

Bevezető matematika

Nagy Ilona

<https://math.bme.hu/~nagy/>

[Példatár](#)

2018. 09. 05. – előadás

Logikai műveletek, kvantorok

❖ állítás/kijelentés: mondat, melyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz/hamis – ez a logikai értéke

Logikai műveletek

❖ „nem” – negáció, tagadás

- **A** állítás tagadása pontosan akkor igaz, ha **A** hamis
- jele: $\neg A$

A	$\neg A$
igaz	hamis
hamis	igaz

❖ „és” – konjunkció

- „**A és B**” állítás pontosan akkor igaz, ha **A** és **B** állítás is igaz
- jele: $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	hamis
hamis	hamis	hamis

❖ „vagy” – diszjunkció

- „**A vagy B**” állítás pontosan akkor igaz, ha **A** és **B** állítás közül legalább az egyik igaz
- jele: $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	igaz
hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	hamis

❖ „ha akkor” – implikáció

- „ha **A**, akkor **B**” állítás pontosan akkor igaz, ha **A** és **B** állítás is igaz, illetve ha **A** állítás hamis és **B** állítás tetszőleges
- jele: $A \Rightarrow B$ vagy $A \rightarrow B$

A	B	$A \rightarrow B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	igaz

❖ „akkor és csak akkor” – ekvivalencia

- „ha **A**, akkor és csak akkor **B**” állítás pontosan akkor igaz, ha **A** és a **B** állítás közül egyszerre mindkettő igaz vagy mindkettő hamis
- jele: $A \Leftrightarrow B$ vagy $A \leftrightarrow B$

A	B	$A \leftrightarrow B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	hamis
hamis	hamis	igaz

összegezve:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
igaz	igaz	hamis	igaz	igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis	hamis	igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	igaz	hamis	igaz	igaz	hamis
hamis	hamis	igaz	hamis	hamis	igaz	igaz

Szükséges és elégséges feltétel

- ❖ $A \rightarrow B$:
 - A állítás B állításnak elégséges feltétele, illetve B állítás A állításnak szükséges feltétele
- ❖ $A \leftrightarrow B$ ($A \rightarrow B$ és $A \leftarrow B$):
 - A állítás B állításnak szükséges és elégséges feltétele
- ❖ példa:
 - az n egész szám osztható 6-tal
 - szükséges, de nem elégséges feltétel – pl.: osztható 2-vel, 3-mal
 - elégséges, de nem szükséges feltétel – pl.: osztható 12-vel, 24-gyel
 - szükséges és elégséges feltétel – pl.: osztható 2-vel, 3-mal, $n=6$ alakú, ahol n egész

Kvantorok

- ❖ $\forall$ = minden
- ❖ $\exists$ = létezik/van olyan
- ❖ $\vee$ = vagy/diszjunkció
- ❖ $\wedge$ = és/konjunkció
- ❖ $\neg$ = negáció/nem
- ❖ $\Leftrightarrow$ = ekvivalencia
- ❖ $\Rightarrow$ = implikáció
- ❖ példa:
 - állítás₁: $\forall$ nap esik az eső
 - tagadás₁: $\exists$ nap, amikor nem esik az eső
 - állítás₂: $\exists$ nap, amikor tévét nézek
 - tagadás₂: $\forall$ nap nem tévét nézek; $\exists$ nap, amikor tévét nézek
 - állítás₃: ha péntek van, akkor moziba megyek = $\forall$ pénteken moziba megyek
 - tagadás₃: pénteken nem megyek moziba = $\exists$ péntek, amikor nem megyek moziba
- ❖ $A \rightarrow B$ állítás, „ha akkor” helyett „minden”-nel is megfogalmazható

Gyakorlás

Logika - 1. feladat (előadás)

Értéktáblázatok segítségével igazoljuk a következő azonosságokat:

a: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
igaz	igaz	igaz	igaz	igaz	igaz	igaz	igaz
igaz	igaz	hamis	igaz	igaz	igaz	hamis	igaz
igaz	hamis	igaz	igaz	igaz	hamis	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis	hamis	hamis	hamis	hamis	hamis
hamis	igaz	igaz	igaz	hamis	hamis	hamis	hamis
hamis	igaz	hamis	igaz	hamis	hamis	hamis	hamis
hamis	hamis	igaz	igaz	hamis	hamis	hamis	hamis
hamis	hamis	hamis	hamis	hamis	hamis	hamis	hamis

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
igaz	igaz	igaz	igaz	igaz	igaz	igaz	igaz
igaz	igaz	hamis	hamis	igaz	igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	igaz	hamis	igaz	igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis	hamis	igaz	igaz	igaz	igaz
hamis	igaz	igaz	igaz	igaz	igaz	igaz	igaz
hamis	igaz	hamis	hamis	hamis	igaz	hamis	hamis
hamis	hamis	igaz	hamis	hamis	hamis	igaz	hamis
hamis	hamis	hamis	hamis	hamis	hamis	hamis	hamis

b: $\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg (A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
igaz	igaz	hamis	hamis	igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	igaz	hamis	hamis	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis	igaz	hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	igaz	igaz	hamis	igaz	igaz

$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg (A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
igaz	igaz	hamis	hamis	igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	igaz	hamis	igaz	hamis	hamis
igaz	hamis	hamis	igaz	igaz	hamis	hamis
hamis	hamis	igaz	igaz	hamis	igaz	igaz

De-Morgan azonosságok

c: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \rightarrow B$
igaz	igaz	hamis	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis	hamis	hamis
hamis	igaz	igaz	igaz	igaz
hamis	hamis	igaz	igaz	igaz

d: $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
igaz	igaz	igaz	igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis	hamis	igaz	hamis
hamis	igaz	hamis	igaz	hamis	hamis
hamis	hamis	igaz	igaz	igaz	igaz

Logika - 2. feladat (előadás)

Tagadjuk a következő állításokat!

- a: állítás: Minden ablak nyitva van.
tagadás: $\exists$ ablak, ami zárva van
- b: állítás: Minden emeleten van olyan ablak, ami nyitva van.
tagadás: $\exists$ emelet, ahol $\forall$ ablak zárva van
- c: állítás: Minden épületben van olyan emelet, ahol minden ablak nyitva van.
tagadás: $\exists$ épület, melyben $\forall$ emeleten, $\exists$ ablak, ami nyitva van
- d: állítás: Ha süt a nap, akkor túrázni megyek.
tagadás: süt a nap és nem túrázok
- e: állítás: Akkor és csak akkor megyek nyaralni, ha telitalálatom lesz a lottón.
tagadás: nincs telitalálatom a lottón és megyek nyaralni
- f: állítás: Minden pozitív ε számhoz van olyan δ pozitív szám, hogy bármely x valós számra, ha $|x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
tagadás: $\exists$ olyan pozitív ε , hogy bármely δ pozitív számhoz található olyan x szám, hogy $|x - a| < \delta$, de $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

Bizonyítási módszerek

Direkt bizonyítás

- ❖ igaz állításból kiindulva helyes matematikai lépéseken keresztül jutunk el a bizonyítandó állításhoz
- ❖ példa: számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség
- ❖ tétel: bármely $a_1 + a_2 + \dots + a_n \in \mathbb{R}$ nem negatív valós számok esetén $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$, és egyenlőség csak abban az esetben teljesül, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$
- ❖ bizonyítás: $n = 2$ esetén ekvivalens átalakításokkal
$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \iff (a_1 + a_2)^2 \geq 4 a_1 a_2 \iff a_1^2 - 2 a_1 a_2 + a_2^2 \geq 0 \iff (a_1 - a_2)^2 \geq 0$$
ami mindig teljesül, és egyenlőség csak akkor áll fent, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Indirekt bizonyítás

- ❖ indirekt feltevés: feltesszük, hogy a bizonyítandó állítás tagadása igaz
- ❖ feltevésből kiindulva helyes matematikai lépéseken keresztül ellentmondásra jutunk $\rightarrow$ indirekt feltevés hamis $\rightarrow$ eredeti állítás igaz
- ❖ példa: bizonyítsuk be, hogy végtelen sok prímszám van
- ❖ bizonyítás: indirekt módon tegyük fel, hogy csak véges sok prímszám van:
$$p_1, p_2, \dots, p_k$$
szorozzuk össze ezeket, és szorzatukhoz adjunk hozzá 1-et:
$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$$
ekkor n szám nem osztható $p_1, p_2, \dots, p_k$ számok egyikével sem, hiszen mindig 1 lesz a maradék ezért az n vagy egy újabb prímszám, vagy olyan összetett szám, melynek a felsorolt k darab prímszámtól különböző prímtényezője van
kiindulás: k db prímszám $\rightarrow$ kell még legalább 1 prímszám $\rightarrow$ $\nrightarrow$ ellentmondás $\rightarrow$ ∞ sok prím van

Teljes indukció

- ❖ jelöljön az $A(n)$ olyan állítást, amely n egész számtól függ
- ❖ bizonyítás 2 lépésből áll:
 1. megmutatjuk, hogy van olyan n_0 egész szám, amelyre $A(n_0)$ állítás igaz
 2. aztán feltesszük, hogy valamely n egész számra $A(n)$ igaz, ennek alapján bebizonyítjuk, hogy $A(n+1)$ is igaz
- ❖ ezekből következik, hogy $A(n)$ igaz minden $n \geq n_0$ esetén
- ❖ példa: $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- ❖ bizonyítás:
 - 1. lépés: $k = 1$ esetben $1 = \frac{1(1+1)}{2} \rightarrow$ igaz az állítás
 - 2. lépés: tegyük fel, hogy az n pozitív egész számra igaz állítás, azaz
$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
ebből bizonyítjuk, hogy $(n+1)$ -re is igaz, hogy
$$1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$\rightarrow \text{minden } n \text{ pozitív egészre igaz az állítás}$$

Gyakorlás

Teljes indukció - 2. feladat (előadás)

Bizonyítsd teljes indukcióval!

állítás: $\sum_{k=1}^n (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

- $\mathbb{N} \ni n = \mathbb{Z}^+$
 1. $n = 0 \vee 1$
 2. tfh n -re
 3. $n+1$ -re teljesül-e
- 1.:
 - $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$
 - tfh, hogy n -re igaz
 - $n = 1 \quad 1 = 2 \cdot 1 - 1$
 - $n = 2 \quad 2^2 = \sum_{k=1}^2 (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 2 - 1$
 - $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$
 - $n+1$ -re teljesül-e?
 - $\sum_{k=1}^n (2k-1) + 2(n+1) - 1 = (n+1)^2$
 - $n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1$
- 2.: $3 \mid 2 \cdot 7^n + 1$
 - $n = 1 \quad 3 \mid 2 \cdot 7^1 + 1 = 15$
 - $3 \mid 2 \cdot 7^{n+1} + 1 \quad ?$
 - $2 \cdot 7^{n+1} + 7 = 3 \cdot 7 \cdot x \quad / -6$
 - $2 \cdot 7^{n+1} + 1 = 3 \cdot 7 \cdot x - 6 = 3(7x - 2)$

Gyakorlás

Teljes indukció - 9. feladat (előadás)

- ❖ igazoljuk, hogy
 - a) 4 osztója $5^n - 1$ -nek
 - b) 7 osztója $11^n - 4^n$ -nek
- ❖ emlékeztető:
 - a, b természetes számok esetén az a számot b szám osztójának nevezik, ha van olyan q természetes szám, hogy $a \cdot q = b$
 - ehhez azt mondjuk, hogy b osztható a -val
 - jele: a/b
- ❖ megoldás: teljes indukció
 - a) 1. lépés: $n = 1$ -re $4|5^1 - 1 = 4$, mivel $4 = 1 \cdot 4$
2. lépés: tfh, $4|5^n - 1$, azaz van olyan k természetes szám, hogy $5^n - 1 = 4k$
igazoljuk, hogy $4|5^{n+1} - 1$ is teljesül
 $5^{n+1} - 1 = 5 \cdot 5^n - 1 = 5 \cdot (5^n - 1) + 4 = 5 \cdot 4k + 4 = 4 \cdot (5k + 1)$
→ azaz 4 osztója $4|5^{n+1} - 1$ → az állítás minden n pozitív egészre igaz
 - b) 1. lépés: $n = 1$ -re $7|11^1 - 4^1 = 7$, mivel $7 = 1 \cdot 7$
2. lépés: tfh, $7|11^n - 4^n$, azaz van olyan k természetes szám, hogy $11^n - 4^n = 7k$
igazoljuk, hogy $7|11^{n+1} - 4^{n+1}$ is teljesül
 $7|11^{n+1} - 4^{n+1} = 11 \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n = 11 \cdot (11^n - 4^n) + 11 \cdot 4^n - 4 \cdot 4^n$
 $= 11 \cdot (11^n - 4^n) + 7 \cdot 4^n = 11 \cdot 7k + 7 \cdot 4^n = 7 \cdot (11k + 4^n)$
→ azaz 7 osztója $7|11^{n+1} - 4^{n+1}$ → az állítás minden n pozitív egészre igaz

Skatulyaelv

- ❖ ha n darab dobozban legalább $n + 1$ tárgyat kell elhelyezni, akkor legalább 1 dobozba legalább 2 tárgyat kell tenni
- ❖ ha n darab dobozban legalább $nk + 1$ tárgyat kell elhelyezni, akkor legalább 1 dobozba legalább k darab tárgyat kell tenni

Gyakorlás

Skatulyaelv – példa

- ❖ Bizonyítsuk be, hogy van 5 darab prím! (p) $p \geq 0$ p, q prím
- ❖ → $\exists$ 2 darab olyan prím, melyre $10|p - q$
- ❖ prímekek páratlanok (kivéve: 2)
- ❖ lehetséges végződés: 1, 3, 7, 9

Skatulyaelv - 1. feladat (előadás)

Válasszunk ki 6 különböző egész számot, 1-től 10-ig! Igazoljuk, hogy van közöttük 2, melyek összege 11!

pl.: 8, 6, 5, 10, 4, 2

megoldás: tekintsük a következő 5 számpárt:

(1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6)

minden számpár esetében a számok összege 11

skatulyaelv szerint (számpárok = „skatulyák”) 6 különböző egész számot választva, 1-től 10-ig, mindig lesz 2, mely ugyanazon számpárhoz tartozik, tehát az összeg 11

Skatulyaelv - 3. feladat (előadás)

Bizonyítsuk be, hogy 4 egész szám között mindig van 2, melyek különbsége osztható 3-mal!

pl.: 10, 24, 96, 2

pl.: $96 - 2 = 94 \rightarrow 94 : 3 = 31$ osztható 3-mal

megoldás: egész számok 3-mal osztási maradéka 3-féle lehet: 0, 1, 2

skatulyaelv miatt 4 egész szám között biztosan lesz 2, mely 3-mal osztva ugyanazt az m maradékot adják $\rightarrow$ vannak olyan k_1, k_2 egészek, hogy e két szám $a = 3k_1 + m$; $b = 3k_2 + m$

tehát $a - b = (3k_1 + m) - (3k_2 + m) = 3(k_1 - k_2) \rightarrow a - b$ osztható 3-mal

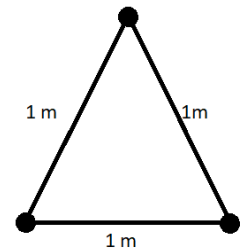
Skatulyaelv - 5. feladat (előadás)

1 terem padlóját tetszőlegesen kifestettük kékre vagy sárgára. Mutassuk meg, hogy legalább 2 ugyanolyan színű pont, melyek távolsága 1 méter.

megoldás: vegyünk 1 db 1 méter oldalú szabályos 3szöget

„skatulyák” = 3szög csúcsai

skatulyaelv miatt a csúcsok között lesz 2 azonos színű



Halmazok

Definíció

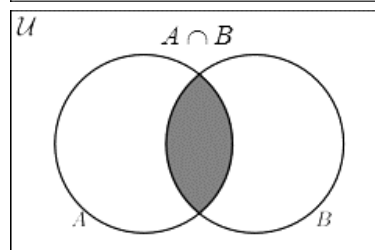
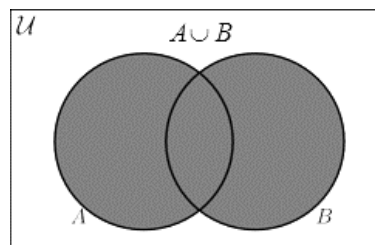
- ❖ 2 halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha elemeik ugyanazok
- ❖ pl.: $\{1,2\} = \{2,1\} = \{1,1,2\} = \{1,2,2,1,2\}$
- ❖ üres halmaz:
 - halmaz, melynek nincs eleme
 - jelölése: $\emptyset$
- ❖ x dolog eleme az A halmaznak
 - jelölése: $x \in A$
- ❖ részhalmaz:
 - A halmaz részhalmaza B -nek:
 - A minden eleme B -nek is eleme
 - jelölése: $(A \subseteq B)$
 - A halmaz valódi része B -nek
 - $A \subseteq B$, de $A \neq B$
 - jelölése: $(A \subset B)$
- ❖ halmazok megadása: $\{x \in \text{alaphalmaz} \mid \text{feltételek } x\text{-re}\}$

Nevezetes halmazok

- ❖ valós számok halmaza: $\mathbb{R}$ (pozitív valós számok: $\mathbb{R}^+$)
- ❖ természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (0 definíció/megállapítás kérdése)
- ❖ egész számok halmaza: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (pozitív egész számok: $\mathbb{Z}^+$ vagy $\mathbb{N}^+$)
- ❖ racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ és } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ melyre } x = \frac{k}{n}\}$
- ❖ intervallumok például:
 - $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
 - $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ más jelölés: $[a; b)$
 - $]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ más jelölés: $(a; +\infty)$

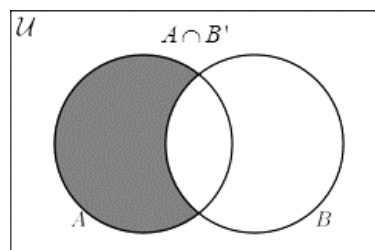
Műveletek halmazokkal

- ❖ unió/egyesítés:
 - 2 halmaz közül legalább egyikben benne vannak
 - $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$
- ❖ metszet/közös rész:
 - mind 2 halmazban benne vannak
 - $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$



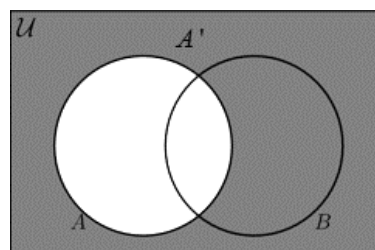
❖ különbség:

- A összes eleme, mely nincs benne B -ben
- $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ és } x \notin B\}$



❖ komplementer:

- A halmaz H -ra vonatkozó komplementere: $\bar{A}_H = H \setminus A$
- $\bar{A}_H = \{x \in H | x \notin A\}$
- ha az alaphalmaz nincs megnevezve: jelölés: $\bar{A}$
- A és B diszjunkt, ha $A \cap B = \emptyset$



Descartes-szorzat

❖ rendezett pár:

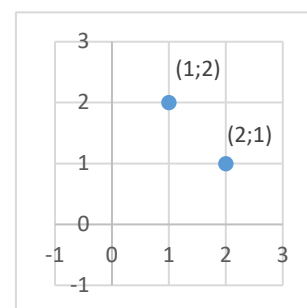
- számít a sorrend
- jelölése: $(1,2)$
- $(1,2) \neq (2,1)$
- ábrázolása koordináta-síkon

❖ megjegyzés: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

❖ Descartes-szorzat: $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ és } b \in B\}$

❖ 1. példa: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ a koordinátáik

❖ 2. példa: $[1; 2] \times [3; 4] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 2 \text{ és } 3 \leq y \leq 4\}$



Azonosságok

❖ bármely A, B, C halmazra fennállnak

❖ asszociativitás:

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

❖ kommutativitás:

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

❖ disztributivitás:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

❖ De Morgan-azonosságok:

- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Logikai szita formula

❖ jelölje $|M|$ az M halmaz elemeinek számát

1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

❖ bizonyítás: Venn-diagrammal:

$$|A \cup B| = a + b + c$$

$$|A| = a + b$$

$$|B| = b + c$$

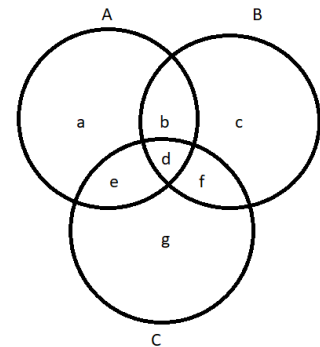
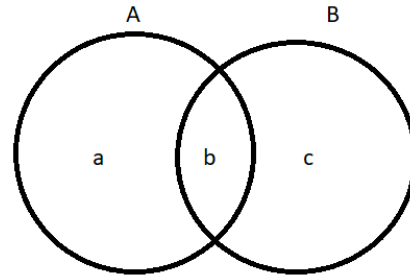
$$|A \cap B| = b$$

$$\rightarrow a + b + c = (a + b) + (b + c) - b$$

2) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

❖ bizonyítás:

$$\begin{aligned} \rightarrow a + b + c + d + e + f + g &= (a + b + d + e) + (b + c + d + f) + \\ &\quad (d + e + f + g) - (d + b) - (d + e) - (d + f) + d \end{aligned}$$



2018. 09. 19. – előadás

Sorozatok

Számtani sorozat

❖ definíció: (a_n) sorozat számtani sorozat, ha $a_{n+1} - a_n = d$ vagy $a_{n+1} = a_n + d$
 d = differencia

a_n = tag

❖ állítás: (a_n) számtani sorozat n -edik tagja: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

❖ bizonyítás: teljes indukcióval

➤ 1. lépés: $a_2 = a_1 + d$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

tehát $n = 1, 2, 3, 4$ esetén igaz az állítás

➤ 2. lépés: tfh, $a_{n-1} = a_1 + (n - 2)d$

$$\text{definíció alapján: } a_n = a_{n-1} + d = (a_1 + (n - 2)d) + d = a_1 + (n - 1)d$$

ez a bizonyítandó egyenlőség $\rightarrow$ minden n -re igaz

❖ tulajdonságok:

➤ ha $\begin{cases} d > 0 \\ d < 0, \text{ akkor az } (a_n) \text{ sorozat} \\ d = 0 \end{cases} \begin{cases} \text{monoton növekvő, alulról korlátos} \\ \text{monoton csökkenő, felülről korlátos} \\ \text{állandó sorozat, korlátos} \end{cases}$

❖ számtani közép tulajdonság

➤ (a_n) sorozat számtani sorozat

$$\begin{cases} a_{n-1} = a_n - d \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases} \rightarrow a_{n-1} + a_{n+1} = (a_n - d) + (a_n + d) = 2a_n$$

➤ minden $n \geq 2$ egész esetén: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

➤ hasonlóan minden $n > k$ egész esetén: $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$

❖ első n tag összege - S_n :

- $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
 $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$
- $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$
- minden tag $a_1 + a_n$ -nel egyenlő:
- $a_3 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$
- $a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n$
- így $2S_n = (a_1 + a_n)n \rightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot 2$
- mivel: $a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Mértani sorozat

❖ definíció: (a_n) sorozat mértani sorozat, ha minden n pozitív egészre $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ vagy $a_{n+1} = a_n \cdot q$

$(a_n \neq 0)$

q = kóciens/hányados

a_n = tag

❖ állítás: (a_n) mértani sorozat n -edik tagja $a_n = a_1 q^{n-1}$

❖ bizonyítás: teljes indukcióval

❖ tulajdonságok:

- ha $\begin{cases} q > 0 \\ q < 0 \end{cases}$, akkor a sorozat tagjai $\begin{cases} \text{azonos előjelűek} \\ \text{váltakozó előjelűek} \end{cases}$
- ha $\begin{cases} q > 1 \\ 0 < q < 1 \\ q = 1 \end{cases}$, akkor az (a_n) sorozat $\begin{cases} \text{monoton növekvő,} \\ \text{monoton csökkenő} \\ \text{állandó sorozat} \end{cases}$

❖ mértani közép tulajdonság:

- (a_n) mértani sorozat
- $\begin{cases} a_{n-1} = \frac{a_n}{q} \\ a_{n+1} = a_n q \end{cases} \rightarrow a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \frac{a_n}{q} \cdot a_n q = a_n^2 \rightarrow |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$
- ha $a_{n-1}, a_n, a_{n+1} > 0, n \geq 2$, akkor $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

❖ első n tag összege - S_n :

- ha $q = 1$: $S_n = a_1 + a_1 + \dots + a_1 = n \cdot a_1$
- ha $q \neq 1$:
 - 1. n tag összege szorozva q -val, majd 2. egyenletből az 1.-t kivonva
 - $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$
 $S_n \cdot q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$
 - $S_n \cdot q - S_n = a_1 q^2 - a_1$
 - $S_n(q - 1) = a_1(q^n - 1) \rightarrow$
 - $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ahol $(q \neq 1)$

Gyakorlás

Sorozatok - 1. feladat (gyakorlat)

Számítsuk ki!

- a) a 2-jegyű páros számok összegét:

$$a_1 = ? = 10 \quad d = ? \quad S_n = ? \quad n = \text{2-jegyű páros szám db száma}$$

$$99 - 10 = 89 \quad n = 44,5$$

$$d = 2$$

$$S_{45} = \frac{45}{2} \cdot (2 \cdot 10 + 44 \cdot 2) = 2430$$

- b) a 3-jegyű páratlan számok összegét:

$$a_1 = ? = 101 \quad d = ? \quad S_n = ? \quad n = \text{3-jegyű páratlan szám db száma}$$

$$999 - 100 = 899 \quad n = 449,5$$

$$d = 2$$

$$S_{450} = \frac{(2 \cdot 101 + 449 \cdot 2) \cdot 450}{2} = 247\,500$$

Sorozatok - 2. feladat (gyakorlat)

Egy számtani sorozat első 3 tagjának az összege 30-cal kevesebb, mint a következő 3 tag összege. Az első 6 tag összege 60. Határozzuk meg a sorozat 1. tagját és differenciáját!

$$a_1 = ? \quad d = ?$$

$$S_{3-6} = S_3 + 30 \quad S_6 = 60$$

$$S_3 + S_{3-6} = S_6$$

$$S_3 + S_3 + 30 = S_6 = 60$$

$$2S_3 = 30$$

$$S_3 = 15$$

$$60 = \frac{(2 \cdot a_1 + 5d) \cdot 6}{2}$$

$$15 = \frac{(2a_1 + 5d) \cdot 3}{2} = \frac{2 \cdot 3(a_1 + d)}{2}$$

$$a_1 + d = 5$$

$$6a_1 + 15d = 60$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 60 \end{matrix} \rightarrow II - 6I \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 30 \end{matrix}$$

$$9d = 30$$

$$d = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$$

$$a_1 = \frac{5}{3}$$

Sorozatok - 3. feladat (gyakorlat)

Legyen az (a_n) számtani sorozat, melyben $a_5 = 17$ és $a_7 = 10$. Határozzuk meg a sorozat 1. tagját, differenciáját, és a sorozat 1. 8 tagjának összegét!

$$\begin{aligned}a_5 &= 17 & a_7 &= 10 & a_1 &= ? & d &= ? & S_8 &= ? \\d &= -3,5 \\a_1 &= a_5 - 4d = 31 \\S_8 &= \frac{(2 \cdot 31 + 7 \cdot -3,5) \cdot 8}{2} = 150\end{aligned}$$

Sorozatok - 5. feladat (gyakorlat)

Egy könyvszekrény polcain, alulról fölfelé számtani sorozat szerint növekvő darabszámú könyv van. A 2. polcon 18, a 4. polcon 24 könyvet találunk. Hány könyv van a szekrényben összesen, ha 12 polcból áll?

$$\begin{aligned}a_2 &= 18 & a_7 &= 24 & S_{12} &= ? \\d &= 3 \\a_1 &= a_2 - d = 15 \\S_{12} &= \frac{(2 \cdot 15 + 11 \cdot 3) \cdot 12}{2} = 378\end{aligned}$$

Sorozatok - 8. feladat (gyakorlat)

Legyen az (a_n) mértani sorozat, melyben $a_1 + a_2 + a_3 = 39$ és $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 729$. Határozzuk meg a sorozat 1. 3 tagját!

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + a_3 &= 39 \\a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 &= 729 \\a_1 \cdot a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^2 &= 729 \\a_2 &= a_1 \cdot q = 9 \rightarrow q = \frac{9}{a_1} \\a_1 + 9 + a_1 \cdot q^2 &= 39 \\a_1 + \frac{81}{a_1} &= 30 \\a_1^2 + 81 &= 30a_1 \\a_{1,2} &= \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 324}}{2} & a_1 &= 27 & a_2 &= 3\end{aligned}$$

Sorozatok - 9. feladat (gyakorlat)

Számítsuk ki a következő összeg értékét!

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\right)^{11} + \left(\frac{1}{3}\right)^{12} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{20} &= ? = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{20} - 1}{\frac{1}{3} - 1} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{3} - 1} \right) = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{20} - 1 - \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right) \right) \\&= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - \left(\frac{1}{3}\right)^{20} \right) \cdot \frac{3^{20}}{3^{20}} = \frac{3^{10} - 1}{2 \cdot 3^{20}} S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\q &= \frac{1}{3} \\a_1 &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Műveletek racionális számokkal

$$\begin{aligned} \diamond \text{ összeadás: } & \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \\ \diamond \text{ kivonás: } & \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond \text{ szorzás: } & \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \\ \diamond \text{ osztás: } & \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \end{aligned}$$

Nevezetes azonosságok

$$\begin{aligned} \diamond (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & \diamond (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \diamond (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & \diamond (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ \diamond (a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 & \diamond a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ \diamond (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc & \diamond a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ \diamond a^n + b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

Binomiális tétel

$$\begin{aligned} \diamond (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \text{ hol } n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}, \text{ és } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ a binomiális együtthatók} \\ \diamond \text{ részletezve: } (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \\ \diamond \text{ például: } & \\ (a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= a^1 + b^1 \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

2018. 09. 26. – előadás

Hatványozás és gyökvonás azonosságok

$$\begin{aligned} \diamond \text{ pozitív egész kitevőjű hatvány: } & a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a; & a^1 &= a \\ \diamond \text{ negatív egész és 0 kitevőjű hatvány: } & a^{-n} = \frac{1}{a^n}; & a^0 &= 1 \\ \diamond \text{ racionális kitevőjű hatvány: } & a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}; & a^{\frac{1}{k}} &= \sqrt[k]{a} \\ \diamond \text{ azonos alapú hatványok: } & & \diamond \text{ azonos kitevőjű hatványok: } & \\ \quad \triangleright a^n \cdot a^k &= a^{n+k} & \quad \triangleright (ab)^n &= a^n b^n \\ \quad \triangleright \frac{a^n}{a^k} &= a^{n-k} & \quad \triangleright \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \\ \quad \triangleright (a^n)^k &= a^{nk} & & \\ \diamond \text{ azonos alapú gyökök: } & & & \\ \quad \triangleright \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a} & \quad \triangleright (\sqrt[k]{a})^n &= \sqrt[k]{a^n} = a^{\frac{n}{k}} \\ \diamond \text{ azonos kitevőjű gyökök: } & & & \\ \quad \triangleright \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} & \quad \triangleright \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \end{aligned}$$

Gyakorlás

Hatványozás, gyökvonás - 1. feladat (előadás)

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket a változók lehetséges értékei mellett!

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \left(\frac{a^3+ab^2}{a^2-2ab} - \frac{2ab}{a-b} - \frac{b^2-ab}{a} \right) : \frac{a^4-b^4}{a^2+b^2} = \left(\frac{a(a^2+b^2)}{a(a-b)} - \frac{2ab}{a-b} - \frac{b(b-a)}{a} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{a^4-b^4} = \\
 & \frac{a(a^2+b^2)-2a^2b-b(a-b)(b-a)}{a(a-b)} \cdot \frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} = \frac{a^3+ab^2-2a^2b+b(b-a)(b-a)}{a(a-b)} \cdot \frac{1}{a^2+b^2} = \\
 & \frac{a^3+ab^2-2a^2b+b(b^2-2ab+a^2)}{a(a-b)} \cdot \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{a^3+ab^2-2a^2b+b^3-2ab^2+a^2b}{a(a-b)} \cdot \frac{1}{a^2+b^2} = \\
 & \frac{a^3-ab^2-a^2b+b^3}{a(a-b)} \cdot \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{(a+b)(a-b)^2}{a(a-b)} \cdot \frac{1}{(a-b)(a+b)} = \frac{(a-b)}{a(a-b)} = \frac{1}{a} \\
 & \text{számláló: } a^3 + b^3 - ab^2 - a^2b = (a+b)(a^2 - ab + b^2) - (ab^2 + a^2b) = (a+b)(a^2 - ab + b^2 - ab - a^2b) = \\
 & (a+b)(a^2 + ab + b^2 - ab) = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a+b)(a-b)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & \frac{x^2-y^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2} \right) : \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} \right) = \frac{x^2-y^2}{2} \cdot \frac{(x-y)^2-(x+y)^2}{(x+y)^2(x-y)^2} : \frac{x-y-(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \\
 & \frac{x^2-y^2}{2} \cdot \frac{x^2-2xy+y^2-(x^2+2xy+y^2)}{(x+y)^2(x-y)^2} : \frac{-2y}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2-y^2}{2} \cdot \frac{-4xy}{(x+y)^2(x-y)^2} \cdot \frac{(x+y)(x-y)}{-2y} = \\
 & \frac{(x+y)(x-y)}{2} \cdot \frac{-4xy}{(x+y)^2(x-y)^2} \cdot \frac{(x+y)(x-y)}{-2y} = \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2} \cdot \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2} \cdot \frac{-4xy}{-4y} = x
 \end{aligned}$$

Hatványozás, gyökvonás - 2. feladat (előadás)

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket a változók lehetséges értékei mellett!

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x^2 \cdot \sqrt{x}}}{x^2 \sqrt[8]{x}}} \cdot \sqrt[8]{x^9} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x^2 \cdot \sqrt{x}}}}{\sqrt[3]{x^2 \sqrt[8]{x}}} \cdot \sqrt[8]{x^9} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x^3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x}}}}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[8]{y}}} \cdot \sqrt[8]{x^9} = \frac{x^{\frac{9}{6}} x^{\frac{1}{24}}}{x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{24}}} \cdot x^{\frac{1}{8}} = \frac{x^{\frac{36}{24}} x^{\frac{2}{24}}}{x^{\frac{16}{24}} x^{\frac{1}{24}}} \cdot x^{\frac{1}{8}} = \\
 & x^{\frac{27}{24}} = \frac{x^{\frac{36+2}{24}}}{x^{\frac{16+1}{24}}} \cdot x^{\frac{27}{24}} = \frac{x^{\frac{65}{24}}}{x^{\frac{17}{24}}} = x^{\frac{65-17}{24}} = x^{\frac{48}{24}} = x^2 \\
 \text{e) } & \sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a}}}} \cdot \sqrt[4]{a} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a}}}} \cdot \sqrt[4]{a} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a^2 \cdot \sqrt[6]{\sqrt{a}}}} \cdot \sqrt[4]{a} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{6}} \cdot a^{\frac{1}{12}}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = \frac{a^{\frac{6}{12} + \frac{3}{12}}}{a^{\frac{4}{12} + \frac{1}{12}}} = \frac{a^{\frac{9}{12}}}{a^{\frac{5}{12}}} = \\
 & a^{\frac{9-5}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}
 \end{aligned}$$

Hatványozás, gyökvonás - 3. feladat (előadás)

Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét!

$$a) \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{2-\sqrt{2}})^2 + (\sqrt{2+\sqrt{2}})^2}{\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} =$$

$$\frac{4}{\sqrt{4-2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$d) \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{2} = ?$$

próba $11 + 6\sqrt{2}$ -t összeg négyzetévé alakítás

$$11 + 6\sqrt{2} = (\quad)^2 = ?^2 + ?^2 + 2 \cdot$$

$$a^2 + b^2 = 11$$

$$2ab = 6\sqrt{2}$$

$$\rightarrow ab = 3\sqrt{2} \text{ ha } a = 3, b = \sqrt{2} \rightarrow a^2 + b^2 = 9 + 2 = 11$$

$$\rightarrow \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{2} = |3 + \sqrt{2}| - \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 3$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a > 0 \\ -a, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

Hatványozás, gyökvonás - 1. feladat

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

$$a) \left(\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) : \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b}{a} \right) = \left(\frac{a^2+ab+b^2}{ab^2} \right) : \left(\frac{a^3-b^3}{ab^2} \right) = \frac{a^2+ab+b^2}{ab^2} \cdot \frac{ab^2}{a^3-b^3} = \frac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3} =$$

$$\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{1}{a-b}$$

$$c) \left(\frac{a^2-3ab}{a+b} + b \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2} \right) =$$

$$\left(\frac{a^2-3ab+b(a+b)}{a+b} \right) : \left(\frac{a \cdot (a-b) + b \cdot (a+b) + 2ab}{a^2-b^2} \right) = \left(\frac{(a-b)^2}{a+b} \right) : \left(\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} \right) = \left(\frac{(a-b)^2}{a+b} \right) \cdot$$

$$\left(\frac{a+b}{(a-b)^2} \right) = \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{(a+b)} = a - b$$

Hatványozás, gyökvonás - 2. feladat

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

$$b) \sqrt[3]{x^2 \sqrt[6]{x^{-4} \sqrt{x^{-7}}}} \cdot \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x}} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{-4}{18}} \cdot x^{\frac{-7}{36}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = x^{\frac{24-8-7+54-9}{36}} = x^{\frac{54}{36}} = x^{\frac{3}{2}}$$

Hatványozás, gyökvonás - 4. feladat

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x+2}{x-3} \cdot \left(\frac{3}{x^2-4} - \frac{x}{x^2-2x} + \frac{x+3}{x^2+2x} \right) &= \frac{x+2}{x-3} \cdot \left(\frac{3}{(x+2) \cdot (x-2)} - \frac{x}{x \cdot (x-2)} + \frac{x+3}{x \cdot (x+2)} \right) = \frac{x+2}{x-3} \cdot \\ &\left(\frac{3x - x \cdot (x+2) + (x+3) \cdot (x-2)}{x \cdot (x+2)(x-2)} \right) = \frac{x+2}{x-3} \cdot \left(\frac{3x - x^2 - 2x + x^2 + x - 6}{x \cdot (x+2)(x-2)} \right) = \frac{x+2}{x-3} \cdot \left(\frac{2 \cdot (x-3)}{x \cdot (x+2) \cdot (x-2)} \right) = \frac{2}{x^2-2x} \\ \text{b) } \frac{x^2-9}{x^2-3x} \cdot \frac{x^2+6x+9}{x^4-9x^2} &= \frac{(x+4)(x-3)}{x(x-3)} \cdot \frac{x^2(x^2-9)}{(x+3)^2} = \frac{x(x^2-9)}{x+3} = \frac{x(x+3)(x-3)}{x+3} = x(x-3) \end{aligned}$$

Hatványozás, gyökvonás - 5. feladat

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

$$\text{a) } \frac{(x^3-3x^2+3x-1) \cdot (x^3+x^2+x+1)}{(x-1) \cdot (x^4-1)} = \frac{(x^3-3x^2+3x-1) \cdot (x^3+x^2+x+1)}{(x-1) \cdot (x^2-1) \cdot (x^2+1)} = \frac{(x-1)^2 \cdot (x^3+x^2+x+1)}{(x^4-1)} = x-1$$

Hatványozás, gyökvonás - 8. feladat

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{a^4 b^5}{c^2 d^{-2}} \right)^3 : \left(\frac{a^3 b^7}{c^{-2} d^{-5}} \right)^2 &= \frac{a^{12} b^{15}}{c^6 d^{-6}} : \frac{a^6 b^{14}}{c^{-4} d^{-10}} = \frac{a^{12} b^{15}}{c^6 d^{-6}} \cdot \frac{c^{-4} d^{-18}}{a^6 b^{14}} = a^6 b c^{-10} d^{-4} \\ \text{b) } \left(\frac{a^{-7} b^3}{c^4 d^{-3}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{a^{-2} b}{c^2 d^{-4}} \right)^3 &= \frac{a^7 b^{-3}}{c^{-4} d^3} \cdot \frac{a^{-6} b^3}{c^6 d^{-12}} = a^{7-6} b^{-3+3} c^{-(4+6)} d^{-(3-12)} = a c^{-2} d^9 \end{aligned}$$

Hatványozás, gyökvonás - 9. feladat

Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

$$\frac{\sqrt[3]{x^2} \sqrt[4]{\sqrt{x^7}}}{\sqrt[4]{x^2} \sqrt[3]{x^5}} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{12}} \cdot x^{\frac{7}{24}} \cdot x^{-\frac{2}{4}} \cdot x^{-\frac{5}{12}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{1}{12} + \frac{7}{24} - \frac{2}{4} - \frac{5}{12}} = x^{\frac{16}{24} + \frac{2}{24} + \frac{7}{24} - \frac{12}{24} - \frac{10}{24}} = x^{\frac{3}{24}} = x^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{x}$$

Hatványozás, gyökvonás - 13. feladat

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{\sqrt{2}-1}} &= \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{\sqrt{2}-1}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{\sqrt{2}+1 + \sqrt{2}-1 + 2 \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1 + \sqrt{2}-1 + 2 \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1}}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} + \sqrt{2-1} = \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

Logaritmus

Logaritmus fogalma, azonosságai

- ❖ definíció:
 - $\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$, ahol $a > 0, a \neq 1, b > 0$
 - definíció alapján: $\log_a b^b = b$ és $a^{\log_a b} = b$
- ❖ azonosságai:
 - $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
 - $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
 - $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$
 - $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$
- ❖ $\ln = \log_e$
- ❖ $\lg_{10} = \log_{10}$

Gyakorlás

Logaritmus - 1. feladat (előadás)

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

- a) $\log_2 16 = 4$, mert $2^4 = 16$
- c) $\ln e^6 = 6$
- e) $\lg 0,00001 = -5$, mert $10^{-5} = 0,00001$

Logaritmus - 2. feladat (előadás)

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

- a) $\log_8 2 = \log_8 8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ $\left(8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2\right)$
- b) $\log_6 \sqrt{2} = \log_6 16^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}$ $\left(16^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{16} = \sqrt{2}\right)$
- d) $\log_{64} \frac{1}{4} = \log_{64} 64^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$ $\left(64^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}\right)$ $4^3 = 64 \rightarrow \sqrt[3]{64} = 4$

Logaritmus - 5. feladat (előadás)

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

$$\begin{aligned} \text{a) } 2^{\log_4 9} + 9^{1+\log_3 \frac{1}{2}} + e^{-\ln 2} &= (4^{\frac{1}{2}})^{\log_4 9} + 9^1 \cdot (3^2)^{\log_3 \frac{1}{2}} + e^{-\ln 2} = 4^{\frac{1}{2} \log_4 9} + 9 \cdot 3^{2 \cdot \log_3 \frac{1}{2}} + e^{-\ln 2} = \\ &= 4^{\log_4 9} + 9 \cdot 3^{\log_3 \left(\frac{1}{2}\right)^2} + e^{\ln 2^{-1}} = 9^{\frac{1}{2}} + 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^{-1} = 3 + \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{12+9+4}{4} = \frac{23}{4} \end{aligned}$$

Logaritmus - 1. feladat (gyakorlat)

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

- a) $\lg \sqrt[3]{1000} = 1$
 $\lg \sqrt[3]{10^3} = \lg 10$
- b) $\log_2 0,25 = -2$
- c) $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = -\frac{1}{3}$
 $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 3^{-\frac{1}{3}}$
- d) $\ln \frac{1}{e^4} = -4$

2018. 10. 03. – előadás

Gyakorlás

Logaritmus - 3. feladat (előadás)

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

- a) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, mert $\frac{1}{2}^{-3} = 8$
- b) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = -\frac{3}{2}$, mert $\frac{1}{3}^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{27}$
 $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{\frac{3}{2}}$

Logaritmus - 4. feladat (előadás)

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

- a) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$, mert $8^{\frac{2}{3}} = 4$
 $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2, \quad \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$

Logaritmus - 5. feladat (előadás)

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

- c) $\sqrt{5} \cdot (8^{\log_{64} 5} + 5^{1+\log_9 5}) + \sqrt{6^{\log_6 25}} = \sqrt{5} \cdot \left(64^{\frac{1}{2} \log_{64} 5} + 3^1 \cdot 9^{\frac{1}{2} \log_9 5}\right) + \sqrt{25} = \sqrt{5} \cdot$
 $\left(64^{\log_{64} 5^{\frac{1}{2}}} + 3 \cdot 9^{\log_9 5^{\frac{1}{2}}}\right) + 5 = \sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) + 5 = 5 + 3 \cdot 5 + 5 = 5 \cdot 5 = 25$

Logaritmus - 6. feladat (előadás)

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

$$a) \sqrt[3]{7^{\log_{\sqrt{7}} 2 - \log_{49} \frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{7^{\log_{\sqrt{7}} 2}}{7^{\log_{49} \frac{1}{4}}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{7}^{2 \log_{\sqrt{7}} 2}}{\sqrt{7}^{2 \log_{49} \frac{1}{4}}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{7}^{\log_{\sqrt{7}} 2^2}}{49^{\log_{49} \frac{1}{2}}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{4 \cdot 2} = 2$$

Logaritmus - 4. feladat (gyakorlat)

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

$$a) \sqrt{25^{1 - \log_5 10}} = \sqrt{\frac{25}{25^{\log_5 10}}} = \sqrt{\frac{25}{5^{2 \log_5 10}}} = \sqrt{\frac{25}{5^{2 \cdot 2}}} = \frac{5}{5^2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Logaritmus - 6. feladat (gyakorlat)

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

$$b) 3^{1 + \log_9 4 - \log_{\frac{1}{3}} 5} = 3^{\log_9 4} \cdot 3^{-\log_{\frac{1}{3}} 5} = 3 \cdot \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(-\log_{\frac{1}{3}} 5\right)} = 3 \cdot 4^{\frac{1}{2}} \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$$

Logaritmus - 7. feladat (gyakorlat)

$q = \frac{\lg A - \lg C}{\lg 5}$ ből A -t fejezzük ki!

$$\lg 5 \cdot q + \lg C = \lg A \quad / \uparrow^{10}$$

$$10^{\lg 5 \cdot q + \lg C} = A$$

Arány és százalékszámítás - 4. feladat (előadás)

A CutIt vállalat munkagépével 24 nap alatt lehet kivágni 1 hektár őserdőt, a CutItAll cég munkagépével 16 nap alatt lehet ugyanezt a hektár ősfát kivágni. Ha ezekből 1-1 ilyen gép együtt dolgozik, hány nap alatt vágja ki az 1 hektár ősfát?

