ANALÍZIS(1) — **I. ZÁRTHELYI** — **1999. október 7.**

Műszaki Informatika szak — B csoport — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

A megfelelő definíció alkalmazásával bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-8n}{2n^2+3} = \frac{1}{2} \qquad N(\varepsilon) = ?$$

Megoldás:

$$|a_n - A| = \left| \frac{n^2-8n}{2n^2+3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-16n-3}{4n^2+6} \right| = \frac{16n+3}{4n^2+6} \leq \frac{16n+3n}{4n^2} =$$

$$= \frac{19}{4n} < \varepsilon \quad \longrightarrow \quad n > \frac{19}{4\varepsilon} \qquad N(\varepsilon) \geq \left[\frac{19}{4\varepsilon} \right]$$

2. feladat (18 pont)

Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \frac{2^{2n+3}+5}{2^{3n-1}+3^n} \qquad b_n = \frac{8n^2-n+3}{n^2+9}$$

$$c_n = \sqrt[3]{b_n} = \sqrt[3]{\frac{8n^2-n+3}{n^2+9}} \qquad d_n = \sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{8n^2-n+3}{n^2+9}}$$

Megoldás:

$$a_n = \frac{8\cdot 4^n+5}{\frac{1}{2}8^n+3^n} = \frac{8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 5\left(\frac{1}{8}\right)^n}{\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{8}\right)^n} \to \frac{0+0}{\frac{1}{2}+0} = 0$$

$$b_n = \frac{8-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{9}{n^2}} \to \frac{8-0+0}{1+0} = 8$$

$c_n = \sqrt[3]{b_n} \to \sqrt[3]{8} = 2$

$d_n = \sqrt[n]{b_n}$ és $b_n \to 8$ miatt $\exists N_0$:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{7}} < d_n < \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{9}}\,, \quad \text{ha } n > N_0 \quad \Longrightarrow \quad d_n \to 1$$

Vagy:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{\frac{7}{10}}} = \sqrt[n]{\frac{8n^2 - n^2 + 0}{n^2 + 9n^2}} \le \sqrt[n]{\frac{8n^2 - n + 3}{n^2 + 9}} \le \sqrt[n]{\frac{8n^2 + 0 + 3n^2}{n^2}} = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{11}}$$

$\Longrightarrow \quad d_n \to 1$

3. feladat (14 pont)

Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{3n^2} \qquad b_n = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{9n^2} \qquad c_n = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{3n^3}$$

Megoldás:

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)^{3n^2}}{\left(1 + \frac{-2}{3n^2}\right)^{3n^2}} \to \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-2}} = \mathrm{e}^3 = A$$

$b_n = (a_n)^3 \quad \Longrightarrow \quad b_n \to A^3 = \mathrm{e}^9$

$$c_n = (a_n)^n > \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{8^n}\ , \text{ ha } n > N_0 \ (a_n \to \mathrm{e}^3 \text{ miatt}) \quad \Longrightarrow \quad c_n \to \infty$$

4. feladat (15 pont)

$a_1 = 10; \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 8} \qquad n = 1, 2, \dots \qquad (a_n) = (10, 5.29, 4.31, \dots)$

Mutassa meg, hogy a számsorozat konvergens, és adja meg a határértékét!

Megoldás:

Sejtés: $a_n \searrow$

Bizonyítás: teljes indukcióval

1. $a_1 > a_2 > a_3$

2. Tfh. $a_{n-1} > a_n$

3. Igaz-e: $a_n > a_{n+1}$?
   2. miatt:
$$\begin{aligned} 2a_{n-1} &> 2a_n \\ 2a_{n-1}+8 &> 2a_n+8>0 \\ a_n = \sqrt{2a_{n-1}+8} &> \sqrt{2a_n+8} = a_{n+1} \end{aligned}$$

Tehát $(a_n) \searrow$ és (a_n) alulról korlátos $(a_n > 0)$ $\implies$ (a_n) konvergens.
A határérték kielégíti a rekurzív formulát:

$$A = \sqrt{2A+8} \implies A^2 - 2A - 8 = 0 \implies A_{1;2} = -2; 4$$

Tehát $A = 4$.

5. feladat (10 pont)
A megfelelő definícióval bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-3}{2x+5} = 2$$

Megoldás:

$$\left|\frac{4x-3}{2x+5} - 2\right| = \frac{13}{|2x+5|} < \varepsilon$$

$$|2x+5| > \frac{13}{\varepsilon}$$

$$-(2x+5) > \frac{13}{\varepsilon}$$

$$2x+5 < -\frac{13}{\varepsilon}$$

$$x < -\frac{\frac{13}{\varepsilon}+5}{2} = -P(\varepsilon)$$

6. feladat (20 pont)

A jobb és bal oldali határértékek meghatározásával állapítsa meg az alábbi függvények szakadásainak jellegét!

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2\sqrt{x^2 + 4x + 4}}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 4x}{x^2}, & \text{ha } x < 0 \\ \dfrac{\sin 2(x-1)}{x^2 - 1}, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$

Megoldás:

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x^2}\,\dfrac{x+2}{|x+2|}\,(x-3)$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\downarrow\ \infty}\ \underbrace{\frac{(x+2)(x-3)}{|x+2|}}_{\downarrow\ -3} = -\infty \qquad x = 0 \text{ másodfajú (lényeges) szakadás}$$

$$\lim_{x\to -2-0} \underbrace{\frac{x+2}{-(x+2)}}_{\downarrow\ -1}\ \underbrace{\frac{x-3}{x^2}}_{\downarrow\ -\frac{5}{4}} = \frac{5}{4} \qquad\qquad \lim_{x\to -2+0} \underbrace{\frac{x+2}{x+2}}_{\downarrow\ 1}\ \underbrace{\frac{x-3}{x^2}}_{\downarrow\ -\frac{5}{4}} = -\frac{5}{4}$$

$x = -2$ véges ugrás (elsőfajú szakadás)

b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)}\,\frac{2}{x+1} = 1 \qquad x = 1 \text{ megszüntethető (elsőfajú) szakadás}$$

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin 2(x-1)}{x^2 - 1} = \frac{\sin(-2)}{-1} = \sin 2$$

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0-} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0-} 2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \cdot 2^2 = 8$$

$x = 0$-ban véges ugrás van (elsőfajú szakadás)

7. feladat (13 pont)

A differenciálhányados definíciójával határozza meg az

$$f(x) = \sqrt{2x-4}$$

függvény deriváltját $x > 2$-re!

Megoldás:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)-4}-\sqrt{2x-4}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)-4}-\sqrt{2x-4}}{h} \frac{\sqrt{2(x+h)-4}+\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2(x+h)-4}+\sqrt{2x-4}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)-4-(2x-4)}{h(\sqrt{2(x+h)-4}+\sqrt{2x-4})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \frac{2}{\sqrt{2(x+h)-4}+\sqrt{2x-4}} = \frac{2}{2\sqrt{2x-4}} = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$$

Pótfeladat (csak az elégségeshez):

8. feladat (10 pont)

$$a_n = \frac{n^2 + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)n^2}{2n^2+3n+7}$$

Adja meg a számsorozat torlódási pontjait! $\overline{\lim}\, a_n = ?$ $\underline{\lim}\, a_n = ?$

Megoldás: