

1. feladat (14 pont)

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását, és az $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást:

$$y' - 3y \sin x = 2e^{-3 \cos x}$$

Mo. (H) $y' - 3y \sin x = 0 \quad \dots \quad y_H = C e^{-3 \cos x}, \quad C \in \mathbb{R}$

(I) $y_{ip} = c(x) e^{-3 \cos x} \quad \dots \quad c(x) = 2x$

$\implies y_{\acute{a}} = y_H + y_{ip} = C e^{-3 \cos x} + 2x e^{-3 \cos x}$
 $\pi = C - \pi \implies C = 2\pi.$

2. feladat (6+14=20 pont)

a) Ismertesse a szétválasztható változójú differenciálegyenletek definícióját, és megoldásának módszerét (bizonyítás nem kell)!

b) Az $u = y - 3x$ új változó bevezetésével oldja meg az $y' = \frac{9}{y - 3x}$ differenciálegyenletet (elegendő a megoldást implicit alakban megadni)!

Mo. a) Analízis 2 jegyzet 16-18. oldal.

b) $y = u + 3x \implies y' = u' + 3$

Behelyettesítve:

$$u' + 3 = \frac{9}{u} \implies u' = \frac{9 - 3u}{u} : \text{szeparábilis differenciálegyenlet.}$$

Ezt megoldja:

$$u \equiv 3 \text{ (egyensúlyi helyzet) } \implies y - 3x = 3.$$

$u \neq 3$:

$$-\frac{1}{3} \int \frac{u}{u-3} du = \int dx \quad \dots \quad -\frac{u}{3} - \ln|u-3| = x + C$$

Így a megoldás:

$$-\frac{y-3x}{3} - \ln|y-3x-3| = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

3. feladat (22 pont)

Adja meg az $y''' - y'' + y' - y = \text{sh}(3x)$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Mo. $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \implies \lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1) = 0 \implies (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$
 $\implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i \implies y_H = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x$
Mivel a jobb oldal $\text{sh}(3x) = (e^{3x} - e^{-3x})/2$, így nincs külső rezonancia, azaz a próbafüggvény:

$$\begin{aligned} -1 \cdot | \quad y_{ip} &= A e^{3x} + B e^{-3x} \\ 1 \cdot | \quad y'_{ip} &= 3A e^{3x} - 3B e^{-3x} \\ -1 \cdot | \quad y''_{ip} &= 9A e^{3x} + 9B e^{-3x} \\ 1 \cdot | \quad y'''_{ip} &= 27A e^{3x} - 27B e^{-3x} \end{aligned}$$

$$\dots \quad A = \frac{1}{40}, B = \frac{1}{80} \implies y_{ip} = \frac{1}{40} e^{3x} + \frac{1}{80} e^{-3x}$$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{ia} = y_H + y_{ip} = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x + \frac{1}{40} e^{3x} + \frac{1}{80} e^{-3x}.$$

4. feladat (12+5=17 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adja meg az összegüket!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1} + (-7)^{n-1}}{3^{2n+2}} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+2}}{2^{3n+1} + (-7)^{n-1}}$$

Mo. a) A sor két konvergens geometriai sor összege, tehát számolhatjuk tagonként a sorösszeget és az eredményeket összegezzük.

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1} + (-7)^{n-1}}{3^{2n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9} \cdot \frac{8^n}{9^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-63} \cdot \frac{(-7)^n}{9^n} = s_1 + s_2$$

A konstans is kiemelhető:

$$s = \frac{2}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n - \frac{1}{63} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-7}{9}\right)^n = \frac{\frac{16}{81}}{1 - \frac{8}{9}} + \frac{\frac{1}{81}}{1 - \frac{-7}{9}}$$

$$b) \frac{3^{2n+2}}{2^{3n+1} + (-7)^{n-1}} = \left(\frac{2^{3n+1} + (-7)^{n-1}}{3^{2n+2}}\right)^{-1}, \text{ és } \sum \frac{2^{3n+1} + (-7)^{n-1}}{3^{2n+2}} \text{ konvergens,}$$

vagyis $\left|\frac{2^{3n+1} + (-7)^{n-1}}{3^{2n+2}}\right| \rightarrow 0$, így $\left|\frac{3^{2n+2}}{2^{3n+1} + (-7)^{n-1}}\right| \rightarrow \infty$, tehát nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, így a sor divergens.

5. feladat (19+8=27 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n+2)5^{n+1}} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{7n^3+3n}$$

Mo. a) Hányadoskritériummal :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) 3^n 5^{n+1}}{5^{n+2} (n+3) 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{5} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = \frac{3}{5} < 1$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

$$\text{Mivel } \frac{3^{n-1}}{(n+2)5^{n+1}} \leq \frac{3^{n-1}}{5^{n+1}}, \text{ így}$$

$$|s - s_{99}| = \sum_{n=100}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n+2)5^{n+1}} \leq \sum_{n=100}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{5^{n+1}} = \frac{3^{99}}{1 - \frac{3}{5}}$$

$$b) \text{ Minoráns kritériummal } \frac{2n^2+3}{7n^3+3n} \geq \frac{2n^2}{7n^3+3n^3} = \frac{1}{5n}, \text{ és } \sum \frac{1}{5n} \text{ divergens,}$$

tehát a sor divergens.

IMSC feladat (15 IMSC pont) Egy motorcsónak sebessége állóvízben $v_0 = 20$ km/h. Teljes sebességgel halad, majd a motor leáll, és ezután 40 s alatt a csónak sebessége $v_1 = 8$ km/h-ra csökken. A víz ellenállása arányos a csónak sebességével. Mekkora a csónak sebessége 2 perccel a motor kikapcsolás után?

Mo. A mozgó csónakra az $F = -kv$ erő hat, ahol k arányossági tényező. Newton törvénye szerint az erő a tömeg és a gyorsulás szorzata. Ebből következik, hogy a mozgás differenciálegyenlete: $m \frac{dv}{dt} = -kv$, amiből $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{k}{m} dt$, vagyis $\ln v = -\frac{k}{m}t + C_1$.

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$v = e^{-\frac{k}{m}t + C_1} = C e^{-\frac{k}{m}t}.$$

A kezdeti feltétel $20 = v(0) = Ce^{-\frac{k}{m}0} = C$.

$40 \text{ s} = \frac{1}{90}$ óra, tehát $8 = v\left(\frac{1}{90}\right) = 20e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{90}}$, vagyis $e^{\frac{k}{m}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{90}$. 2 perc = $\frac{1}{30}$ óra,
vagyis

$$v\left(\frac{1}{30}\right) = 20 \left[\left(\frac{5}{2}\right)^{90} \right]^{-\frac{1}{30}} = 20 \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \frac{32}{25} \text{ km/h.}$$