CutIt vállalat	24 nap alatt	1 hektár erdő
CutItAll vállalat	16 nap alatt	1 hektár erdő
?: együtt hány nap alatt vágják ki 1 hektár erdőt		
1. vállalat:	1 nap	$\frac{1}{24}$ hektár erdő
2. vállalat:	1 nap	$\frac{1}{16}$ hektár erdő
együtt:	1 nap	$\frac{1}{24} + \frac{1}{16}$ hektár erdő
	x nap	1 hektár erdő

egyenest arányossággal:

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{24} + \frac{1}{16}}{1} = \frac{2 + 3}{48} = \frac{5}{48}$$
$$x = \frac{48}{5} = 9,6 \text{ nap}$$

Arány és százalékszámítás - 6. feladat (előadás)

2 kőműves együttes munkával 6 nap alatt épít fel 1 falat. Hány nap alatt építenék fel a falat külön-külön, ha az egyiknek az egész munka 5 nappal tovább tart, mint a másiknak?

2 kőműves együtt	6 nap
egyik kőműves	másik kőműves + 5 nap
1. kőműves	? nap
2. kőműves	? nap

megoldás:

2 kőműves együtt	6 nap	1 fal
1. kőműves	x nap	1 fal
2. kőműves	$x + 5$ nap	1 fal
1. kőműves	1 nap	$\frac{1}{x}$ fal
2. kőműves	1 nap	$\frac{1}{x+5}$ fal
2 kőműves együtt	1 nap	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}$ fal

egyenest azonosítás:

$$\frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}}{1} = \frac{x + 5 + x}{x(x+5)}$$

$$x^2 + 5x = 12x + 30$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$(x - 10)(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 10 \quad x_2 = -3 \leftarrow \text{nem lehet}$$

10 és 15 napig dolgoznak

Arány és százalékszámítás - 2. feladat (gyakorlat)

Egy kabát árát 20%-kal csökkentették. Hány százalékkal kell emelni ennek a kabátnak az új árát, hogy újra az eredeti árat kapjuk?

x : eredeti ár

$0,8 \cdot x$: új ár

$$C \cdot 0,8 \cdot x = x \quad / : 0,8x$$

$$C = \frac{1}{0,8} = 1,25 \rightarrow 25\%$$

Arány és százalékszámítás - 4. feladat (gyakorlat)

A ló 1 hónap alatt eszik meg 1 kocsi szénát, a kecske 2 hónap alatt, a juh 3 hónap alatt. Hány hónap alatt eszik meg 1 kocsi szénát a ló, a kecske és a juh együtt?

$$\begin{array}{ccc} \text{ló} & \text{kecske} & \text{juh} \\ 1 \text{ kocsi széna} / 1 \text{ hónap} & 1 \text{ kocsi széna} / 2 \text{ hónap} & 1 \text{ kocsi széna} / 3 \text{ hónap} \\ & \frac{1}{2} \text{ kocsi széna} / 1 \text{ hónap} & \frac{1}{3} \text{ kocsi széna} / 1 \text{ hónap} \end{array}$$

x : idő (hónap)

$$1 \cdot x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 1$$

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})x = 1 \quad / : \frac{11}{6}$$

$$\frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6} \quad / : \frac{11}{6} \quad \rightarrow \quad x = \frac{11}{6}$$

Arány és százalékszámítás - 5. feladat (gyakorlat)

Fényszűrő lemezeket raknak egymás mögé. Az 1. elnyeli a ráeső fényenergia 30%-át, a 2. a ráeső fényenergia 50%-át, a 3. pedig a ráeső energia 20%-át. A 3 lemez együttesen az eredeti fénysugár energiájának hány %-t nyeli el?

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1. & & 2. & & 3. & & \\ \hline \overrightarrow{100\%} & & \overrightarrow{70\%} & & \overrightarrow{50\%} & & \overrightarrow{20\%} \\ & & & & 70\% & & 50\% \\ & & & & & & 70\% \end{array}$$

$$0,2(0,5(0,7x)) = 0,28x$$

$$1 - 0,2 \cdot 0,5 \cdot 0,7 \cdot 100\%$$

72%-t nyeli el

Arány és százalékszámítás - 7. feladat (gyakorlat)

Lola, az elefánt, ha nagyon szomjas, akkor testtömegének 84%-a víz. Itatás után 1600 kg-ot nyom, és ekkor testtömegének 85%-a víz. Hány kg-os Lola, amikor nagyon szomjas?

84% víz ? kg

85% víz 1600 kg

$$0,16x = 1600 \cdot 0,15$$

$$x = 1600 \cdot \frac{0,15}{0,16} = 1500$$

Arány és százalékszámítás - 8. feladat (gyakorlat)

100 literes tartályba 1 csapon át 10%-os oldat folyik 5 liter/perc sebességgel. 5 perc elteltével 1 másik csapot is kinyitnak, amelyből már 20%-os oldat folyik 10 liter/perc sebességgel. Hány százalékos lesz az oldat akkor, amikor a két csap feltölti a teljes tartályt?

1. 2.

10% 20%

5 l/p 10 l/p

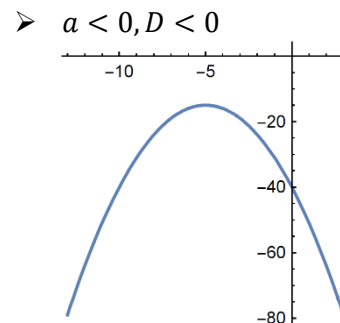
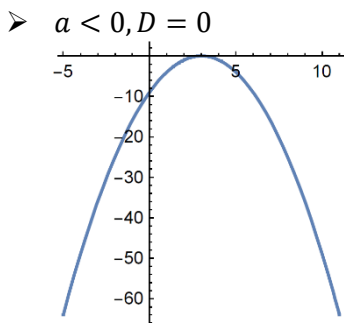
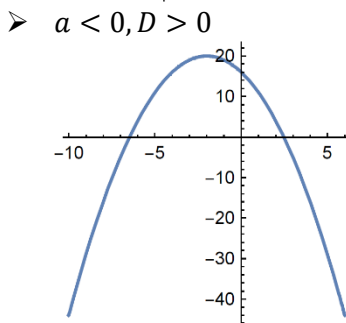
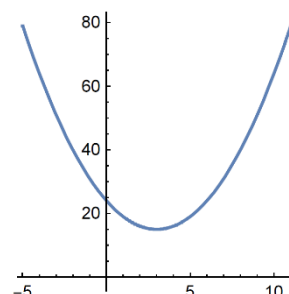
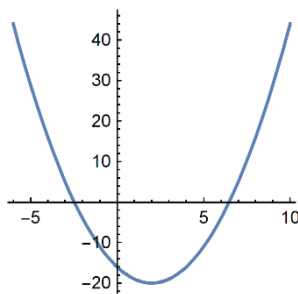
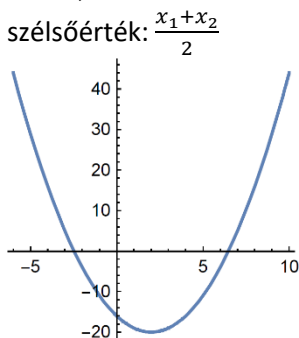
75 l = 15 l/p

5 p után: $5 \cdot 5 = \underbrace{25 \text{ l}}_{10\%} + \underbrace{25 \text{ l}}_{10\%} + \underbrace{50 \text{ l}}_{20\%}$

$\begin{matrix} 50 \text{ l } 10\% \\ 50 \text{ l } 20\% \end{matrix} \} \rightarrow 100 \text{ l } 15\%$

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek

- ❖ a : főegyüttható
- ❖ kanonikus alak: $ax^2 - bx + c = 0 \quad a \neq 0$
- ❖ gyöktényezős alak $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$
- ❖ diszkrimináns: $D = b^2 - 4ac$
 - ha $D > 0$ 2 különböző valós gyök
 - ha $D = 0$ 1 valós gyök (2 azonos valós gyök)
 - ha $D < 0$ $\emptyset$ valós gyök (2 komplex gyök)
- ❖ megoldóképlet: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- ❖ $f(x) = ax^2 - bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ függvény grafikonja:
 - $a > 0, D > 0$
 - $a > 0, D = 0$
 - $a > 0, D < 0$
 - $a < 0, D > 0$
 - $a < 0, D = 0$
 - $a < 0, D < 0$



- ❖ gyökök és együtthatók közötti összefüggések (Viète-formulák)
 - $ax^2 - bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
 - $a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$
 - $(a \neq 0)$ minden x eleme $\mathbb{R}$

$$\rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Gyakorlás

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek - 2. feladat (gyakorlat)

Határozzuk meg a b és c paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy minden x valós számra

$$(x+2)(x+b) = x^2 + cx + 6!$$

$$(x+2)(x+b) = x^2 + cx + 6 \quad b, c = ?$$

$$x^2 + (2+b)x + 2b$$

$$2b + c = 11 \rightarrow b = 3$$

$$2b = 6 \rightarrow c = 5$$

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek - 3. feladat (gyakorlat)

Határozzuk meg az alábbi függvények legnagyobb értékét!

$$a) \quad f(x) = -3x^2 + 2x - 5 = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right) = -3\left(\underbrace{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}_{=x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}} - \frac{16}{9}\right) = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}$$

$$\text{maximum: } x = \frac{1}{3} \quad y = \frac{16}{3}$$

$$b) \quad f(x) = 2x^2 - 5x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}\right) = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{17}{8}$$

$$\text{maximum: } x = \frac{5}{4} \quad y = \frac{17}{8}$$

Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek - 4. feladat (gyakorlat)

$$a) \quad x^2 - kx + (3 - k) = 0 \quad \text{milyen } k\text{-ra lesz 2 azonos megoldás?}$$

$$b^2 - 4ac = \begin{cases} D > 0: 2 \text{ különböző} \\ D = 0: 2 \text{ azonos} \\ D < 0: \nexists \text{ valós} \end{cases}$$

$$(-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - k) = 0$$

$$k^2 + 4k - 12 = 0$$

$$k_{1,2} = \begin{cases} -6 \\ 2 \end{cases}$$

$$b) \quad x^2 - (k+3)x + 4 = 0 \quad \text{milyen } k\text{-ra lesz 2 különböző megoldás?}$$

$$\left(-(k+3)\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 > 0$$

$$(k+3)^2 > 16$$

$$k+3 > 4 \vee k+3 < -4$$

$$k < -7 \text{ vagy } k > 1$$

$$c) \quad x^2 + kz - (2k - 5) = 0 \quad \text{milyen } k\text{-ra nem lesz megoldás?}$$

$$k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2k - 5) < 0$$

$$k^2 + 8k - 20 < 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-20)}}{2} = \begin{cases} -10 \\ 2 \end{cases}$$

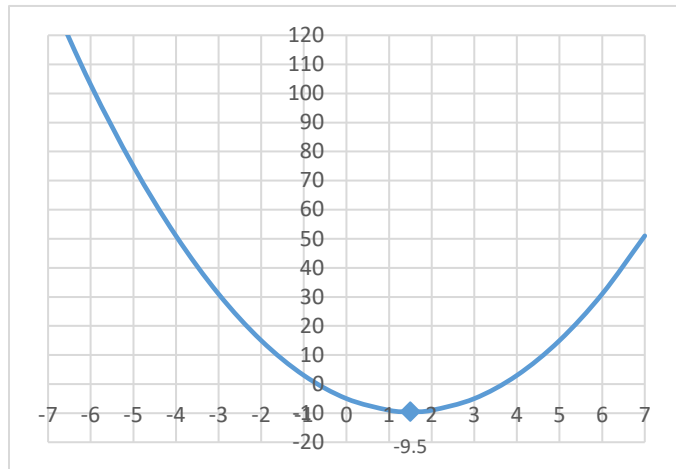
$$k \in]-10, 2[$$

$$-10 < k < 2$$

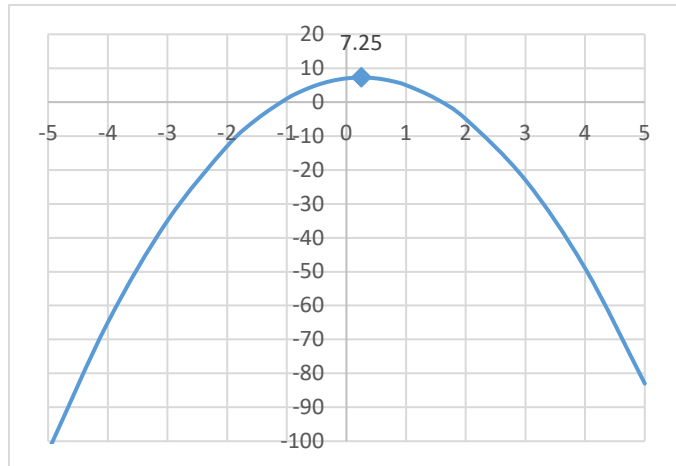
Teljes négyzetté alakítás - 1. feladat (előadás)

Határozzuk meg az alábbi függvények legnagyobb, illetve legkisebb értékét! (teljes négyzetté alakítás)

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= 2x^2 - 6x - 5 = \\
 &= 2 \cdot \left(x^2 - 3x - \frac{5}{2}\right) = \\
 &= 2 \cdot \left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{5}{2}\right) \\
 &= 2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{2} \\
 \text{minimum: } x &= \frac{3}{2} \\
 \text{értéke: } f\left(\frac{3}{2}\right) &= -\frac{19}{2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{c) } f(x) &= -4x^2 + 2x + 7 = \\
 &= -4 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\right) = \\
 &= -4 \cdot \left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{7}{4}\right) \\
 &= -4 \cdot \left(\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{29}{16}\right) \\
 &= -4 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{29}{4} \\
 \text{maximum: } x &= \frac{1}{4} \\
 \text{értéke: } f\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{29}{4}
 \end{aligned}$$



Diszkrimináns - 2. feladat (előadás)

$$\begin{aligned}
 \text{b) } x^2 - px + p + 3 &= 0 \\
 1 \text{ valós megoldás legyen, } p &= ? \\
 1 \text{ valós megoldás legyen } \rightarrow D &= 0 \\
 D = b^2 - 4ac &= (-p)^2 - 4(p + 3) = 0 \\
 a = 1, \quad b = -p, \quad c &= p + 3 \\
 p^2 - 4p + 12 &= 0 \\
 p_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} p_1 = 6 \\ p_2 = -2 \end{cases} \\
 \text{vagy } (p - 6)(p + 2) &= 0 \rightarrow p_1 = -2 \text{ és } p_2 = 6 \\
 1 \text{ valós megoldása lesz } p &= 6 \text{ esetén}
 \end{aligned}$$

Diszkrimináns - 3. feladat (előadás)

a) $x^2 + px - p - 2 = 0$

ne legyen valós megoldás, $p = ?$

kell: $D < 0$

$$D = p^2 - 4(-p - 2) = p^2 + 4p + 8 = (p + 2)^2 + 4 > 0$$

nem adható meg olyan p , melyre $\emptyset$ valós megoldás

Diszkrimináns - 4. feladat (előadás)

a) $x^2 - (p + 3)x - 3p + 7 = 0$

2 kül. valós megoldás legyen, $p = ?$

kell: $D > 0$

$$D = (p + 3)^2 - 4(-3p + 7) =$$

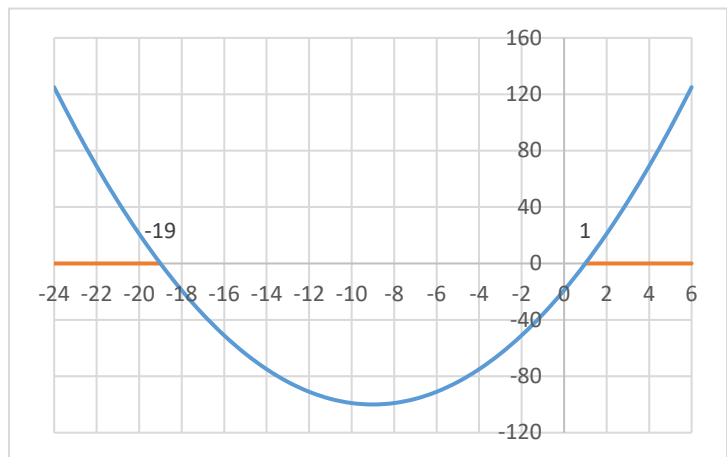
$$= p^2 + 6p + 9 + 12p - 28 =$$

$$= p^2 + 18p - 19 > 0$$

$$(p + 19)(p - 1) > 0 \rightarrow$$

$\rightarrow$ gyökei: $p_1 = -19$ és $p_2 = 1$

megoldás: $D > 0$ ha $p < -19$ vagy $p > 1$



Törtös egyenlőtlenségek - 6. feladat (előadás)

a) $\frac{x-6}{2x+4} > 1$

alakítsuk 0-ra, hozzuk közös nevezőre: $\frac{x-6}{2x+4} - 1 > 0 \rightarrow \frac{x-6-(2x+4)}{2x+4} > 0 \leftrightarrow \frac{-x-10}{2x+4} > 0 \leftrightarrow \frac{x+10}{2x+4} < 0$

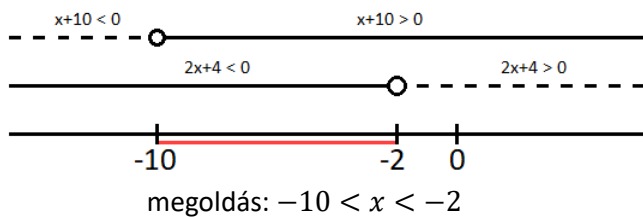
(negatív számmal szorozva az

egyenlőtlenség iránya megfordul)

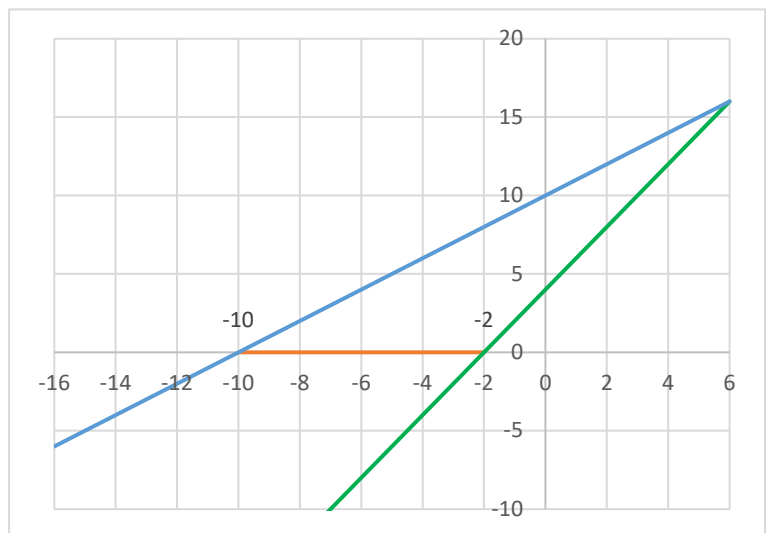
tört $< 0 \leftrightarrow$ a számláló és a nevező

különböző előjelű

$$\begin{pmatrix} x + 10 = 0 \rightarrow x = -10 \\ 2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2 \end{pmatrix}$$



megoldás: $-10 < x < -2$



Tört egyenlőtlenségek - 7. feladat (előadás)

a) $x - 6 + \frac{3}{x-2} \geq 0$

közös nevezőre hozva: $\frac{(x-6)(x-2)+3}{x-2} \geq 0$
 $\frac{x^2-8x+15}{x-2} \geq 0$
 $\frac{(x-3)(x-5)}{x-2} \geq 0$

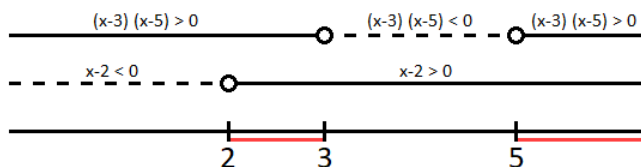
$x \rightarrow (x-3)(x-5) \rightarrow$

$\rightarrow$ gyökei: $x_1 = -3$ és $x_2 = -5$

tört $\geq 0 \leftrightarrow$ a számláló és a nevező azonos

előjelű vagy számláló = 0 ($\frac{\oplus}{\oplus}, \frac{\ominus}{\ominus}$)

