió. Ezt úgy lehet megvalósítani, hogy illesztjük a lezárást, tehát a lezárás vége felől a dezaktivizált hálózat bemeneti impedanciájának konjugáltjával egyenértékű lezárásra van szükségünk.

Bemeneti impedancia számítása ideális távvezeték esetén:

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_2 \tan(\beta l)}$$

Ehhez azonban szükségünk van a β-ra, amit a következőképpen kaphatunk meg:

$$Mivel \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \qquad \rightarrow \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Tehát:

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_2 \tan(\beta l)} = 75 \cdot \frac{10 + j \cdot 75 \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{2,5} \cdot 4\right)}{75 + j \cdot 10 \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{2,5} \cdot 4\right)} = (15,14 + j53,02)\ \Omega$$

$$Z_2 = Z_{be}{}^* = \underline{(15,14 - j53,02)\ \Omega}$$

7. Ha egy 75 Ω hullámimpedanciájú, szinuszos forrással táplált ideális távvezetéket R_2 = 50 Ω ellenállással zárunk le, akkor a távvezeték mentén a feszültség maximális amplitúdója 12 V. Mekkora értékre csökkenthető ez a maximum pusztán az R_2 ellenállás változtatásával, ha a forrás által betáplált hatásos teljesítmény állandó? (megj.: a távvezeték a hullámhossznál hosszabb)

Kezdjük a (forrás által) betáplált teljesítmény kiszámolásával. Tudjuk, hogy:

$$P_{be} = P^+ - P^- = \frac{1}{2Z_0}(|U_2^+|^2 - |U_2^-|^2)$$

Ehhez szükségünk van U_2^+-ra és U_2^- -ra, de ismerjük az impedanciákat, így:

$$r = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = -0,2$$

$$U_{max} = U_2^+\,(1 + |r|) \quad \rightarrow \quad U_2^+ = \frac{U_{max}}{(1 + |r|)} = 10\,V \quad \rightarrow \quad U_2^- = \mathrm{r} \cdot U_2^+ = -2\,V$$

Ebből tehát már számolhatjuk a teljesítményt:

$$P_{be} = \frac{1}{2Z_0}(|U_2^+|^2 - |U_2^-|^2) = 0,64\,V$$

A maximális amplitúdó akkor lesz a legkisebb, ha a lezáráson nincsen reflexió (r = 0), ekkor U_2^- = 0, amit úgy tudunk elérni, hogy $Z_0 = Z_2$. Tehát a teljesítmény képletét átrendezve:

$$Mivel\ U_2^- = 0\ \ , ezért\!: \quad P_{be} = \frac{1}{2Z_0}(|U_2^+|^2) \quad \rightarrow \quad |U_2^+| = \sqrt{2Z_0 P_{be}} = 9,79\,V$$

$$Ekkor\ mivel\ r = 0,\ \ U_{max} = U_2^+\,(1 + |r|) = \underline{9,79\,V}$$

8. Levegőben terjedő, lineárisan polarizált síkhullámban az elektromos térerősség hely-, és időfüggvénye $E(x, y, z, t) = e_y \cdot 20$ V/m · cos(2πft+βx), amelyben a frekvencia f = 100 MHz. Adja meg a mágneses térerősség vektorát a (2m; 3m; -1m) koordinátájú pontban a t = 0 pillanatban.

E függvényéből láthatjuk, hogy x irányba terjed és y irányba mutat, ebből tehát felírhatjuk H időfüggvényét:

$$\boldsymbol{H}(x, y, z, t) = -\overrightarrow{e_x}\frac{E_0}{Z_0}\cos(2\pi f t + \beta x)$$

Ehhez szükségünk van β-ra, amit a következőképpen számolhatunk:

$$Mivel\ v = \frac{\omega}{\beta} \quad és\ jelen\ esetben\ v\ a\ fényesbesség, így\colon\ \beta = \frac{2\pi f}{c} = 2{,}0958\ \frac{rad}{m}$$

$$Z_0 = \eta = 377\ \Omega$$

Így a felírt egyenletbe behelyettesítve:

$$\boldsymbol{H}(x, y, z, t) = -\overrightarrow{e_x}\frac{20\frac{V}{m}}{377\ \Omega}\cos\left(2\pi \cdot 100\ MHz \cdot 0 + 2{,}0958\ \frac{rad}{m} \cdot 2\right) = \underline{\overrightarrow{e_x} \cdot 26{,}4\frac{mA}{m}}$$

