

A MÁGNESES ERŐTÉR FORRÁSA

A tudomány két lábán halad előre, e kettő: a kísérlet és az elmélet.

ROBERT A. MILLIKAN

(Előadás a Nobel-díj átvételekor, 1924.)

31.1 Bevezetés

Az előző fejezetben a statikus mágneses erőkkel és a mozgó töltésekre kifejtett erőkkel foglalkoztunk. Ebben a fejezetben a statikus mágneses erők eredetét vizsgáljuk meg: az elektromágnesség érdekes tulajdonsága, hogy elektromos töltések stacionárius áramlása statikus mágneses erőteret hoz létre. Megmutatjuk továbbá, hogy az elektromos és mágneses erők között bizonyos szimmetria áll fenn; nevezetesen az, hogy változó mágneses terek elektromos, míg változó elektromos erők mágneses erőteret hoznak létre. E szimmetria akkor vált nyilvánvalóvá, amikor James Clerk Maxwell (1831–1879) angol fizikus elvégezte az utolsó simításokat az elektromágnesség elméletén.

31.2 A Biot-Savart törvény

1819-ben a dán fizikus, Hans Christian Oersted (1777–1851) éppen befejezett egy elektromosságról és mágnességről szóló előadást, amikor egy áramot vezető huzalt iránytűhöz közelített. Ennek hatására az iránytű új irányba állt¹. Az elektromosság és mágnesség közötti kapcsolat felfedezése alapvető fontosságú volt. Számos kortárs fizikus, különösen Franciaországban, követe Oersted kísérletét, hamarosan új felfedezésekkel mélyítette az elektromágnességre vonatkozó ismereteinket.

Az elektromos erők tanulmányozva úgy találtuk, hogy azok eredete a elektromos töltések. Felismertük, hogy tetszés szerinti töltéeloszlástól adott pontban létrehozott elektromos térerősség kiszámításához először az elemi dq töltés által keltett $d\mathbf{E}$ elemi térerősséget kell meghatározni. Ezt az alábbi, távolság négyzetével fordítottan arányos összefüggés adja meg:

$$d\mathbf{E} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

¹ Oersted felfedezése valószínűleg véletlen volt. Az Amerikai Fizikatanárok Egyesülete minden évben emlékművet adományoz egy kitűnő fizikatanárnak. Az érmet Oersted-emlékéremnek nevezik annak emlékére, hogy Oersted felfedezése fizikatanítás közben történt.



Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

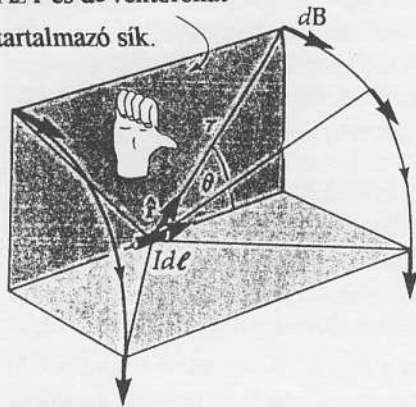
Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az ábrán látható egy téglalap alakú test, amelynek középpontjában egy koordináta-rendszer van megjelölve. A test felületéről kifelé irányuló nyílak jelölik a mágneses erőteret.

Az r és $d\ell$ vektorokat tartalmazó sík.



31-1 ábra

Az ábra a Biot-Savart törvény geometriai vonatkozásait szemlélteti: az ábra jobb felső szélén látható $d\mathbf{B}$ vektor irányát az $Id\ell \times \hat{r}$ vektoriális szorzatra alkalmazott jobbkéz-szabállyal állapíthatjuk meg. A vektoriális szorzat jobbkéz-szabályának megfelelően (10-5 ábra) jobb kezünk ujjait görbítsük be úgy, hogy ujjaink hegye mutasson abba az irányba amerre az $Id\ell$ vektort (az ún. elemi áramot) a θ szögű elforgatás \hat{r} irányába vinné át. (\hat{r} az elemi áramtól a vizsgált pontba mutató vektor.) Kinyújtott hüvelyk-ujjunk ilyenkor kijelöli a kép felső sarkában lévő, az elemi áramtól r távolságban lévő pontban $d\mathbf{B}$ irányát. A $d\mathbf{B}$ vektorokat néhány más helyen is feltüntettük (a jobbkéz-szabály alkalmazását ezen irányok ellenőrzésével gyakorolhatjuk). A mágneses erővonalak teljes rendszere az elemi áram $d\ell$ irányára merőleges síkokon elhelyezkedő koncentrikus körökből áll. Az egyes $d\mathbf{B}$ vektorok e köröket érintik.

Itt az \hat{r} egységvektor az *erőtér forrásától* (a dq töltéstől) a vizsgált pont irányába mutat. A teljes \mathbf{E} térerősséget úgy kapjuk meg, hogy az elemi töltésektől származó $d\mathbf{E}$ elemi térerősségeket összegezzük.

Most egy ehhez hasonló egyenletet írunk fel, amely azt mutatja meg, hogy egy $d\ell$ hosszúságú, I áramerősségű vezetődarab mekkora $d\mathbf{B}$ fluxussűrűségű mágneses erőteret hoz létre a vezetődarabtól r távolságra. Tekintsünk egy tetszőleges alakú, I áramerősségű vezetőt (31-1 ábra). 1820-ban két francia fizikus, Jean-Baptiste Biot és Félix Savart adta meg elsőként, hogy egy $d\ell$ hosszúságú, I áramerősségű vezetődarab mekkora $d\mathbf{B}$ fluxussűrűségű mágneses erőteret hoz létre a vezetődarabtól r távolságra. A **Biot-Savart törvénynek** nevezett összefüggés szerint a mágneses erőtér is a távolság négyzetével fordítottan arányos:

$$\text{Biot-Savart törvény} \quad d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{Id\ell \times \hat{r}}{r^2} \quad (31-1)$$

A $d\ell$ vektor a huzaldarabbal azonos hosszúságú, és irányát az I áramirány határozza meg. Az \hat{r} egységvektor a *tér forrásától* (az $Id\ell$ elemi áramtól) a vizsgált pont irányába mutat. Így $\mathbf{r} = r\hat{r}$. A vizsgált pontban a \mathbf{B} fluxussűrűség kiszámítására az összes elemi vezetődarab által létrehozott $d\mathbf{B}$ elemi fluxussűrűségű mágneses indukcióvektorokat összegeznünk kell. A (31-1) formulában a μ_0 konstans a vákuum mágneses permeabilitásának nevezik, értéke:

A vákuum mágneses permeabilitása

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$$

Ezt a számértéket úgy választották meg, hogy összhangban legyen az áramerősség mértékegységével, az amperrel (A). (A μ_0 állandót ne keverjük össze a mágneses dipólusmomentum μ jelével!) A (31-1) képlet legjellemzőbb tulajdonsága az, hogy a mágneses erőterek, éppúgy, mint az elektromos erőterek, a távolság négyzetével fordítva arányosak. Az elektromos erőterekkel ellentétben, melyek elektromos töltésekből erednek, nincs „mágneses töltés” ahonnan a mágneses tér eredne². Továbbá, az áramkör többi részétől elszigetelt $Id\ell$ elemi áramok sem léteznek, ezek mindig teljes, zárt áramkör részei. A teljes mágneses erőtér kiszámítása a nem egyszerű geometriájú vezetők esetében meglehetősen fáradságos; emiatt a következő példákban csak egyszerű geometriájú, szimmetrikus elrendezésű vezetők mágneses erőterét számítjuk ki.

31-1 PÉLDA

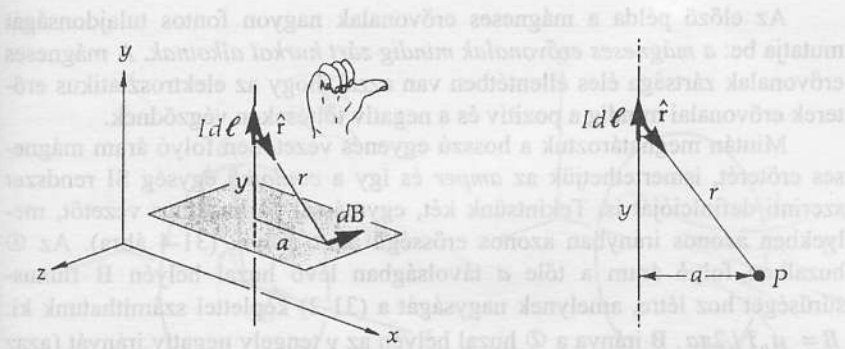
Hosszú, egyenes áramvezetőben 10 A erősségű áram folyik. Számítsuk ki, hogy tőle 10 cm távolságban mekkora a mágneses indukcióvektor.

MEGOLDÁS

Először a hosszú, egyenes vezető környezetében kialakuló mágneses indukcióvektort megadó kifejezést vezetjük le. A 31-2b ábrán illusztráltak szerint az $Id\ell$ elemi áramtól származó $d\mathbf{B}$ indukció iránya a P pontban az ábra síkjába, befelé mutat. A (31-1) egyenlet szerint

$$d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{Id\ell \times \hat{r}}{r^2},$$

² A mágnességre vonatkozó egyes új elméletek szerint léteznek mágneses monopólusok. Ezt azonban kísérletileg eddig meggyőzően bizonyítani még nem sikerült.



- a) dB irányát a $d\ell \times r$ vektorszorzatra alkalmazott jobbkéz-szabállyal állapíthatjuk meg.
 b) (dB iránya a P pontban az ábra síkjába, befelé mutat.)

31-2 ábra

A 31-1 példához.

dB nagyságát a

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{Id\ell}{r^2} \sin\theta$$

adja meg, ahol θ a $d\ell$ és \hat{r} vektorok által bezárt szög. Legyen a a P pont és a huzal közötti távolság, és legyen $d\ell = dy$; ilyen jelöléseket alkalmazva felismerhetjük, hogy $r^2 = a^2 + y^2$ és $\sin\theta = a/\sqrt{a^2 + y^2}$.

Így

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{Ia}{(a^2 + y^2)^{3/2}} dy.$$

Mint hogy minden egyes elemi áram azonos irányú dB mágneses indukcióvektort hoz létre, a teljes B mágneses fluxuserősséget skalárösszegezéssel (integrálással) számíthatjuk:

$$B = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

A G függelék integráltáblázatából a határozatlan integrált kikeresve, azt kapjuk, hogy

$$B = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi} \left[\frac{y}{a^2(a^2 + y^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi a^2} [1 - (-1)].$$

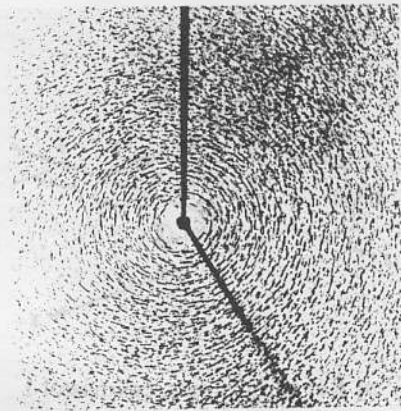
A hosszú, egyenes huzalban folyó áram mágneses terének fluxussűrűsége

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (31-2)$$

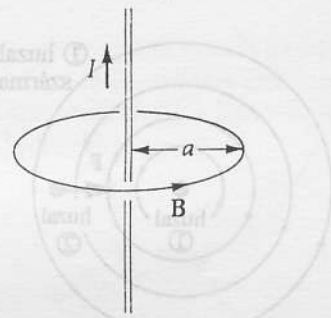
A megadott számértékeket SI egységekben behelyettesítve

$$B = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A})(10A)}{2\pi(0,10m)} = 2,00 \times 10^{-5} T$$

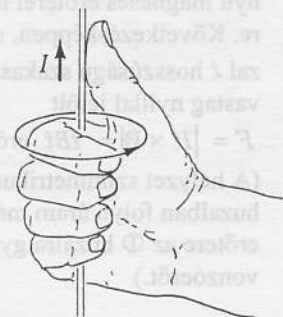
B irányát a Biot-Savart törvényben szereplő vektoriális szorzatra ($d\ell \times \hat{r}$) alkalmazott jobbkéz-szabállyal határozhatjuk meg. Mint hogy szimmetria okok miatt az erővonalak a huzalt körülvevő koncentrikus körök, célszerű B irányát a 31-3c ábrán definiált **jobbkéz-szabály** segítségével meghatározni.



- a) Ha vasreszeléket szórunk vízszintes lapra, amelyen keresztül hosszú, egyenes áramvezető halad keresztül, a vasszemcsék a mágneses térerősségvonalak mentén rendeződnek el.



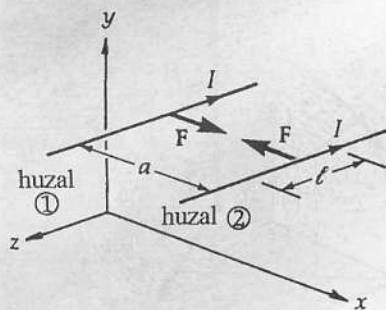
- b) Egy erővonal a huzalt szimmetrikusan veszi körül.



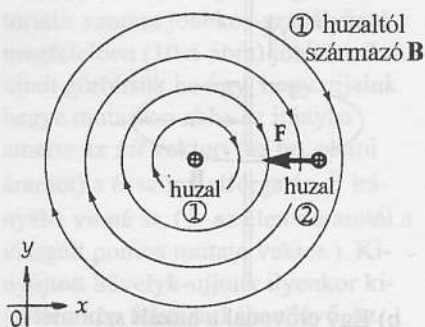
- c) A mágneses erővonalak irányát az ábrán látható jobbkéz-szabállyal lehet megállapítani. Ha az áram a kinyújtott hüvelyk-ujj irányába folyik, akkor a behajlított ujjak a mágneses erővonalak irányába mutatnak.

31-3 ábra

Egyenes áramvezető mágneses erőtere.



- a) Két párhuzamos, egymástól 1 méter távolságra lévő vezető méterenként $2 \cdot 10^{-7}$ N vonzóerőt gyakorol egymásra, ha mindkét vezetőkben azonos irányban 1 A erősségű áram folyik. Ha az áramok iránya nem párhuzamos, a huzalok között tasztítóerő hat.



- b) Az ① huzalban folyó áram a ② huzal helyén lefelé mutató irányú mágneses erőteret hoz létre. Következésképpen, a ② huzal ℓ hosszúságú szakaszára a vastag nyíllal jelölt $F = |I\ell \times \mathbf{B}| = IB\ell$ erő hat. (A helyzet szimmetrikus: A ② huzalban folyó áram mágneses erőtere az ① huzalra gyakorol vonzóerőt.)

31-4 ábra

Az amper definíciója.

Az előző példa a mágneses erővonalak nagyon fontos tulajdonságát mutatja be: a mágneses erővonalak mindig zárt hurkot alkotnak. A mágneses erővonalak zártasága éles ellentétben van azzal, hogy az elektrosztatikus erőterek erővonalai mindig a pozitív és a negatív töltéseken végződnek.

Miután meghatároztuk a hosszú egyenes vezetőkben folyó áram mágneses erőterét, ismertethetjük az amper és így a coulomb egység SI rendszer szerinti definícióját is. Tekintsünk két, egymással párhuzamos vezetőt, melyekben azonos irányban azonos erősségű áram folyik (31-4 ábra). Az ① huzalban folyó áram a tőle a távolságra lévő huzal helyén \mathbf{B} fluxussűrűséget hoz létre, amelynek nagyságát a (31-2) képlettel számíthatunk ki: $B = \mu_0 I / 2\pi a$. \mathbf{B} iránya a ② huzal helyén az y tengely negatív irányát (azaz lefelé) mutatja. A ② huzal $d\ell$ hosszúságú szakaszára ható mágneses erő a (30-11) formula szerint, $d\mathbf{F} = Id\ell \times \mathbf{B}$, ami, minthogy $d\ell$ és \mathbf{B} egymásra merőleges, az alábbi alakúra egyszerűsíthető:

$$d\mathbf{F} = IBd\ell$$

A (31-2) egyenletből B kifejezését behelyettesítve és átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} = \frac{\left(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}\right) I^2}{2\pi a} = \frac{2 \times 10^{-7} I^2}{a} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$$

Ha a huzalok távolsága 1 méter, és mindkét huzalban 1 amper erősségű áram halad át, a huzalok egységnyi hosszára jutó vonzóerő:

A vezető huzal egységnyi hosszára eső erő:

$$2 \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{A} \text{ vagy } 2 \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

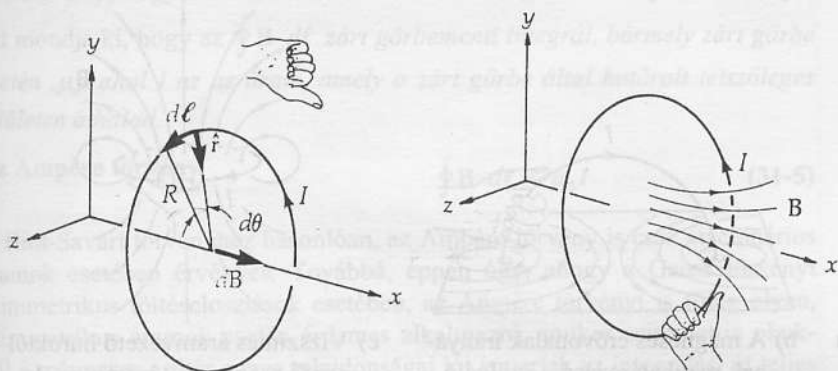
AZ AMPER DEFINÍCIÓJA:

Ha két hosszú, párhuzamos vezető egymástól 1 méter távolságra van, és mindkettőben azonos irányban 1 A erősségű áram halad, akkor a vezetők méterenként pontosan $2 \cdot 10^{-7}$ N erővel vonzzák egymást.

Az ampernek ez a definíciója nagyon fontos kapcsolatot létesít az elektromos és mechanikai mennyiségek között. Ezzel válik lehetővé, hogy az SI egységrendszer az elektromos egységeket is tartalmazza. Mint azt a 24. fejezetben megemlítettük, az amper definícióján keresztül jutunk a coulomb definíciójához: ez utóbbi mennyiséget az 1 amper erősségű stacionárius áramot szállító vezető valamely keresztmetszetén 1 másodperc alatt áthaladó töltésmennyiségként definiáljuk. Az áramot vezető huzalok közötti erőhatás sokkal egyszerűbben, és sokkal nagyobb pontossággal mérhető, mint a töltések között ható Coulomb-erő. Ennélfogva komoly érvek szólnak amellett, hogy az elektromos mértékegységeket az amperre és ne a coulombra vezessük vissza. A fenti képletekből látszik, hogy az egységnyi hosszúságú huzalra ható erő egysége T·A (tesla·amper) alakban is megadható. Ezek szerint μ_0 is megadható más mértékegységgel:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad (31-3)$$

A két konstans, μ_0 és ϵ_0 értéke kapcsolatban van egymással. Az előbbi áramvezetők, az utóbbi pedig töltések közötti erőhatásokat leíró egyenletekben jelenik meg. Az áramok és töltések között alapvető kapcsolat van. Minként a 35. fejezetben látni fogjuk, a fenti állandók a fénysebességgel is összefüggésben vannak, ugyanis $c = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. 1983 óta a fénysebességet az SI mértékrendszer alapmennyiségének tekintjük. Minthogy μ_0 értékét az amper fenti definíciója pontosan meghatározza, ϵ_0 értéke is pontosan definiált.



- a) A jobbkez-szabály a $d\ell \times \hat{r}$ vektoriális szorzatra vonatkozóan. Ez adja meg $d\mathbf{B}$ irányát a kör közepén.
- b) A jobbkez-szabály, amellyel az áramvezető mágneses erőterének irányát határozhatjuk meg.

31-5 ábra
A 31-2 példához.

31-2 PÉLDA

Egy $R = 10$ cm sugarú, kör alakú áramvezető hurkon átfolyó áram erőssége 10 A (31-5 ábra). Számítsuk ki a hurok középpontjában a mágneses indukcióvektort.

MEGOLDÁS

Minden egyes $I d\ell$ áramszakasz és a hozzá tartozó \hat{r} egységvektor merőleges egymásra. A (31-1) összefüggés ennélfogva az alábbi alakú:

$$d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{I d\ell}{R^2}$$

Az integrálást sokkal kényelmesebben elvégezhetjük, ha a $d\ell$ szakaszok hosszúságát a $d\ell = R d\theta$ alakban fejezzük ki, ahol $d\theta$ az a szög, amely alatt a $d\ell$ szakasz a középpontból látszik. Ekkor

$$d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{I}{R} d\theta$$

A hurok középpontjában minden egyes $d\mathbf{B}$ elemi fluxussűrűség az x tengely pozitív irányába mutat, ezért a teljes B fluxussűrűség a $\theta = 0$

és $\theta = 2\pi$ határok közt kiszámított $\int d\mathbf{B}$ integrál. Mivel az összes tag állandó, azok az integráljel elé kiemelhetők, így csak $d\theta$ marad az integrál alatt:

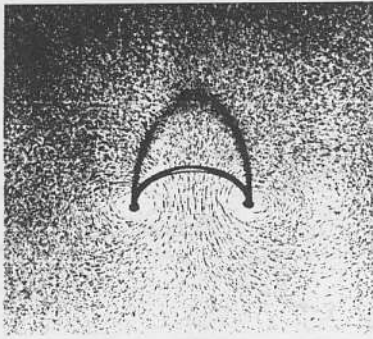
$$B = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{I}{R} \int_0^{2\pi} d\theta = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{I}{R} (2\pi - 0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

A mágneses indukcióvektor nagysága az áramvezető hurok középpontjában:

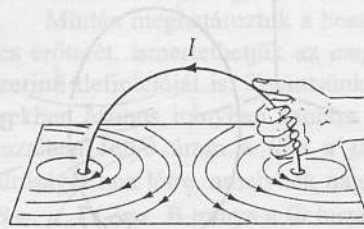
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (31-4)$$

A megadott számértékeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy

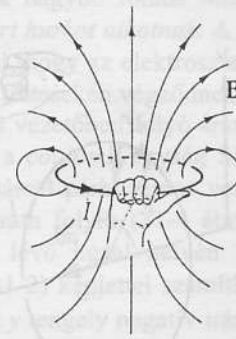
$$B = \frac{\left(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \right) (10 \text{ A})}{2(0,10 \text{ m})} = 6,28 \times 10^{-5} \text{ T.}$$



a) Az áramvezető hurokra merőlegesen papírlapot helyeztünk el és vasreszeléket szórtunk rá. A vasszemcsék nagyjából a mágneses erő-vonalak mentén rendeződnek el.



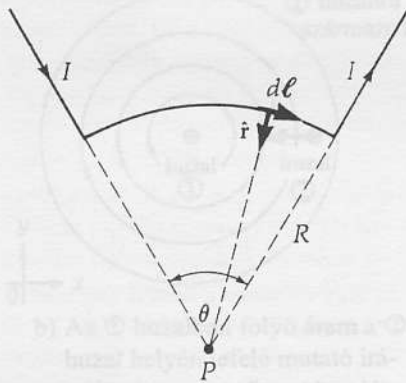
b) A mágneses erővonalak irányának meghatározására szolgáló jobbkezeszabály.



c) Vízszintes áramvezető huroktól eredő mágneses tér irányának meghatározása jobbkezeszabállyal.

31-6 ábra

Áramvezető hurok mágneses erőtere.



31-7 ábra

A 31-3 példához

A legtöbb, mágneses erőteret alkalmazó eszközben a mágneses erőteret huzalhurok vagy huzalokból készült tekercsek hozzák létre. A mágneses erőter irányát jobbkezeszabállyal adhatjuk meg: ha az áramvezető huzalt jobb kézzel úgy fogjuk meg, hogy kinyújtott hüvelykujjunk az áram irányába mutat, akkor a huzalra rákulcsolódó ujjaink a mágneses erőter irányát jelölik ki. Kör alakú hurok belsejében, pontosan közepén a térerősség tengelyirányú; másutt a mágneses erőter a 31-6 ábrán vázolt szerkezetű.

31-3 PÉLDA

A 31-7 ábrán vázolt vezetőkben I áram folyik. Az egyenes szakaszok a P ponttól sugár irányban kifelé haladnak; az R sugarú körív a P pontból θ szög alatt látszik. Számítsuk ki a \mathbf{B} mágneses indukcióvektort a P pontban.

MEGOLDÁS

Vegyük észre, hogy az egyenes szakaszok mentén számított mágnesesség indukcióvektor zérust ad, ugyanis $d\mathbf{l}$ és $\hat{\mathbf{r}}$ párhuzamosak, így vektoriális szorzatukban a $\sin 0^\circ = 0$ tényező jelenik meg. A köríven $d\mathbf{l}$ és $\hat{\mathbf{r}}$ egymásra merőlegesek, így

$$d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

A körív mentén számított vektoriális szorzatban $\sin 90^\circ = 1$ tényező szerepel; a jobbkezeszabály miatt az elemi $d\mathbf{B}$ vektorok azonos irányúak (a papír síkjára merőlegesek, befelé mutatnak). Itt $d\mathbf{l} = ds = R d\theta$, így a fluxussűrűség:

$$B = \int d\mathbf{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^\theta R d\theta = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi R}$$

(az ábra síkjára merőleges, befelé mutató irányú)

31.3 Az Ampère törvény

Ha az áramvezető geometriája egyszerű, célszerű a Biot-Savart törvény helyett, az azzal egyenértékű, ám egyszerűbb Ampère törvényt alkalmazni. E

törvény alapja egy zárt hurok mentén történő integrálás. Ampère törvénye³ azt mondja ki, hogy az $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ zárt görbementi integrál, bármely zárt görbe esetén $\mu_0 I$ ahol I az az áram, amely a zárt görbe által határolt tetszőleges felületen áthalad.

Az Ampère törvény⁴

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (31-5)$$

A Biot-Savart törvényhez hasonlóan, az Ampère-törvény is csak stacionárius áramok esetében érvényes. Továbbá, éppen úgy, ahogy a Gauss törvényt szimmetrikus töltéseloszlások esetében, az Ampère törvényt is főleg olyan, szimmetrikus áramok esetén érdemes alkalmazni, amikor szimmetria okokból a mágneses erőter egyes tulajdonságai jól ismertek az integrálási út teljes hossza mentén. Az alábbiakban az Ampère törvény használatát három fontos példán mutatjuk meg.

I. Hosszú, egyenes áramvezető mágneses erőtere. Noha Ampère törvénye tetszés szerinti integrálási út esetére igaz, az integrálás csak akkor valósítható meg kényelmesen, ha a $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ szorzat az integrálási út mentén állandó (31-3b ábra). A rendszer szimmetriájából következik, hogy a huzallal koncentrikus körön \mathbf{B} nagysága állandó és ennélfogva B az integráljel elé kiemelhető. Legyen az integrálási út egy mágneses erővonal, ezen $d\mathbf{l}$ \mathbf{B} -vel mindenütt párhuzamos és így skaláris szorzatukban a $\cos 0^\circ = 1$ tényező szerepel. A görbementi integrál tehát $B \oint d\mathbf{l}$ alakúra egyszerűsödik, $\oint d\mathbf{l}$ pedig az a sugarú kör kerülete: $2\pi a$. Az integrálási út által határolt felületen áthaladó áram I . Tehát:

$$B \oint d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

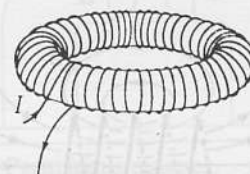
$$B(2\pi a) = \mu_0 I$$

Hosszú, egyenes áramvezető
mágneses erőtere:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

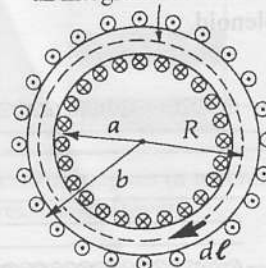
Ez megegyezik a Biot-Savart törvény alkalmazásával kapott (31-2) képlettel. Az Ampère törvény és a Biot-Savart törvény egymással teljesen egyenértékű; a probléma jellege határozza meg, melyiket egyszerűbb használni.

II. Toroid mágneses erőtere. Következő példánkban Ampère törvényét arra használjuk fel, hogy kiszámítsuk a 31-8 ábrán illusztrált toroid, azaz tóruszra tekercselt áramvezető mágneses erőterét a tekercs belsejében. A rendszer szimmetriája miatt legyen az integrálási út a tekercs középvonala, azaz R sugarú kör, a szimmetria következtében ugyanis \mathbf{B} nagysága ezen a vonalon mindenütt azonos és iránya párhuzamos $d\mathbf{l}$ -l. Így B az integráljel elé kiemelhető. Az R sugarú kör

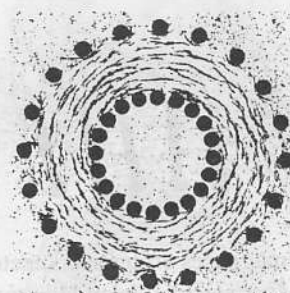


a) A toroidtekercs úgy készül, hogy tórusz köré áramvezető huzalt tekercselünk.

az integrálás útvonala



b) A tekercs belsején az áram iránya az ábra síkjára merőlegesen befelé mutat; a külső oldalán pedig kifelé.



c) A mágneses erőter szerkezetét vas-reszelékkel lehet szemléltetni. A mágneses erőter még lazán tekercselt toroid esetében is a tórusz belsejére korlátozódik.