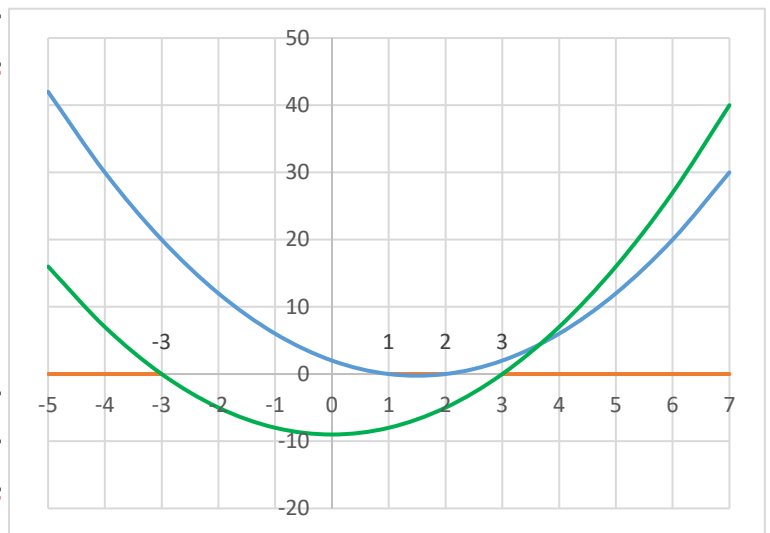
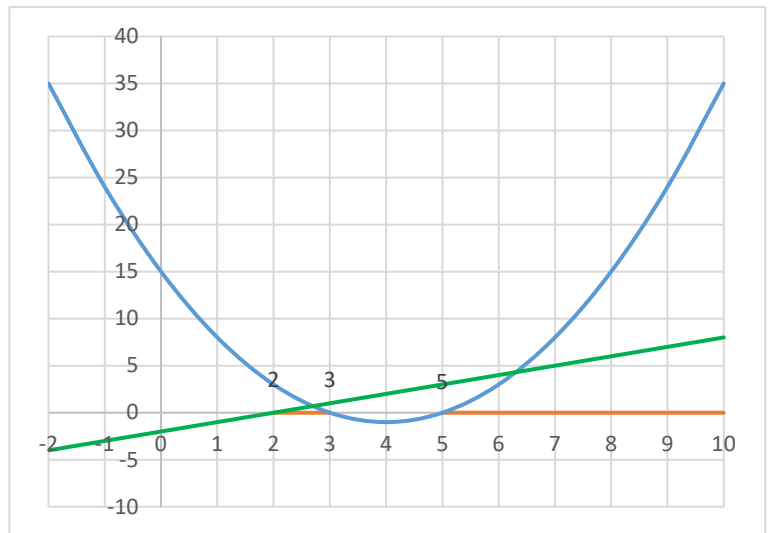
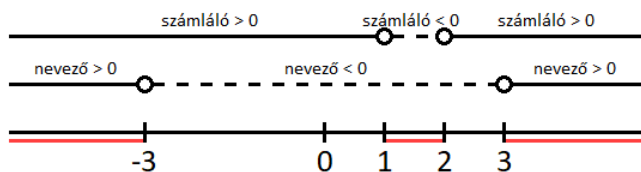
megoldás: $D \geq 0$, ha $2 < x \leq 3$ vagy $x \geq 5$



c) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-9} \geq 0$
 $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+3)} \geq 0$

megoldás: $x \leq -3$ vagy $1 \leq x \leq 2$

vagy $x > 3$



Gyakorlás

Gyökök és együtthatók összefüggése — 5. feladat (előadás)

$$px^2 - 2x + p + 1 = 0 \quad p \neq 0$$

$$\text{gyökök: } x_1, x_2 \quad p = ?$$

a) $x_1 + x_2 = 2$

$$a = p \quad b = -2 \quad c = p + 1$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2}{p} = 2 \rightarrow p = 1$$

b) $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{p+1}{p} = 3$

$$\rightarrow p + 1 = 3p \rightarrow p = 0,5$$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = \frac{2}{p+1} = -2 \rightarrow 2 = -2p - 2$$

$$\rightarrow 2p = -4 \rightarrow p = -2$$

d) $x_1^2 + x_2^2 = 4$

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$$

$$\rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \left(\frac{2}{p}\right)^2 - 2\frac{p+1}{p}$$

$$\rightarrow 4 - 2p(p+1) = 4p^2$$

$$4 - 2p^2 - 2p = 4p^2$$

$$6p^2 + 2p - 4 = 0$$

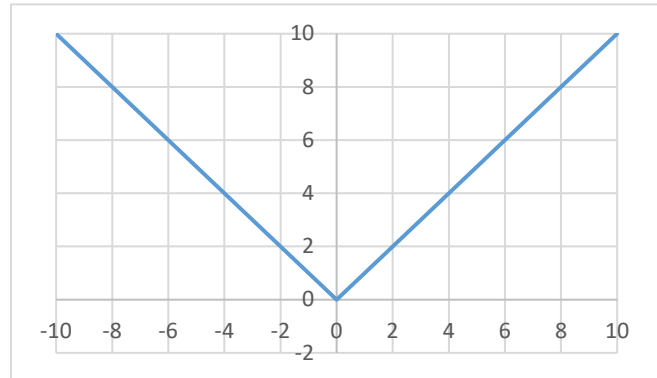
$$3p^2 + p - 2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} = \begin{cases} p_1 = -1 \\ p_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Abszolút értékes és gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek

Abszolútérték függvény

- ❖ $|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$
- ❖ $f(x) = |x|$
- ❖ $D_f = \mathbb{R} \quad R_f = [0, \infty)$
- ❖ szigorúan monoton csökken: $(-\infty, 0]$
szigorúan monoton növekszik: $[0, \infty)$
- ❖ szélsőérték: minimum: $f(0) = 0$



Gyakorlás

Abszolútértékes egyenletek - 1. feladat (előadás)

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x + 2|x - 3| = 9$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{ha } x - 3 \geq 0, \text{ azaz } x \geq 3 \\ -(x - 3), & \text{ha } x - 3 < 0, \text{ azaz } x < 3 \end{cases}$$

1. eset:

$$x \geq 3:$$

$$x + 2(x - 3) = 9$$

$$3x - 6 = 9$$

$$3x = 15$$

$$x = 5 \quad \text{jó, mert } x > 3$$

2. eset

$$x < 3$$

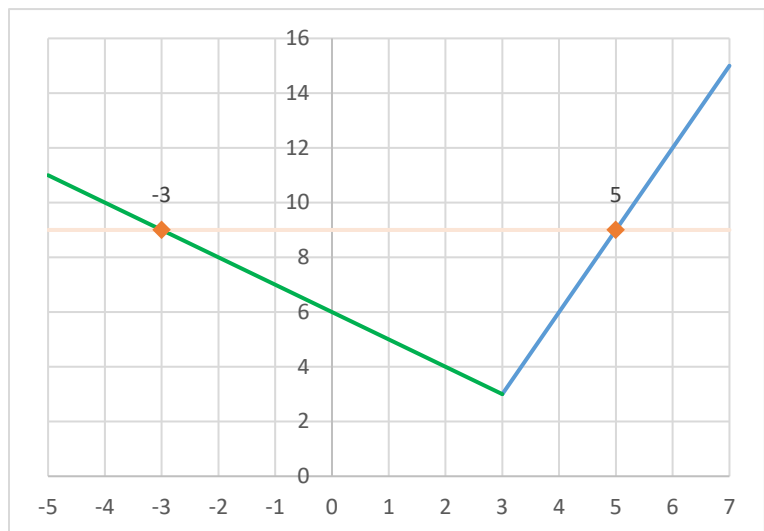
$$x - 2(x - 3) = 9$$

$$-x + 6 = 9$$

$$-x = 3$$

$$x = -3 \quad \text{jó, mert } x < 3$$

megoldás: $x_1 = 5$ és $x_2 = -3$



b) $|x^2 - 2x| = 1$

$$|x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{ha } x^2 - 2x \geq 0, \text{ azaz } x \leq 0 \text{ vagy } x \geq 2 \\ -(x^2 - 2x), & \text{ha } x^2 - 2x < 0, \text{ azaz } 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 - 2x = x(x - 2) = 0, \text{ ha } x_1 = 0, x_2 = 2$$

1. eset:

$$x \leq 0 \text{ vagy } x \geq 2$$

$$x^2 - 2x = 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

jó, mert $1 - \sqrt{2} < 0$ és $1 + \sqrt{2} > 2$

2. eset:

$$0 < x < 2$$

$$-(x^2 - 2x) = 1$$

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

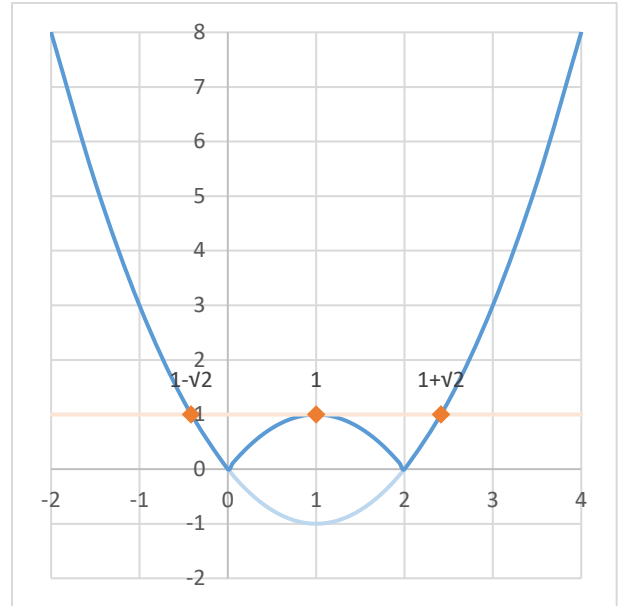
$$x = 1$$

jó, mert $0 < 1 < 2$

megoldás: $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1, x_3 = 1 + \sqrt{2}$

grafikusan: $x \mapsto |x^2 - 2x|$

az $f(x) = x^2 - 2x$ függvény szélsőértéke $f(1) = -1 \rightarrow |1^2 - 2 \cdot 1| = 1$



c) $x^2 - 7|x| - 8 = 0$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

1. eset:

$$x \geq 0$$

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$(x - 8)(x + 1) = 0$$

$$\rightarrow x = 8 \text{ vagy } x = -1$$

de $x \geq 0$ miatt $x = -1$ nem lehet

2. eset:

$$x < 0$$

$$x^2 - 7(-x) - 8 = 0$$

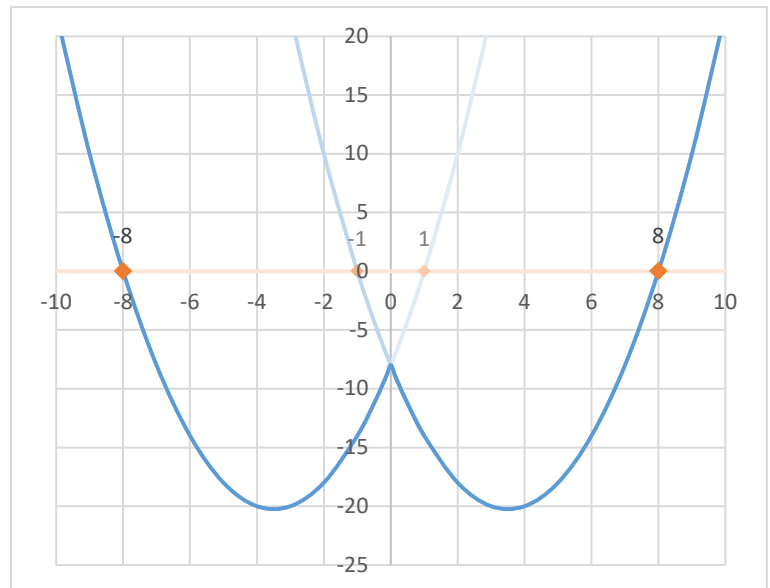
$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$(x + 8)(x - 1) = 0$$

$$\rightarrow x = -8 \text{ vagy } x = 1$$

de $x < 0$ miatt $x = 1$ nem lehet

megoldás: $x_1 = 8$ és $x_2 = -8$



f) $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 10$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$|x+3| + |x-4| = 10$

$|x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{ha } x+3 \geq 0, \text{ azaz } x \geq -3 \\ -(x+3), & \text{ha } x+3 < 0, \text{ azaz } x < -3 \end{cases}$

