Matematika A1 1. Vizsga (2013.12.21.)

A dolgozat írása során semmilyen segédeszköz nem használható! Rendelkezésre álló idő: 90 perc. Jó munkát!

1. (10 pont) Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x+1}$$

függvényen és ábrázolja a függvényt!

2. Adja meg a következő integrálok értékét!

   (a) (5 pont)

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} \,\mathrm{d}x =$$

   (b) (5 pont)

$$\int \frac{1}{x^3 + 2x^2} \,\mathrm{d}x =$$

3. (a) (5 pont) Irja fel a $2x + y - z + 5 = 0$ és az $x - y + 6z - 3 = 0$ síkok metszésvonalának egyenletét, amennyiben létezik!

   (b) (5 pont) Határozza meg a $z^2 - (2 + 3\,\mathrm{i})z - 1 + 3\,\mathrm{i} = 0$ egyenlet gyökeit!

4. (a) (5 pont) Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!

   (b) (5 pont) Adja meg az

$$f(x) = \begin{cases} \sin(4x^2)\cos\frac{1}{3x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

   függvény deriváltját, mindenütt, ahol létezik.

5. (10 pont) Számítsa ki az $y = \frac{8}{x^2+4}$ illetve az $y = \frac{x^2}{4}$ egyenletű görbék közé zárt korlátos síkidom területét!

Matematika A1 1. Vizsga (2013.12.21.)

1. (10 pont) Végezzen teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

függvényen és ábrázolja a függvényt!

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; f nem páros, nem páratlan, nem periodikus
  zérushelyek: $x^2 - x = 0$ megoldásai: $x = 0$, $x = 1$. $\boxed{\boxed{\text{1 pont}}}$
- Aszimptoták vizsgálata $\boxed{\boxed{\text{2 pont}}}$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} = \pm\infty$$

  $y = Ax + B$ lineáris aszimptota keresése:

$$A = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} = 1, \quad B = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x}{x + 1} = -2,$$

  azaz $\boxed{y = x - 2}$. <u>Vagy</u> polinomosztással: $f(x) = x - 2 + \frac{2}{x+1}$.
- Szakadási hely vizsgálata $\boxed{\boxed{\text{1 pont}}}$:

$$\lim_{x \to -1\pm} f(x) = \lim_{x \to -1\pm} \frac{2}{x + 1} = \pm\infty$$

- Monotonitás $\boxed{\boxed{\text{3 pont}}}$:

$$f'(x) = \left(x - 2 + \frac{2}{x + 1}\right)' = 1 - \frac{2}{(x + 1)^2}.$$

  Innen $f'(x) = 0$, ha $(x + 1)^2 = 2$, vagyis $x = -1 \pm \sqrt{2}$, és

	$(-\infty,-1-\sqrt{2})$	$-1-\sqrt{2}$	$(-1-\sqrt{2},-1)$	$(-1,-1+\sqrt{2})$	$-1+\sqrt{2}$	$(-1+\sqrt{2},\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

lokális maximum: $f(-1-\sqrt{2}) = -3-2\sqrt{2}$
lokális minimum: $f(-1+\sqrt{2}) = -3+2\sqrt{2} < 0$

- Konvexitás $\boxed{\boxed{\text{2 pont}}}$

$$f''(x) = \left(1 - \frac{2}{(x+1)^2}\right)' = \frac{4}{(x+1)^3} \begin{cases} > 0, & \text{ha } x > -1 \\ < 0, & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

így f konkáv $(-\infty,-1)$-en és konvex $(-1,\infty)$-n.

- Ábra: lásd a legvégén! $\boxed{\boxed{\text{1 pont}}}$.

2. Adja meg a következő integrálok értékét!

   (a) (5 pont)

$$\int_0^\infty x^2 e^{-2x} \,\mathrm{d}\, x =$$

   (b) (5 pont)

$$\int \frac{1}{x^3+2x^2} \,\mathrm{d}\, x =$$

(a) Primitív függvény kétszeres parciális integrálással $\boxed{\boxed{\text{3 pont}}}$:

$$\int x^2 e^{-2x} \,\mathrm{d}\, x = -\frac{x^2e^{-2x}}{2} + \int xe^{-2x} \,\mathrm{d}\, x = -\frac{x^2e^{-2x}}{2} - \frac{xe^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2} \,\mathrm{d}\, x = -\frac{e^{-2x}}{2}(x^2+x+1/2)$$

