A1 Matematika vizsgazárthelyi 2006.01.18.

1. [15p] a. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{1-\tan x}{4x-\pi} = ?$ b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x^4}} = ?$
c. $\lim\limits_{x\to 0} (\cosh x)^{\coth x} = ?$

2. [15p] Végezzünk függvényvizsgálatot az $f(x) = x^4 e^{-x}$, $x \geq 0$ függvényre.

3. [15p] a. Definiáljuk a primitív függvényt, az integrálfüggvényt és mondjuk ki az integrálfüggvényről tanult állításokat.
b. Bizonyítsuk be: ha $\lim a_n = a$, akkor bármely a_{n_k} részsorozat is a-hoz tart.

4. [15p] Az $y = 1/x^2$, $x > 0$ görbe érintőegyeneseinek vegyük a pozitív x, y féltengelyek közé eső szakaszát. Melyik érintőnél lesz ez a szakasz a legrövidebb?

5. [15p] $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = ?$

6. [15p] a. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^{\ln x} \cos(t^2)\,dt = ?$ b. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx = ?$ $(\sin x = t)$

7 [10p] $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = ?$

****

Munkaidő 100 perc.
$P = (1.zh + 2.zh + 3 * vizsgazh)/5$. Jegyhatárok P-re: 40, 55, 70, 85 pont.
Jelesért szóbelizni is kell.

1° $z=2x+3y \Rightarrow x-y+2(2x+3y)=1$, $y=\frac{1}{5}-x \Rightarrow z=2x+3\left(\frac{1}{5}-x\right)=\frac{3}{5}-x$

~~xz~~. $x=\frac{1}{5}-y=\frac{3}{5}-z$ ez egyenes egyenlet rendszere

2° a) $\lim = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} \underset{\substack{\frac{1}{n}=x\to 0 \\ \text{átviteli elv}}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \cancel{\cos x}\, \frac{1-\cos x}{x^2} \underset{\frac{0}{0},\ l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$

b) $\left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{3n} = \left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{3n+2} \cdot \left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{-2} \to e^{-3}\cdot 1^{-2} = e^{-3}$

3° $f' = 3x^2-15$ miatt

	$(-4,-\sqrt{5})$	$(-\sqrt{5},\sqrt{5})$	$(\sqrt{5},4)$
f	↗	↘	↗

. $f(-4)=-64+60+1=-3<0$

$f(-\sqrt{5})=-5\sqrt{5}+15\sqrt{5}+1>0$, f szig mon nő $[-4,-\sqrt{5}]$-ön $\Rightarrow$ pontosan egy gyök van $(-4,-\sqrt{5})$-ön. Hasonlóan: $f(\sqrt{5})=5\sqrt{5}-15\sqrt{5}+1<0$ miatt $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$-ön pontosan egy gyök, $f(4)=64-60+1=5>0$ miatt pontosan egy gyök $(\sqrt{5},4)$-en.

Összesen 3 gyök $[-4,4]$-en

4° a) Rolle: $f\in C[a,b]$ diffható (a,b)-n, $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists\, a<c<b$, hogy $f'(c)=0$

Lagrange: $f\in C[a,b]$ diffható (a,b)-n $\Rightarrow \exists\, a<c<b$, hogy $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

b) Ha $a<x_1<x_2<b$ tetsz., akkor Lagrange tét miatt $\exists\, x_1<c<x_2$, hogy

$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)=0 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ tetszőleges belső x_1, x_2 pontra

5° Az A (ill B) által okozott zaj A-tól x távolságra $c\cdot\frac{4}{x^2}$ (ill $c\cdot\frac{1}{(400-x)^2}$). Ezért minimalizálandó $f(x)=\frac{4}{x^2}+\frac{1}{(400-x)^2}$ a $[0,400)$ halmazon. $f'=\frac{-8}{x^3}+\frac{2}{(400-x)^3}=0$, $\frac{x}{400-x}=\sqrt[3]{4}$, minimumnak kell lenni $x=\frac{400\cdot\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt[3]{4}}$ (méterben) a minimumhely, mert és a deriváltnak csak ez az egy gyöke volt.

6° a) $\int\cos^3 x\,dx = \int(\cos x-\cos x\sin^2 x)\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}+C$

b) $\int\sqrt{x}\,\mathrm{atan}\sqrt{x}\,dx \underset{\substack{x=t^2 \\ dx=2t\,dt}}{=} \int t\,\mathrm{atan}\,t\cdot 2t\,dt = \int \underbrace{2t^2}_{u'}\cdot\underbrace{\mathrm{atan}\,t}_{v}\,dt = \frac{2}{3}t^3\,\mathrm{atan}\,t -$

$-\int\frac{2}{3}t^3\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{2}{3}t^3\,\mathrm{atan}\,t-\frac{2}{3}\int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{2}{3}t^3\,\mathrm{atan}\,t-\frac{t^2}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+t^2)$

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\mathrm{atan}\sqrt{x}-\frac{x\sqrt{x}}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+C$, $x>0$

7° A térfogat ugyanaz, mintha az inverz függvényt $\left(\frac{1}{x^2},\ 1\le x<\infty\right)$ forgatnánk az x-tengely körül. Ezért a térfogat

$V=\pi\int_1^\infty f^2 = \pi\int_1^\infty\frac{1}{x^4}\,dx = \lim\limits_{R\to+\infty}\pi\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^R = \frac{\pi}{3}$