31-8 ábra

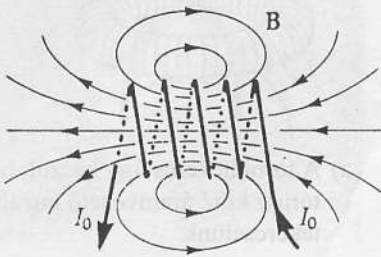
A toroidtekercs. A jobbkez-szabály szerint a tekercs belsejében a mágneses erőter iránya megegyezik az óramutató járásával.

³ André Marie Ampère (1775–1836) műveltségét olvasmányain kívül főleg apjától szerezte, aki bíró, és a francia forradalom ellenzője volt (18 éves korában Ampère ott állt a vérpad szélén, ahol apját lefejezték). Ampère 1826-ban jelentős tanulmányt nyújtott be a Francia Akadémiának, amelyben az elektrodinamika saját kísérletei alapján felállított új elméletét vázolta. Maxwell későbbi megjegyzése szerint ez az elmélet „mintha teljes fegyverzetben pattant volna ki az elektromosságtan Newtonjának fejéből”.

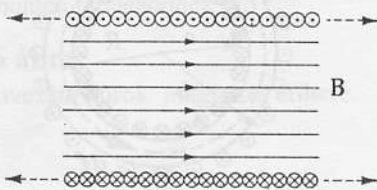
⁴ Ha az I áram nem huzal belsejében halad, hanem az integrációs út által közrezárt S felületen oszlik el, akkor a (31-5) egyenlet jobb oldalát a

$$\mu_0 I = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

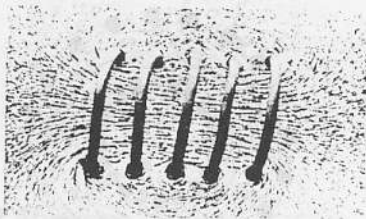
képlettel számíthatjuk, ahol \mathbf{J} az áramsűrűség (lásd a 28.7 fejezetet). A $d\mathbf{A}$ felületelem irányát jobbkez-szabállyal állapíthatjuk meg: a jobbkez ujjait hajlítsuk be úgy, hogy azok $d\mathbf{l}$ irányába mutassanak; a kinyújtott hüvelykujj $d\mathbf{A}$ irányát jelöli ki.



a) Lazán tekercselt, rövid szolenoid.



b) Szorosan tekercselt, végtelen hosszú *ideális* szolenoid. A mágneses erőtér a szolenoid belsejére korlátozódik.



c) A mágneses erőtér szerkezetét vas-reszeléssel lehet láthatóvá tenni.

31-9 ábra

Szolenoid mágneses erőtere.

által határolt felületen NI áram halad át, ahol N a menetek száma, és I a tekercsen átfolyó áram. Az Ampère törvényt felhasználva:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

$$B(2\pi R) = \mu_0 NI$$

Mágneses erőtér a toroid belsejében:
(a toroid átlagos kerülete $2\pi R$)

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \quad (31-6)$$

Mint hogy a fluxussűrűség R -től függ, a toroid belsejében a mágneses erőtér nem tökéletesen homogén: a belső oldalán a fluxussűrűség kicsit nagyobb. (A toroidon kívüli mágneses erőtérrel egyébként úgy becsülhetjük meg, hogy a toroidot nagy, R sugarú huroknak (egymenetű tekercs) tekintjük, amelyen I erősségű áram halad keresztül. Ennek mágneses erőtere a toroid belsejében lévő erőtérnél sokkal kisebb, ezért elhanyagolható.) A toroid miatt nagyon jól használható olyan áramkörökben, ahol a mágneses erőtérrel le kell határolni.

III. Hosszú tekercs (szolenoid) mágneses erőtere. A szolenoid egyes huzaltekercs (31-9a ábra). Mivel könnyű elkészíteni, leggyakrabban ilyenet használnak elektromágnesként mágneses erőtér létrehozására. Lazán tekercselt, átmérőjükhöz képest rövid tekercsek mágneses erőtérét bonyolult kiszámítani; a tekercs középpontjában létrejövő mágneses indukcióvektor azonban ezekben is jól becsülhető az *ideális szolenoiddal* való közelítéssel. Ez utóbbi sűrűn tekercselt, átmérőjéhez képest hosszú tekercs (31-19b ábra). Éppen úgy, mint ahogyan a nagy koncentrikus gömbfelületek közötti kapacitást síkkondenzátor kapacitásával közelítve számíthatjuk ki, a szolenoidot olyan toroid kis szakaszának tekinthetjük, melynek külső átmérője sokkal nagyobb a tekercsek átmérőjénél. A mágneses erőtér a szolenoid belsejében lényegében homogén és sokkal nagyobb, mint a szolenoidon kívül. Az erővonalak a tekercs egyik végén kijutnak a külső térbe, a másik végén pedig visszajutnak a szolenoid belsejébe. A (31-6) képlet szerint:

$$B = \left(\frac{N}{2\pi R} \right) \mu_0 I$$

A zárójelben lévő mennyiség a toroid egységnyi ívhosszára jutó menetek száma. Szolenoid esetében e mennyiség helyett az egységnyi hosszra jutó menetek számát n -t kell az egyenletbe beírni, azaz

$$\text{Mágneses erőtér hosszú szolenoid belsejében} \quad B = \mu_0 n I \quad (\text{ahol } n \text{ az egységnyi hosszra jutó menetek száma}) \quad (31-7)$$

Innen már rövid úton eljuthatunk ahhoz, hogy mekkora a mágneses erőtér a szolenoid végénél a tengelyen lévő pontban. Tekintsünk egy pontot a szolenoid belsejében, annak két végétől egyenlő távolságban (a fenti képlet erre a pontra érvényes). A szimmetria miatt a tekercs két fele azonos mértékben járul hozzá ebben a pontban a mágneses erőtérhez. Ennélfogva, ha a szolenoid felét eltávolítanánk, a mágneses indukció a szolenoid (új) végénél éppen a (31-7) összefüggéssel megadott értéknek a fele.

$$\text{Mágneses erőtér hosszú szolenoid végénél} \quad B = \frac{\mu_0 n I}{2} \quad (\text{ahol } n \text{ az egységnyi hosszra jutó menetek száma}) \quad (31-8)$$

31-4 PÉLDA

Permanens mágnes pólusai közötti légrésben a mágneses indukcióvektor $0,4 \text{ T}$ (30-10a ábra). Vajon mekkora áramot kell a tekercsen átfolytatni ahhoz, hogy ekkora mágneses erőteret egy hasonló méretű szolenoiddal hozzunk létre? Tételezzük fel, hogy a szolenoid 2000 menetű, 30 cm hosszú és kis keresztmetszetű.

MEGOLDÁS

Feltételezve, hogy a szolenoid ideális, a (31-7) egyenletet ($B = \mu_0 n I$) I -re megoldva azt kapjuk, hogy

$$I = \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{0,4 \text{ T}}{\left(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}\right) \left(\frac{2000 \text{ menet}}{0,30 \text{ m}}\right)} = 47,7 \text{ A}$$

Ha ellenőrizni akarjuk, hogy a 31-4 példa eredménye megfelel-e egy normális laboratóriumi készülékben fellépő erőternek, tételezzük fel, hogy a tekercs 1 mm^2 keresztmetszetű rézhuzalból készült; egy menet átlagos hossza 10 cm . A huzal ellenállását az $R = \rho \ell / A$ egyenlettel számíthatjuk ki, ahol ρ a réz fajlagos ellenállása ($1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$), ℓ és A a huzal teljes hossza illetve keresztmetszete. A megfelelő számértékeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$R = (1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}) \frac{(2000 \text{ menet})(0,1 \text{ m})}{(1,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2)} = 3,60 \Omega$$

Az időegység alatt a tekercsben fejlődő hő:

$$P = I^2 R = (47,7 \text{ A})^2 (3,6 \Omega) = 8,19 \text{ kW}$$

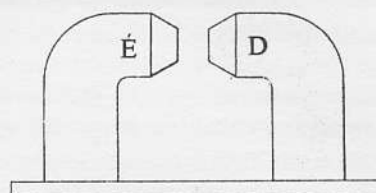
Világos, hogy ilyen szolenoidot erősen kellene hűteni; ezért mágneses erőter előállítására használni nem érdemes. Viszont, ha a szolenoid belsejében vasmag van, akkor, miként azt a 33. fejezetben megmutatjuk, a légrésben a mágneses fluxussűrűség sokkal nagyobb. Ezért a gyakorlati célokra használt szolenoidokat a 31-10b ábrán vázolthoz hasonló alakú vasmagokkal látják el; ezek sokkal kisebb áramerősséggel üzemeltethetők.

31-5 PÉLDA

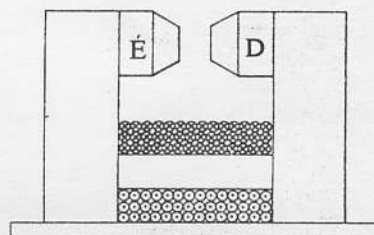
Hosszú cső falában I_0 áram halad. A cső belső sugara a , külső sugara b ; az áramsűrűség-eloszlás egyenletes (31-11 ábra). Számítsuk ki a \mathbf{B} fluxussűrűséget az a) $r \leq a$; b) $a \leq r \leq b$ és c) $r \geq b$ tartományokban.

MEGOLDÁS

Szimmetriaokokból a mágneses erővonalak csak koncentrikus körök lehetnek (\mathbf{B} iránya a 31-11b ábra szerint, a jobbkézszabály értelmében az áramutató járásával ellentétes). Továbbá a szimmetria miatt B nagyságának egy erővonal mentén mindenütt ugyanakkorának kell lennie; emiatt célszerű, ha a $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell$ kiszámításakor az integrációs út a cső tengelyével koncentrikus kör.



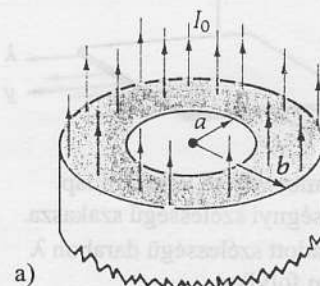
a) Permanens mágnes.