Impromprius integrál $\boxed{\boxed{\text{2 pont}}}$:

$$\int_0^\infty x^2e^{-2x} \,\mathrm{d}\, x = \lim_{A\to\infty} \int_0^A x^2 e^{-2x} \,\mathrm{d}\, x = \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{e^{-2x}}{2}(x^2+x+1/2)\right]_0^A = \frac{1}{4},$$

mert l'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{A\to\infty} -\frac{e^{-2x}}{2}(x^2+x+1/2) = 0.$$

(b) Parciális törtekre bontás $\boxed{\boxed{\text{3 pont}}}$:

$$\frac{1}{x^3+2x^2} = \frac{1}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax(x+2)+B(x+2)+Cx^2}{x^2(x+2)}.$$

Összehasonlítva x együtthatóit, vagy speciális x-ek behelyettesítésével a számlálókba, kapjuk

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{4}.$$

Így

$$\int \frac{1}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}\,x =$$

$$\boxed{-\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\ln|x+2| + C}.$$

$\boxed{\boxed{\text{2 pont}}}$

3. (a) (5 pont) Irja fel a $2x + y - z + 5 = 0$ és az $x - y + 6z - 3 = 0$ síkok metszésvonalának egyenletét, amennyiben létezik!
   (b) (5 pont) Határozza meg a $z^2 - (2+3\,\mathrm{i})z - 1 + 3\,\mathrm{i} = 0$ egyenlet gyökeit!

(a) A metszésvonal koordinátái kielégítik mindkét metszésvonal egyenletét. Tekinthetjük például $z = t$-t paraméternek. Behelyettesítve és kifejezve x-et és y-t megkapjuk a metszetegyenes paraméteres egyenletrendszerét:

$$x = -\frac{5}{3}t - \frac{2}{3}, \quad y = \frac{13}{3}t - \frac{11}{3}, \quad z = t.$$

<u>Vagy</u>
Megkaphatjuk az egyenes irányvektorát, mint a két normálvektor vektoriális szorzatát. Ezután meghatározva a metszésegyenes egy pontját, felírjuk az egyenletét.

(b) Az egyenlet diszkriminánsa $D = -1$, így

$$z_{1,2} = \frac{2+3i \pm i}{2},$$

$$\boxed{z_1 = 1+2i, \quad z_2 = 1+i}.$$

4. (a) (5 pont) Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!

(b) (5 pont) Adja meg az

$$f(x) = \begin{cases} \sin(4x^2)\cos\frac{1}{3x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény deriváltját, mindenütt, ahol létezik.

(a) Ha f folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-ben, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$, melyre

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(b) Ha $x \neq 0$, akkor

$$f'(x) = 8x\cos(4x^2)\cos\frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}\sin(4x^2)\sin\frac{1}{3x}.$$

$\boxed{\text{3 pont}}$

$x = 0$ esetén definicióval $\boxed{\text{2 pont}}$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(4h^2)\cos\frac{1}{3h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(4h^2)}{4h^2}4h\cos\frac{1}{3h} = 0,$$

hiszen $\cos\frac{1}{3h}$ korlátos.

5. (10 pont) Számítsa ki az $y = \frac{8}{x^2+4}$ illetve az $y = \frac{x^2}{4}$ egyenletű görbék közé zárt korlátos síkidom területét!

A két görbe metszéspontjait a $\frac{8}{x^2+4} = \frac{x^2}{4}$ egyenlet valós megoldásai adják. Ezt rendezve:

$$x^4 + 4x^2 - 32 = 0,$$

ahonnan $A = x^2$ helyettesítéssel másodfokú egyenletet kapunk, melynek gyökei: $A_1 = 4$ és $A_2 = -8$. Innen $x^2 \geq 0$ miatt csak A_1 jó, ahonnan a metszéspontok:

$$\boxed{x_{1,2} = \pm 2}.$$

$\boxed{\text{3 pont}}$

A közbezárt területre

$$T = \int_{-2}^{2}\left|\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right| \mathrm{d}\,x = 2\int_0^2\left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right) \mathrm{d}\,x,$$

a szimmetria miatt $\boxed{\boxed{\text{2 pont}}}$.

$$T = 2\left(\int_0^2 \frac{2}{(\frac{x}{2})^2+1}\,\mathrm{d}\,x - \frac{1}{4}\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}\,x\right) = 2\left(\left[\frac{2\arctan x/2}{1/2}\right]_0^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\right) = \boxed{2\pi - \frac{4}{3}}.$$

$\boxed{\boxed{\text{5 pont}}}$

Az 1. feladatbeli függvény gráfja: