1. feladat (4+10=14 pont)
a) Ismertesse az algebra alaptételét!
b) Határozza meg a $z^4 - 27z = 0$ egyenlet gyökeit.

Mo. *a*) Minden legalább elsőfokú komplex polinomnak van gyöke.
b) $0 = z^4 - 27z = z(z^3 - 27)$, ha $z = 0$ vagy $z^3 = 27 = 27(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$. Így az egyenlet gyökei: $z_1 = 0$, $z_2 = 3(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = 3$, $z_3 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $z_3 = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

---

2. feladat (10 pont)
Hol konvex, illetve konkáv az $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 10)$ függvény? Adja meg a függvény inflexiós pontjait!

Mo. $x^2 + 2x + 10 = (x+1)^2 + 9 > 0$, tehát $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+10}$,

$$f''(x) = \frac{2(x^2+2x+10) - (2x+2)^2}{(x^2+2x+10)^2} = \frac{-2x^2 - 4x + 16}{(x^2+2x+10)^2} = 0,$$

ha $x^2 + 2x - 8 = 0$, vagyis $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4+32}}{2} = -1 \pm 3$, vagyis f konvex a $(-4, 2)$ intervallumon, konkáv a $(-\infty, -4)$ és $(2, \infty)$ intervallumokon, és az $x = -4$, $x = 2$ pontokban inflexiós pontja van.

---

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Ismertesse és bizonyítsa a parciális integrálás módszerét.
b) Számolja ki az $\displaystyle\int e^{-3x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ integrált!

Mo. *a*) A szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján

$$f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))'\,\mathrm{d}x = \int f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

amiből a derivált linearitása miatt kapjuk, hogy

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{e^{-3x}}_{u}\underbrace{\cos(2x)}_{v'}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-3x}\sin(2x)}{2} + \frac{3}{2}\int \underbrace{e^{-3x}}_{u}\underbrace{\sin(2x)}_{v'}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{e^{-3x}\sin(2x)}{2} - \frac{3e^{-3x}\cos(2x)}{4} - \frac{9}{4}\cdot I, \end{aligned}$$

így $I = \dfrac{4}{13}\left(\dfrac{e^{-3x}\sin(2x)}{2} - \dfrac{3e^{-3x}\cos(2x)}{4}\right) = \left(\dfrac{2\sin(2x)}{13} - \dfrac{3\cos(2x)}{13}\right)e^{-3x}$

4. feladat (14 pont)
Oldja meg az alábbi kezdetiérték-feladatot

$$y' = \sin^2 y \cdot \cos^2 x, \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Mo. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet, $\sin^2 y \equiv 0$, vagyis $y \equiv \dfrac{2k\pi}{2}$ megoldás .

$$-\operatorname{ctg} y = \int \frac{1}{\sin^2 y}\,\mathrm{d}y = \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c.$$

A kezdeti feltételből $0 = -\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = c$, tehát a megoldás

$$\operatorname{tg} y = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} - 1$$

---

5. feladat (5+12=17 pont)

a) Igazolja, hogy $1 < \alpha$ esetén a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor konvergens

b) Adja meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt[3]{n^4}}$ sor konvergenciatartományát!

Mo. *a*) Az integrálkritérium alapján $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergenciája ekvivalens a $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergenciájával , és

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{1-\alpha} < \infty.$$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^{4/3}} = 1 = \frac{1}{R} \quad \Longrightarrow \quad R = 1$, tehát $|x-1| < 1$ esetén a sor konvergens

$x = 0 : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4}}$ Leibniz, tehát konvergens

$x = 2 : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ konvergens

KT (konvergenciatartomány): $[0, 2]$

6. feladat (6+11=17 pont)
a) Számolja ki a gömbi koordinátákra való áttérés Jacobi-determinánsát.
b) Számolja ki az

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2+z^2}}$$

függvény integrálját a $Q = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 81\}$ tartományon.

Mo. *a*) Az $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$ parciális deriváltjaiból

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= \left|\cos\vartheta\left(-r^2\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)\right)\sin\vartheta\cos\vartheta) - r\sin\vartheta\left(r\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r\sin^2\varphi\sin^2\vartheta\right)\right| =$$

$$= \left|-r^2\left(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta\right)\sin\vartheta\right| = r^2\sin\vartheta$$

b) Gömbi kooordinátákkal:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_1^9\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt[4]{r^2}}\cdot r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

$$= 2\pi\left[\frac{r^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right]_1^9[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = \frac{8\pi}{5}(243-1)$$

---

7. feladat (4+5+3=12 pont)
a) Írja fel az f függvény Fourier-transzformáltjának ismeretében az $x \mapsto xf(x)$ függvény Fourier-transzformáltját.
b) Számolja ki az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } x \in [-2,2] \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény Fourier-transzformáltját.
c) Az a) és b) feladatrészek segítségével adja meg a

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x \in [-2,2] \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény Fourier-transzformáltját.

Mo. *a*) $(F(x \mapsto x^2 f(x)))(\omega) = \mathrm{i}(\mathcal{F}(f))'(\omega)$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 \frac{1}{2}\cos(\omega x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\right]_0^2 = \frac{\sin 2\omega}{\omega}$

c) $\displaystyle(\mathcal{F}(g))(\omega) = \mathrm{i}\left(\frac{\sin(2\omega)}{\omega}\right)' = \mathrm{i}\cdot\frac{2\cos(2\omega)-\sin(2\omega)}{\omega^2}$