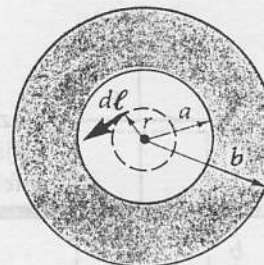
b) Elektromágnes (a tekercs keresztmetszetével)

31-10 ábra

A 31-4 példához. Tipikus laboratóriumi mágnesek.



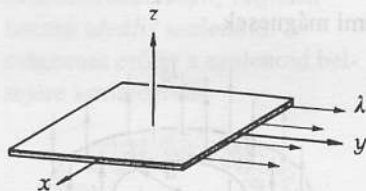
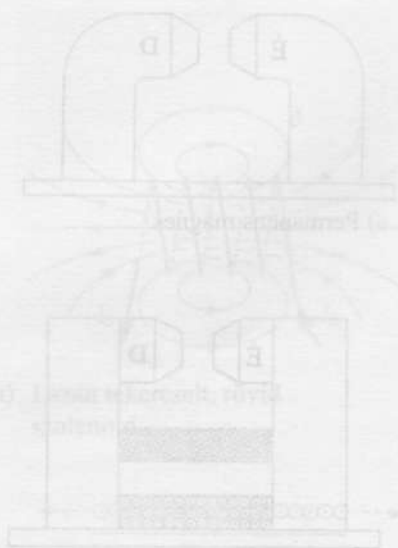
a)



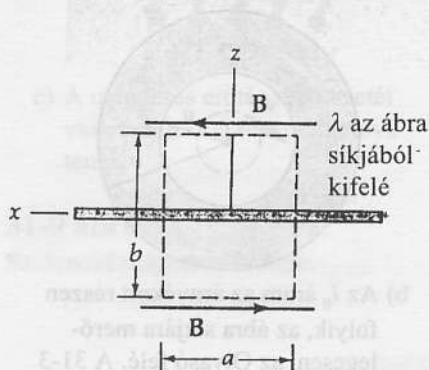
b) Az I_0 áram az árnyékolt részen folyik, az ábra síkjára merőlegesen, az Olvasó felé. A 31-3 ábrán vázolt előjelkonvenciót követve, az $r < a$ esetre vonatkozó integrációs utat szaggatott vonallal jelöltük.

31-11 ábra

A 31-5 példához. A hosszú vezető cső falában I_0 áram folyik; a cső belső sugara a , külső sugara b ; a falban az áramsűrűség egyenletes eloszlású.



- a) Áramot vezető végtelen lap egységnyi szélességű szakasza. Az adott szélességű darabon λ áram folyik



- b) Az áramvezető lap keresztmetszete (az áram az ábra síkjára merőlegesen, az Olvasó felé folyik). Vegyük észre, hogy \mathbf{B} iránya az áramvezető lap két oldalán éppen ellentétes.

31-12 ábra
A 31-6 példához

Az $r \leq a$ tartományban $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I$

A skaláris szorzatban $\cos 0^\circ = 1$; minthogy B az integrációs út mentén állandó, kiemelhető az integráljel elé. Minthogy $\oint d\ell = 2\pi r$, és az integrációs út által határolt területen átfolyó I áram zérus:

$$B_1(2\pi r) = \mu_0 \cdot 0$$

$$B_1 = 0$$

Az $a \leq r \leq b$ tartományban a fennálló szimmetria miatt célszerű ismét a cső tengelyével koncentrikus kört választani integrációs útként. Azonban tudnunk kell, hogy a teljes I_0 áramerősség hányadrésze halad keresztül az integrációs út által határolt felületen. Minthogy az áramsűrűség-eloszlás egyenletes, ez az arány a területek arányával egyezik meg⁵:

$$I_{\text{belül}} = \left(\frac{\text{az } r \text{ sugarú körön belüli terület}}{\text{teljes keresztmetszet}} \right) I_0 = \left[\frac{\pi(r^2 - a^2)}{\pi(b^2 - a^2)} \right] I_0$$

Ennélfogva $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I$

$$B_2(2\pi r) = \mu_0 \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) I_0$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r} \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) I_0$$

\mathbf{B} iránya az ábrán a jobbkezes-szabállyal összhangban az óramutató járásával ellentétes.

Az $r \geq b$ tartományban az integrációs út körülzárja a teljes I áramot.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I$$

$$B_3(2\pi r) = \mu_0 I_0$$

$$B_3 = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_0$$

\mathbf{B} iránya az ábrán a jobbkezes-szabállyal összhangban az óramutató járásával ellentétes. Vegyük észre, hogy $B_1 = B_2$ az $r = a$ helyen és $B_2 = B_3$ az $r = b$ helyen.

31-6 PÉLDA

Nagyon vékony, az xy síkon elhelyezkedő lapon az y tengely pozitív irányában áram folyik át. A lap egységnyi széles tartományán átfolyó áramerősség λ . Számítsuk ki a \mathbf{B} mágneses indukcióvektort a lap környezetében.

⁵ Nem egyenletes áramsűrűség-eloszlás esetén a 4. lábjegyzetben leírtakat kell figyelembe venni.

MEGOLDÁS

Szimmetriaokokból és a jobbkez-szabályból az következik, hogy \mathbf{B} párhuzamos a lappal, amiben az áram folyik (31-12b ábra). A rendszer szimmetriájából következik az is, hogy a lap két oldalán, attól azonos távolságban B nagyságának azonosnak kell lennie. Az $\oint \mathbf{B} \cdot d\ell$ görbementi integrál kiszámításához a 31-12b ábrán szaggatott vonallal jelölt integrációs utat választjuk, amelynek csak a lappal párhuzamos, illetve arra merőleges szakaszai vannak, az előbbieket a laptól azonos távolságra helyezkednek el. A két merőleges szakasz mentén az $\mathbf{B} \cdot d\ell$ skaláris szorzat mindenütt zérus, ugyanis e két vektor egymásra merőleges. Az a szélességű téglalapon áthaladó áram erőssége $I = \lambda a$. Az Ampère törvényt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{B} \cdot d\ell &= \mu_0 I, \\ 2Ba &= \mu_0 \lambda a, \\ B &= \frac{\mu_0 \lambda}{2}.\end{aligned}$$

A kapott eredmény szerint B nagysága független a laptól vett távolságtól. (Ez az eredmény analóg a 25-5 példa eredményével, amely szerint egyenletes σ töltéssűrűségű végtelen lap környezetében az elektromos térerősség $E = \sigma / 2\epsilon_0$, szintén független a laptól vett távolságtól.)

Az elektromosság és mágnesség tanulmányozásakor tapasztalhatjuk, hogy a két jelenségek leíró egyenletek meglehetősen hasonlítanak egymásra. Ennek illusztrálására a 31-1 táblázatban összefoglaljuk a hosszú egyenes áramvezető mágneses erőterére és az egyenes mentén egyenletesen elhelyezkedő töltések elektromos erőterére vonatkozó egyenleteket. A nyilvánvaló szimmetriák mellett vegyük észre azt is, hogy valahányszor az elektromos erőterre vonatkozó egyenletben, a nevezőben ϵ_0 jelenik meg, a megfelelő mágneses erőterre vonatkozó egyenlet számlálójában μ_0 szerepel.

31-1 táblázat: Elektromos és mágneses erőterek közötti hasonlóságok

	Hosszú, egyenes áramvezető mágneses erőtere	Vonalmenti töltés elektromos erőtere
1. Általános egyenletek (mindkét kifejezés a távolság négyzetével fordítva arányos)	$d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{I d\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$	$d\mathbf{E} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\lambda d\ell}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ ahol λ a lineáris töltéssűrűség
2. Az általános egyenletek integrál alakja	$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I$ (zárt görbementi integrál) Ampère törvény	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$ (felületi integrál) Gauss törvény
3. Az egyenes környezetben az erőteret leíró egyenletek (mindkét kifejezés a távolság négyzetével fordítva arányos)	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ B körülveszi az egyenest	$E = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi r}$ az E térerősség a pozitív töltésű vonaltól indulva kifelé mutat.

Összefoglalás

A mágneses erőtérket mozgó töltések hozzák létre. Az Idl elemi áram által létrehozott $d\mathbf{B}$ mágneses indukcióvektort a

$$\text{Biot-Savart törvény: } d\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{Idl \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

adja meg, ahol μ_0 a vákuum mágneses permeabilitása:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}, \quad \left(\text{vagy } \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \text{ vagy } \frac{\text{Wb}}{\text{Am}} \right)$$

Az amper: Egymástól egy méteres távolságban lévő két párhuzamos vezető között méterenként pontosan $2 \cdot 10^{-7} \text{N}$ vonzóerő hat, ha a vezetőkön azonos irányban 1 amper erősségű áram halad át.

$$\text{Az Ampère törvény: } \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

Kérdések

1. Elemezzük az Ampère törvény és a Gauss törvény közötti hasonlóságot és különbséget.
2. Milyen értelemben hasonlít a Biot-Savart törvény a Coulomb törvényhez? Miben különböznek egymástól?
3. Milyen esetekben célszerűbb a mágneses erőtér inkább az Ampère törvény alkalmazásával kiszámítani, mint a Biot-Savart törvénnyel?
4. Áramot vezető üreges réz cső belsejében van-e mágneses erőtér? Ha nincs, miért nincs?
5. Az elektromos készülékekhez csatlakoztatott huzalpárokat gyakran összesodorják, hogy lecsökkentsék a mágneses eredetű zavarok lehetőségét. Mi ennek a módszernek az alapja?
6. Ha megfeszített tekercsrugón áramot vezetünk át, akkor a rugó által kifejtett erő megnő, lecsökken, vagy változatlan marad-e? Indokoljuk a választ.
7. A párhuzamos áramvezetők erőt fejtenek ki egymásra. Hogyan hatnak egymásra a merőleges áramvezetők?
8. Tekintsünk két, azonos síkban lévő koncentrikus áramvezető hurkot, melyeken azonos irányú áram

halad át. Milyen mágneses erő hat az egyes hurkokra? Vajon az erők megváltoznak-e, ha mindkét áramirányt ellentétesre változtatjuk? Mi történik, ha kezdetben a két áramirány éppen ellentétes? Mi történik, ha ezeket az áramirányokat ellentétesre változtatjuk?