9. Levegőből érkező, lineárisan polarizált síkhullám merőlegesen esik az ideális vezető közeg sík határfelületére. A beeső hullám elektromos térerősségének amplitúdója 53 V/m. Határozza meg a vezető anyag határán folyó felületi áramsűrűség amplitúdóját.

Az anyaghatárra a következő folytonossági egyenleteket írhatjuk fel (z = 0 a közeghatár):

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$H_{2t} = H_{1t} + K$$

A két közegben a hullám terjedése:

$$E_1(z) = E_1^+ e^{-\gamma z} + rE_1^+ e^{\gamma z}$$

$$H_1(z) = \frac{E_1^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - r\frac{E_1^+}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$$E_2(z) = E_2^+ e^{-\gamma z}$$

$$H_2(z) = \frac{E_2^+}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

A két anyag hullámimpedanciája és terjedési együtthatója (1-es anyag a levegő, 2-es a vezető):

$$Z_{01} = \eta = 377\ \Omega$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \quad Mivel\ \sigma \to \infty, \quad ezért\ \ Z_{02} \to 0$$

$$\gamma_1 = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\gamma_2 = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \quad Mivel\ \sigma \to \infty, \quad ezért\ \ \gamma_2 \to \infty$$

Így a reflexiós tényező:

$$r = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = -1$$

Mivel a 2-es közeg terjedési együtthatója végtelen, így ott:

$$E_2(z) = E_2^+ e^{-\gamma z} \rightarrow 0$$

$$H_2(z) = \frac{E_2^+}{Z_0} e^{-\gamma z} \rightarrow 0$$

Az 1-es közeg egyenleteibe a reflexiós tényezőt beírva a következőt kapjuk az anyaghatárra (z = 0):

$$E_1(0) = E_1^+ + rE_1^+ = 0$$

$$H_1(0) = \frac{E_1^+}{Z_0} e^{-\gamma 0} - r\frac{E_1^+}{Z_0} e^{\gamma 0} = \frac{2E_1^+}{Z_0}$$

Mivel a feladat megadta a beeső hullám amplitúdóját és tudjuk, hogy a 2-es közegben $H_2 = 0$, így:

$$H_1(0) = \frac{2E_1^+}{Z_0} = 0{,}2811\,\frac{A}{m}$$

$$A\ folytonossági\ egyenletből: \quad H_{2t} = H_{1t} + K \quad \rightarrow \quad H_{1t} = -K$$

$$\underline{|K| = 281{,}1\,\frac{mA}{m}}$$

---

10. Egy antenna irányhatása decibelben kifejezve $D_{dB} = 10 \cdot \log_{10}(D) = 3{,}52$ dB. Az antenna által kisugárzott hatásos teljesítmény 2 kW. Legfeljebb mekkora lehet az elektromos térerősség amplitúdója az antennától 500 m távolságban? (távoltér)

A teljesítménysűrűség 500 m távolságban:

$$D = \frac{S_{max}}{\frac{P_s}{4r^2\pi}} \quad \rightarrow \quad S_{max} = D \cdot \frac{P_s}{4r^2\pi}$$

$$Mivel \quad D = 10^{\frac{D_{dB}}{10}} = 2{,}249 \quad így: \quad S_{max} = 1{,}432\,\frac{mW}{m^2}$$

Szabadtéri hullámterjedéssel számolva:

$$Z_0 = \eta = 377\ \Omega$$

$$Mivel \quad H = \frac{E}{Z_0} \quad és \quad \bar{S} = \frac{1}{2}\bar{E} \cdot \bar{H}^* \quad így:$$

$$E_{max} = \sqrt{2 \cdot S_{max} Z_0} = \underline{1{,}039\ \frac{V}{m}}$$