Áramvezetők által létrehozott mágneses erőtér:

Az áramvezető geometriája, I az áramerősség	B mágneses indukcióvektor
Hosszú egyenes huzaltól r távolságban	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
R sugarú hurok középpontjában	$B_{\text{középpontban}} = \frac{\mu_0 I}{2R}$
N menetű, R közepek sugarú toroid belsejében	$B_{\text{belül}} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$
Hosszú, n menet/méter menetsűrűségű szolenoid belsejében	$B_{\text{belül}} = \mu_0 nI$

halad át. Milyen mágneses erő hat az egyes hurkokra? Vajon az erők megváltoznak-e, ha mindkét áramirányt ellentétesre változtatjuk? Mi történik, ha kezdetben a két áramirány éppen ellentétes? Mi történik, ha ezeket az áramirányokat ellentétesre változtatjuk?

9. Válaszoljuk meg az előző pontban leírt kérdéseket arra az esetre, ha két azonos méretű hurok egymás közelében, párhuzamosan helyezkedik el.
10. A plazma nagyon forró, ionizált gáz, amelyben egyenlő számban vannak pozitív ionok és negatív elektronok. Tekintsünk egy henger alakú térrészben lévő plazmát, amelyen a tengellyel párhuzamos irányban elektromos áram halad át. Elemezzük, milyen irányú mágneses erők hatnak a henger falához közel. Mi a következménye az ilyen erőhatásnak?
11. Az előző kérdéssel kapcsolatban: mi történik, a) ha a henger „hajlik” illetve b) ha összeszűkül valahol? Ezeket a jelenségeket hívják rendre *kihajlási*- ill. *sótartó*- (vagy *kolbász*-) *instabilitásnak*.

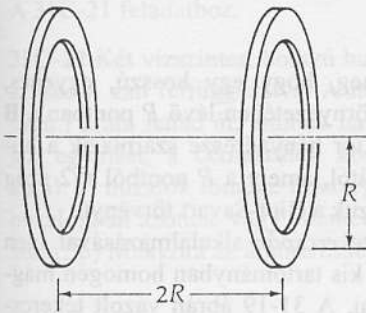
Feladatok

31.2 A Biot-Savart törvény

31A-1 Egy kiránduló zsebiránytű segítségével tájékozódik egy egyenáramú távvezeték alatt 40 méterrel. A helyes iránytól maximálisan mekkora szöggel térhet el az iránytű a távvezetékben folyó 150 A erősségű áram mágneses erőtér miatt? A Föld mágneses erőtérének vízszintes komponense $3 \cdot 10^{-5} \text{T}$.

31A-2 A Föld mágneses pólusainál a mágneses indukcióvektor kb. $1 \cdot 10^{-4} \text{T}$. Milyen erősségű, az Egyenlítő köré fűzött huzalhurokban folyó árammal lehetne ugyanekkora mágneses erőtér létrehozni? (Tételezzük fel, hogy a hurok szimmetrikusan helyezkedik el a pólusok között.) Felhasználhatjuk a 31C-17 feladat eredményét is.

31B-3 Két N menetű, R sugarú tekercs egymástól $2R$ távolságra helyezkedik el (31-13 ábra). Számítsuk ki a mágneses fluxussűrűséget a tekercsek tengelyén, tőlük egyenlő távolságban lévő pontban. Tételezzük fel, hogy a tekercsek sorba vannak kötve, és az áramirány mindkét tekercsben azonos; továbbá legyen a tekercsek keresztmetszete R^2 -hez képest kicsiny. Felhasználhatjuk a 31C-17 feladat eredményét is.



31-13 ábra

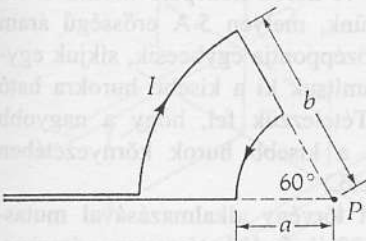
A 31B-3 feladathoz.

31A-4 Számítsuk ki két hosszú, vékony, egymástól 5 cm távolságban lévő huzal egységnyi hosszúságú szakaszai között ható erőt. Az egyik huzalon 10 A erősségű áram folyik, a másikon is ugyanekkora, de ellentétes irányú. Taszító vagy vonzóerő hat a két huzal között?

31A-5 Két hosszú, vékony, párhuzamos huzalon különböző erősségű áram halad át. Mutassuk meg, hogy az egyik huzal egységnyi hosszúságú szakaszára ugyanakkora, de ellentétes irányú erő hat, mint a másik huzal azonos méretű szakaszára; vagyis Newton III. törvénye érvényes ebben az esetben is.

31B-6 Egy R sugarú, kör alakú vezetőhurokban I áram folyik. A hurok tengelyén, a huroktól milyen x távolságban van az a pont, ahol a mágneses fluxussűrűség éppen fele a hurok középpontjában mérhetőnek? Felhasználhatjuk a 31C-17 feladat eredményét is.

31B-7 Oldjuk meg a 31B-8 feladatot azzal a módosítással, hogy a körívek legyenek félkörök, azaz a P pontnál lévő szög 60° helyett 180° legyen.

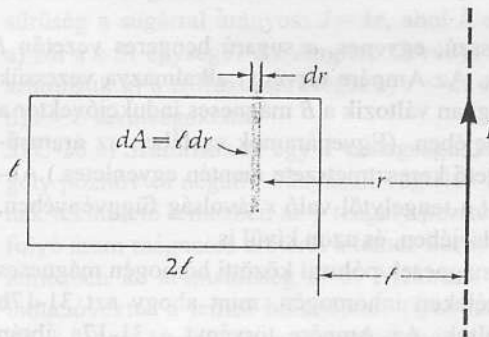


31-14 ábra

A 31B-7 és 31B-8 feladatokhoz.

31B-8 Számítsuk ki a mágneses indukcióvektort a 31-14 ábrán látható körívekből és sugárirányú egyenes szakaszokból álló hurok köríveinek P középpontjában.

31B-9 A 31-15 ábrán látható, téglalap alakú vezetőhurok és a hosszúságú, egyenes vezető azonos síkban fekszik. A vezetőhurok ellenállása 2Ω . Számítsuk ki a hurok teljes felületén áthaladó mágneses fluxust, ha az egyenes vezetón I áram halad át. (Útmutatás: Válasszunk ki egy $dA = \ell dr$ felületelemet, és számítsuk ki a $d\Phi_B$ fluxust ezen a felületelemen, majd integrálással számítsuk ki a teljes fluxust.)



31-15 ábra

A 31B-9 és 31B-10 feladatokhoz.

31B-10 A 31-15 ábrán látható elrendezés esetén tételezzük fel, hogy $I_1 = 30$ A erősségű áram halad át az egyenes vezetón, és $I_2 = 8$ A erősségű, az óramutató járásával azonos irányú áram folyik a hurokban. Számítsuk ki a hurok teljes felületén a mágneses fluxust, ha $\ell = 8$ cm.

31B-11 Egy b oldalhosszúságú huzalhurokban I áram folyik. Számítsuk ki a mágneses fluxussűrűséget a négyzet síkjában, a középpontban. (Tételezzük fel, hogy a hurokhoz áramot szállító vezetőket összesodorták, így az azok erőterei semlegesítik egymást.) Felhasználhatjuk a 31C-21 feladat eredményét is.

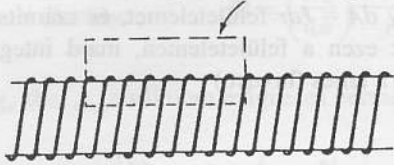
31.3 Az Ampère törvény

31A-12 Légmagos toroidot készítünk: az egyes menetek átmérője 2 cm; a tórusz középvonalának hossza (az effektív kerület) 50 cm. Mekkora legyen a menetek száma, ha 5 A erősségű árammal 0,07 T fluxussűrűséget kívánunk a toroidban létrehozni?

31A-13 Egy 50 cm hosszú, 2 cm átmérőjű szolenoid belsejében $B = 0,07$ T mágneses indukcióvektort kívánunk előállítani. a) Mekkora a teljes mágneses fluxus a szolenoid belsejében, a tengelyre merőleges felületen? b) Számítsuk ki, hány menetű legyen a tekercs, ha 5 A erősségű áramot alkalmazunk.

31B-14 Vezessük le, hogy mekkora a B fluxussűrűség hosszegységenként az n menetű, I áramerősségű, hosszú szolenoid belsejében. Alkalmazzuk az Ampère törvényt a 31-16 ábrán vázolt téglalap alakú zárt görbére. Tételezzük fel, hogy B egyenletes a szolenoid belsejében és azon kívül elhanyagolható.

Téglalap alakú integrálási út

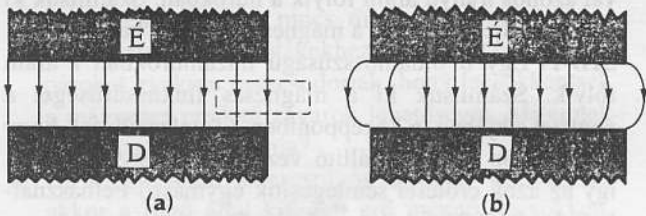


31-16 ábra

A 31B-14 feladathoz.

31B-15 Hosszú, egyenes, a sugarú hengeres vezetőkön I áram folyik. Az Ampère törvényt alkalmazva vezessük le, hogy hogyan változik a B mágneses indukcióvektor a vezető belsejében. (Egyenáramok esetében az áramsűrűség a vezető keresztmetszete mentén egyenletes.) Ábrázoljuk B -t a tengelytől való r távolság függvényében, a vezető belsejében, és azon kívül is.

31B-16 A mágnesek pólusai közötti homogén mágneses erőter a széleken inhomogén, mint ahogy azt 31-17b ábrán vázoltuk. Az Ampère törvényt a 31-17a ábrán vázolt integrációs görbére alkalmazva mutassuk meg, hogy pólusok közötti erőter szélén a mágneses erőter nem ér véget hirtelen, hanem onnan kinyúlik.



31-17 ábra

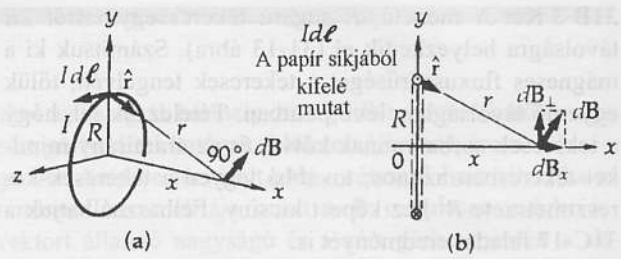
A 31B-16 feladathoz.

Vegyes feladatok

31C-17 A 31-18 ábrán vázolt R sugarú hurokban I áram folyik. Mutassuk meg, hogy a hurok tengelyén, a hurok síkjától x távolságban

$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2} \right) \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x}$$

(Útmutatás: Mi történik az x tengelyre merőleges $d\mathbf{B}_\perp$ komponensekkel az $I d\ell$ elemi áramtól származó $d\mathbf{B}$ elemi mágneses indukcióvektorok összegzése során?)

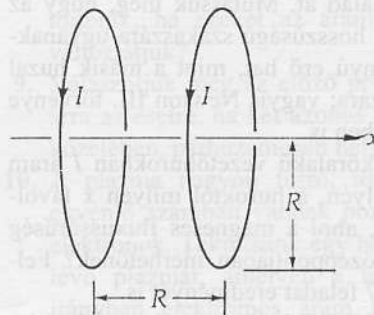


31-18 ábra

A 31C-17 feladathoz.

31C-18 Határozzuk meg, hogy egy hosszú, egyenes, áramot vezető huzal környezetében lévő P pontban a \mathbf{B} mágneses indukcióvektor hányadrésze származik a huzalnak attól a szakaszától, amely a P pontból $\pi/2$ szög alatt látszik. Alkalmazzuk a Biot-Savart törvényt.

31C-19 A Helmholtz-tekerespár alkalmazásával igen egyszerű módon lehet kis tartományban homogén mágneses erőteret létesíteni. A 31-19 ábrán vázolt tekercspár két lapos, kör alakú tekercsből áll, melyek távolsága egyenlő a tekercsek sugarával; a két tekercsben az áramirány megegyezik. Mutassuk meg, hogy az x tengelyen a két tekercs között a távolság felében, a mágneses erőter olyan, hogy dB/dx is, és d^2B/dx^2 is zérus. Felhasználhatjuk a 31C-17 feladat eredményét is.



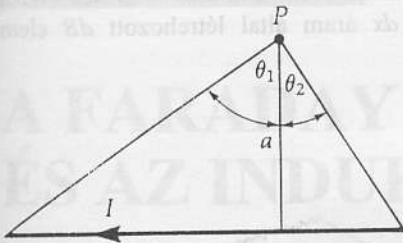
31-19 ábra

A 31C-19 feladathoz.

31C-20 Egy 15 cm sugarú kör alakú hurokban 10 A erősségű áram folyik. A hurok középre másikk, 1 cm sugarú hurkot helyezünk, melyen 5 A erősségű áram folyik. A két hurok középpontja egybeesik, síkjuk egymásra merőleges. Számítsuk ki a kisebb hurokra ható forgatónyomatékat. (Tételezzük fel, hogy a nagyobb hurok mágneses tere a kisebb hurok környezetében egyenletesnek tekinthető.)

31C-21 A Biot-Savart törvényt alkalmazásával mutassuk meg, hogy a 31C-20 ábrán látható egyenes áramvezető huzalszakasz környezetében lévő P pontban a B mágneses indukcióvektor nagysága:

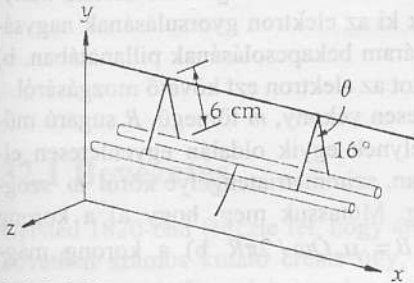
$$B = (\mu_0 I / 4\pi a)(\sin\theta_1 + \sin\theta_2).$$



31-20 ábra

A 31C-21 feladathoz.

31C-22 Két vízszintes, hosszú huzal 6 cm hosszú cérnaszálakon van felfüggesztve. A huzalokon azonos nagyságú I áram halad át, aminek hatására a huzalok tasztják egymást, a cérnaszálak közötti szög 16° (31-21 ábra). A huzalok tömege hosszegységenként 40 g. a) A huzalokban azonos, vagy ellentétes irányban folyik-e az áram? b) Mekkora az áramerősség?

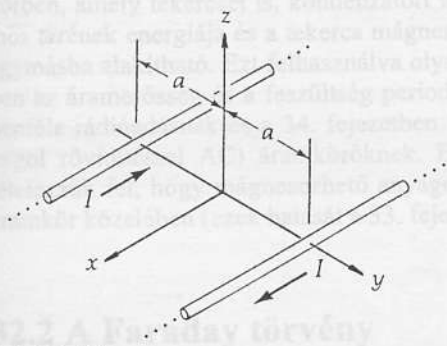


31-21 ábra

A 31C-22 feladathoz.

31C-23 Két hosszú, párhuzamos, az xy síkban fekvő huzalon ellentétes irányú, azonos nagyságú I áram folyik (31-22 ábra). a) Számítsuk ki a z tengely mentén a mágneses fluxussűrűség irányát és nagyságát. b) Mutassuk meg, hogy a két huzal távolságánál sokkal nagyobb távolságban B fluxussűrűség a távolság négyzetével fordítottan arányos.

31C-24 A 31-22 ábrán vázolt elrendezésnél tételezzük fel, hogy az áram mindkét huzalban az x tengely pozitív irányában folyik. a) Vázzuk fel a mágneses erővonalak szerkezetét az yz síkban. b) A z tengely mentén mekkora távolságban maximális a mágneses fluxussűrűség?



31-22 ábra

A 31C-23, a 31C-24 és 31C-30 feladatokhoz

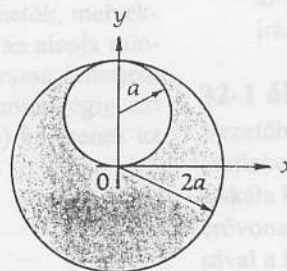
31C-25 Függőleges tengelyű mágnesűt függőleges síkú, kör alakú huzaltekercs közepén helyezünk el. A tekercs R sugarú, meneteinek száma N . A tekercset (áram nélkül) olyan irányba fordítjuk, hogy a mágnesűt a tekercs síkjában legyen. Ha a tekercsen áram folyik át, a mágnesűt θ szöggel kitér. Vezessük le az I áramerősséget R , N , θ és B_F függvényeként megadó összefüggést. (B_F a Föld mágneses erőteréhez tartozó fluxussűrűség vízszintes komponense. Ezt az eszközt tangens galvanométernek nevezik.)

31C-26 a) Oldjuk meg a 31C-23 a) feladatot úgy, hogy az áram a két huzalban azonos irányban (az ábrán jobbra) folyik. b) Hogyan függ a fluxussűrűség z -től $\gg a$ esetén? c) Vázzuk fel az eredő mágneses erőter szerkezetét az yz síkban, nagy z értékekre is.

31C-27 A 31-11 ábrán vázolt hosszú, egyenes, a belső és b külső sugarú cső hosszában áram folyik. A J áramsűrűség a sugárral arányos: $J = kr$, ahol k egy állandó. a) Mi a k SI egysége? Az Ampère törvényt alkalmazva, számítsuk ki a B fluxussűrűséget b) $r < a$; c) $a < r < b$; d) $r > b$ távolságokban.

31C-28 a) Számítsuk ki egy d vastagságú, az x és y tengely pozitív és negatív irányában végtelen hosszúságúnak tekinthető lemezben az y tengely pozitív irányában folyó áram mágneses erőterét a lemez környezetében. A lemezben az áramsűrűség J . b) Mekkora a mágneses indukcióvektor a lemez belsejében? (Útmutatás: válasszunk olyan koordináta-rendszert, melynek középpontja a lemez közepén van, és a z tengely legyen a lemez síkjára merőleges.)

31C-29 Tekintsünk egy, a 31-23 ábrán látható keresztmetszetű hosszú, üreges, vezető fémhengert. Az üreg sugara a , a hengeré $2a$. A vezetón át egyenletes áramsűrűség-eloszlású I áram folyik (iránya az ábra síkjából kifelé mutat). a) Mutassuk meg, hogy az áramsűrűség $J = I/3\pi a^2$. b) Számítsuk ki a \mathbf{B} mágneses indukcióvektort az y tengely mentén az $y \geq 2a$ értékeknél. (Útmutatás: A mágneses indukcióvektor két tag összege: az egyik tag $2a$ sugarú tömör, I_1 árammal átjárt henger mágneses erőteréből, a másik pedig az üreg helyén lévő a sugarú, I_2 , ellentétes irányú árammal átjárt henger mágneses erőteréből származik. Mekkora I_1 és I_2 ? Felhasználhatjuk a 31B-15 feladat eredményét is.)



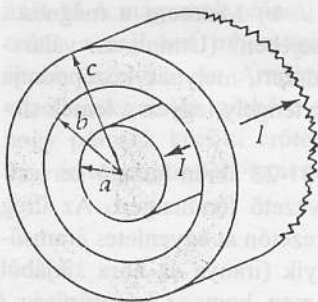
31-23 ábra

A 31C-29 feladathoz.

31C-30 Tekintsünk két hosszú, párhuzamos vezetőt, melyeken egyenlő nagyságú, ellentétes irányú áramok folynak (31-22 ábra). Számítsuk ki a mágneses indukcióvektor nagyságát és irányát az y tengely pozitív irányában (a huzalok síkjában) a) $0 < y < a$ és b) $y > a$ tartományban. c) Mutassuk meg, hogy ha $y \gg a$, a fluxussűrűség a távolság négyzetével fordítva arányos.

31C-31 Egyenletes vastagságú vékony, R sugarú műanyagkorong mindkét oldalán a felületmenti töltéssűrűség nagysága σ . Számítsuk ki a korong közép-pontjában a mágneses fluxussűrűséget, ha a korong ω szögsebességgel forog szimmetriatengelye körül. (Útmutatás: számítsuk ki az r sugarú, dr szélességű körgyűrűn lévő töltések áramát.)

31C-32 Tekintsünk egy hosszú egyenes koaxiális kábelt (31-24 ábra), melynek belső erén I erősségű áram folyik az egyik irányban, és a külső árnyékoláson ugyanakkora áram folyik a másik irányban. Az áramsűrűség mindkét vezetőben egyenletes. Számítsuk ki a mágneses fluxussűrűség nagyságát a következő tartományokban: a) $r < a$; b) $a < r < b$; c) $b < r < c$; d) $r > c$. e) Vázoljuk fel a mágneses fluxussűrűség változását a kábel tengelyétől vett távolság függvényében.

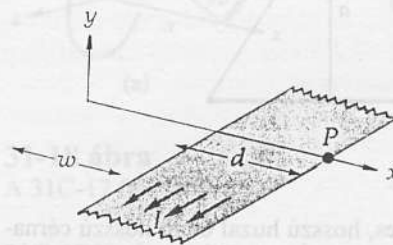


31-24 ábra

A 31C-32 feladathoz.

31C-33 Egy w szélességű hosszú, vékony vezető szalagon egyenletes eloszlású I erősségű áram folyik (31-25 ábra). Számítsuk ki a B mágneses fluxussűrűséget a szalag síkjában lévő, annak szélétől d távolságban lévő

P pontban. (Útmutatás: Számítsuk ki a dx széles sávban folyó $(I/w) dx$ áram által létrehozott dB elemi fluxussűrűséget.)



31-25 ábra

A 31C-33 feladathoz.

31C-34 Egy elektron $3 \cdot 10^6$ m/s sebességgel hosszú egyenes huzaltól 1,0 cm-es távolságban vele párhuzamosan mozog. Hirtelen 10 A erősségű áram kezd el folyni a huzalon, az elektron mozgásával azonos irányban. a) Számítsuk ki az elektron gyorsulásának nagyságát és irányát az áram bekapcsolásának pillanatában. b) Készítsünk vázlatot az elektron ezt követő mozgásáról.

31C-35 Egyenletesen vékony, m tömegű, R sugarú műanyagkorong, melynek egyik oldalán egyenletesen elosztott Q töltés van, szimmetriatengelye körül ω szögsebességgel forog. Mutassuk meg, hogy a) a korong középpontjában $B = \mu_0 Q \omega / 2\pi R$ b) a korong mágneses dipólusmomentuma $\mu = Q \omega R^2 / 4$. c) Mutassuk meg, hogy a korong mágneses momentumának és impulzusmomentumának hányadosa (az ún. *giromágneses arány*) $Q/2m$.

31C-36 Mutassuk meg, hogy a 31-29 példában a B mágneses indukcióvektor az üregben mindenütt azonos és iránya megegyezik az x tengely negatív irányával. Felhasználhatjuk a 31B-15 feladat eredményét is.

31C-37 Számítsuk ki, mekkora a hosszú szolenoid középpontjában a mágneses indukcióvektor. A számítást úgy végezzük el, hogy az egyes menektől származó mágneses fluxussűrűségeket integráljuk. Felhasználhatjuk a 31C-17 feladat eredményét is.

31C-38 A 31-18 ábrán vázolt R sugarú hurokban I áram folyik. Mutassuk meg, hogy a hurok tengelyén a hurok síkjától x távolságban

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \left(\frac{x}{R^2 + x^2} + \frac{1}{R} \right)$$

(Útmutatás: Ne tévedjünk az x tengelyre vonatkozó dB komponensekkel! az dB elemi indukcióvektorok szögét az x tengellyel a hurok középpontjából nézve θ szögben kell meghatározni.)

31C-38 Egy 15 cm sugarú kör alakú hurokban 10 A erősségű áram folyik. A hurok középpontjánál 1 cm sugarú hurok helyezik el, amelyben 20 A erősségű áram folyik. A két hurok középpontja azonos. Mekkora az egyenletes mágneses indukcióvektor nagysága a hurok középpontjában?

31C-39 A 31-20 ábrán vázolt huzalok segítségével mutassuk meg, hogy a 31C-20 ábrán látható egyenes áramú huzalok mágneses indukcióvektorának nagysága a huzalok távolságától fordítva arányos.

- 30A-19 A válasz adott.
 30B-21 $\tau = (-1,44 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}) \hat{z}$
 30B-23 $\mu = Iab \cos \theta \hat{x} + Iab \sin \theta \hat{y}$
 30A-25 $\frac{1}{5}$
 30B-27 a) 37,7 mT b) $(4,28 \times 10^{25})/\text{m}^3$
 30A-29 0,438 μW
 30C-31 a) 12,2 MHz b) 35,4 MeV
 c) 24,4 MHz, 70,8 MeV d) 17,7 MeV
 e) 1,60 T f) 70,8 MeV g) Egyik sem
 30C-33 A válasz adott.
 30C-35 qBt/m
 30C-37 IBR
 30C-39 $mg/\pi r B_x$
 30C-41 a) $1,05 \times 10^{-3} \text{ A}$ b) $9,27 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$
 30C-43 A válasz adott.
 30C-45 A válasz adott.
 30C-47 A válasz adott.
 30C-49 A válasz adott.
 30C-51 A válasz adott.

XXXI. Fejezet

- 31A-1 $1,43^\circ$
 31B-3 $\mu_o NI / 2\sqrt{2}R$
 31A-5 A válasz adott.
 31B-7 $\mu_o I(b-a) / 4ab$ (kifelé mutat)
 31B-9 $\Phi_B = \mu_o I l (\ln 3) / 2\pi$
 31B-11 $\mu_o I 2\sqrt{2} / \pi b$
 31A-13 a) $2,20 \times 10^{-5} \text{ Wb}$ b) 5570 menet
 31B-15 $B_{\text{belül}} = \mu_o I r / 2\pi a^2$
 31C-17 A válasz adott.
 31C-19 A válasz adott.
 31C-21 A válasz adott.
 31C-23 a) $B = -(\mu_o I a / \pi [z^2 + a^2])$
 b) $\lim_{z \gg a} B = -(\mu_o I a / \pi z^2) \hat{z}$
 31C-25 $2RB_e \text{ tg } \theta / \mu_o N$
 31C-27 a) A/m^3 b) 0 c) $\mu_o k(r^3 - a^3) / 3r$
 d) $\mu_o k(b^3 - a^3) / 3r$
 31C-29 $-(\mu I / 6\pi a) \hat{x}$ függetlenül y -től
 31C-31 $\mu_o \sigma \omega R$
 31C-33 $(\mu_o I / 2\pi \omega) \ln(1 + w/d)$
 31C-35 A válasz adott.
 31C-37 $\mu_o NI/l$

XXXII. Fejezet

- 32B-1 30 V az óramutató járása szerint
 32B-3 $\mathcal{E} = \frac{2B\pi r^2}{t}$
 32B-5 A válasz adott.
 32B-7 3,38 A/s

- 32A-9 A válasz adott.
 32A-11 $N\mu_o \pi R/2$
 32B-13 a) 360 mV b) 180 mV c) 3,00 s
 32A-15 a) $\mu_o N_1^2 A/l$ $\mu_o N_2^2 A/l$ b) $\mu_o N_1 N_2 A/l$
 32B-17 $M = \mu_o AN_1 N_2 / l$
 32B-19 a) V/L
 32B-21 A válasz adott.
 32A-23 $145 \text{ J}/\text{m}^3$
 32B-25 a) 20 W b) 20 W c) 0 d) 20 J
 32C-27 a) 0,171 mV b) a keleti végén
 32C-29 b) 0,458 mV
 32C-31 a) $b a$ b) $\Delta Q = N\Delta\Phi/R$ c) $B = QR/NA$
 32C-33 $3,08 \mu\text{C}$
 32C-35 a) $C\pi a^2 k$ b) a felső lemezének
 32C-37 $0,132 \mu\text{A}$
 32C-39 A válasz adott.
 32C-41 A válasz adott.
 32C-43 A válasz adott.
 32C-45 $\mu_o I^2 / 16\pi$
 32C-47 A válasz adott.

XXXIII. Fejezet

- 33A-1 88,6 mA
 33A-3 318 A
 33B-5 A válasz adott.
 33B-7 a) 0,0251 T b) 10,0 A
 33C-9 1,48 mC

XXXIV. Fejezet

- 34A-1 A válasz adott.
 34A-3 A válasz adott.
 34B-5 a) $v = 24,1 \sin 377t$ b) a hurok síkja merőleges B-re
 34A-7 b) $3,2 \times 10^{-2} \text{ J}$
 34B-9 b) $v = 8,32 \sin(1000t + 33,7^\circ)$ (SI-ben)
 34B-11 a) 173 Ω b) 8,66 V
 34B-13 A válasz adott.
 34B-15 $i = 2,11 \sin(10^5 t + 71,6^\circ)$
 34A-17 100
 34A-19 46,5 pF-től 419 pF-ig
 34B-21 A válasz adott.
 34A-23 $v = 170 \sin(377t) \text{ V}$
 34A-25 122 W
 34B-27 A válasz adott.
 34B-29 A válasz adott.
 34B-31 b) 141 V c) 36,2 mA d) 109 V
 e) 90,5 V
 34B-33 a) 211 μF b) 979 W
 34B-35 a) 5,00 A b) 2,77 A c) 2,77 A
 34A-37 a) 20,0 V b) 0,660 A
 34B-39 a) $1,82 \times 10^4 \text{ A}$ b) 909 A
 34C-41 b) 82,1 V c) -70,8 V d) 53,1 V
 e) 64,4 V