$|x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{ha } x-4 \geq 0, \text{ azaz } x \geq 4 \\ -(x-4), & \text{ha } x-4 < 0, \text{ azaz } x < 4 \end{cases}$

1. eset:

$x < -3$

$-(x+3) - (x-4) = 10$

$-x-3-x+4 = 10$

$-2x+1 = 10$

$x = -4,5$ jó, mert $-4,5 < -3$

2. eset:

$-3 \leq x < 4$

$(x+3) - (x-4) = 10$

$x+3-x+4 = 10$

$7 = 10$ ellentmondás

3. eset:

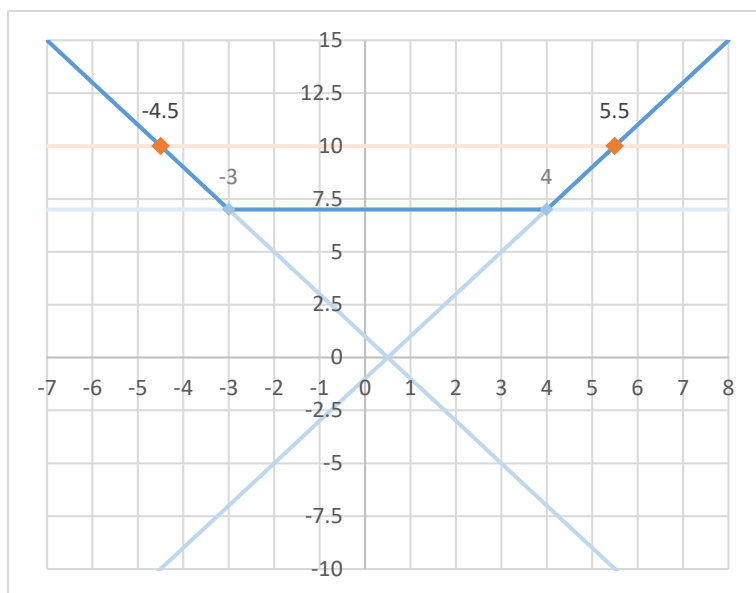
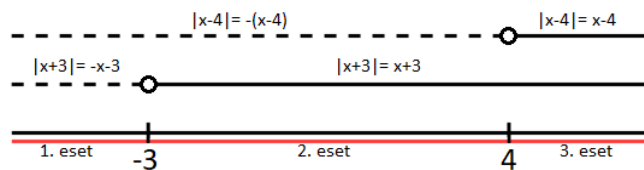
$x \geq 4$

$(x+3) + (x-4) = 10$

$2x-1 = 10$

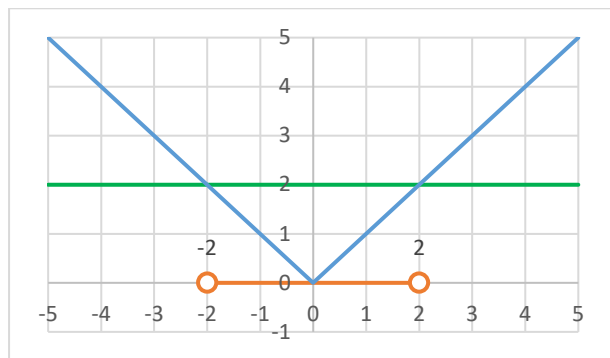
$x = 5,5$ jó, mert $5,5 \geq 4$

megoldás: $x_1 = -\frac{9}{2}$ és $x_2 = \frac{11}{2}$

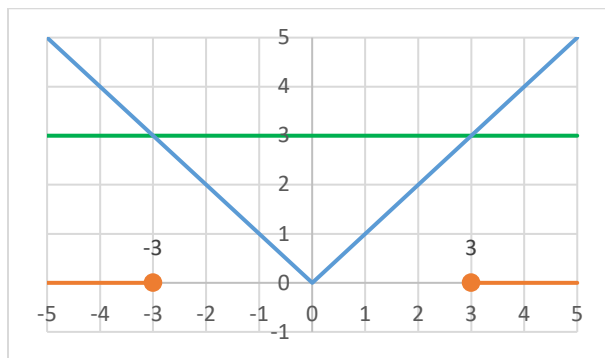


Abszolút értékes egyenlőtlenségek

❖ $|x| < 2$



❖ $|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ vagy } x \geq 3$



Gyakorlás

Abszolút értékes egyenlőtlenségek - 2. feladat (előadás)

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $|2x - 1| < 4$

$$-4 < 2x - 1 < 4$$

$$-3 < 2x < 5$$

$$-\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$$

b) $\sqrt{x^2 - 8x + 6} \geq 3$

$$\sqrt{(x - 4)^2} \geq 3$$

$$|x - 4| \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x - 4 \leq -3 \text{ vagy } x - 4 \geq 3$$

$$x \leq 1 \text{ vagy } x \geq 7$$

d) $|x - 3| \geq 1 - 2x$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{ha } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3), & \text{ha } x - 3 < 0 \end{cases}$$

1. eset:

$$x \geq 3$$

$$x - 3 \geq 1 - 2x$$

$$3x \geq 4$$

$$x \geq \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow \text{tehát: } x \geq 3$$

2. eset:

$$x < 3$$

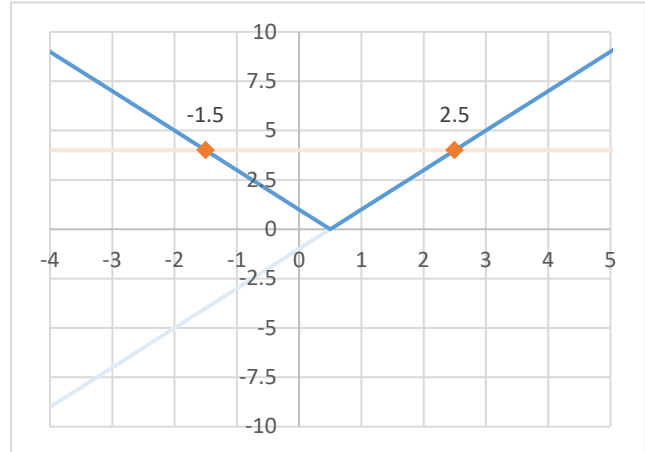
$$-(x - 3) \geq 1 - 2x$$

$$-x + 3 \geq 1 - 2x$$

$$x \geq -2$$

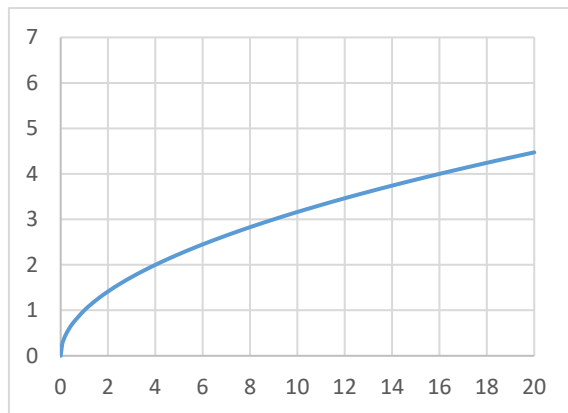
$$\rightarrow \text{tehát: } -2 \leq x < 3$$

$$\text{megoldás: } x \geq -2$$



Gyökös egyenletek és egyenlőtlenségek

- ❖ $f(x) = \sqrt{x}$
- ❖ $D_f = [0, \infty)$ $R_f = [0, \infty)$
- ❖ szigorúan monoton nő
- ❖ szélsőérték: minimum: $f(x) = 0$



Gyakorlás

Gyökös egyenletek - 3. feladat (előadás)

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{\frac{2}{3}x - 5x} - \sqrt{3x + \frac{1}{2}} = 0$

kikötés: $\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} - 5x \geq 0 \\ 3x + \frac{1}{2} \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \frac{2}{3} \geq 5x \\ 3x \geq -\frac{1}{2} \end{array}$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{15}$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{2}{3} - 5x} = \sqrt{3x + \frac{1}{2}} \quad \uparrow^2$$

$$\frac{2}{3} - 5x = 3x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = 8x$$

$$\frac{4-3}{6} = 8x$$

$$x = \frac{1}{48} \quad \text{jó, hisz eleget tesz a kikötésnek}$$

b) $\sqrt{x+2} + \sqrt{1-3x} = 0$

kikötés: $\left. \begin{array}{l} x+2 \geq 0 \\ 1-3x \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq -2 \\ x \leq \frac{1}{3} \end{array} \right\} \rightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{3}$

mivel: $\sqrt{x+2} \geq 0$ és $\sqrt{1-3x} \geq 0$, ezért az összegük csak úgy lehet 0, ha mind 2 kifejezés értéke 0, azaz $x+2=0$ és $1-3x=0$, azaz $x=-2$ és $x=\frac{1}{3}$, ami ellentmondás $\rightarrow \emptyset$ megoldás

c) $\sqrt{10-x} = x-10$

kikötés: $10-x \geq 0$, azaz $x \leq 10$

mivel $\sqrt{10-x} \geq 0$ ezért $x-10 \geq 0$, így $x \geq 10$

tehát $x \geq 10$ és $x \leq 10 \rightarrow$ megoldás: $x = 10$

Gyakorlás

Gyökös egyenletek - 3. feladat (előadás)

d) $\sqrt{4x-7} = 1-x$

kikötés: $4x-7 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{7}{4}$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

baloldal: $\sqrt{4x-7} \geq 0 \rightarrow 1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$

tehát: $x > \frac{7}{4}$ és $x \leq 1$ ellentmondás $\rightarrow$ nincs megoldás a valós számok halmazán

vagy: négyzetre emeléssel

f) $\sqrt{2-x} - \sqrt{x+7} = -3$

kikötés: $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -7 \end{cases} \rightarrow -7 \leq x \leq 2$

$$\sqrt{2-x} - \sqrt{x+7} = -3$$

baloldal: $\sqrt{2-x} \geq 0 \rightarrow \sqrt{x+7} - 3 \geq 0 \rightarrow \sqrt{x+7} \geq 3 \rightarrow x+7 \geq 9 \rightarrow x \geq 2$

tehát: $-7 \leq x \leq 2$ és $x \geq 2$

feltételekből csak $x = 2$ jöhet szóba, ami megoldás

g) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x+4}$

kikötés: $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \rightarrow x \geq 4$

négyzetre emelve:

$$x-4 + 2\sqrt{(x-4)(x-1)} + x-1 = x+4$$

$$2\sqrt{(x-4)(x-1)} = 9-x$$

ismét négyzetre emelve:

$$4(x-4)(x-1) = x^2 - 18x + 81$$

$$4x^2 - 20x + 16 = x^2 - 18x + 81$$

$$3x^2 - 2x - 65 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 65}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 28}{6} = \begin{cases} 5 \\ -\frac{13}{3} \end{cases}$$

tehát: $x_1 = 5$ és $x_2 = -\frac{13}{3}$, de a kikötés miatt $x_2 = -\frac{13}{3}$ nem lehet $\rightarrow$ megoldás: $x = 5$

j) $\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x+1}{x-2}$

kikötés: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1}-1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

legyen $a = \sqrt{x+1} \geq 0$ ekkor az egyenlet:

$$\frac{a+2}{a-1} = \frac{a^2}{a^2-3} \rightarrow (a+2)(a^2-3) = a^2(a-1)$$

$$x^3 + 2a^2 - 3a - 6 = a^3 - a^2$$

$$3a^2 - 3a - 6 = 0$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

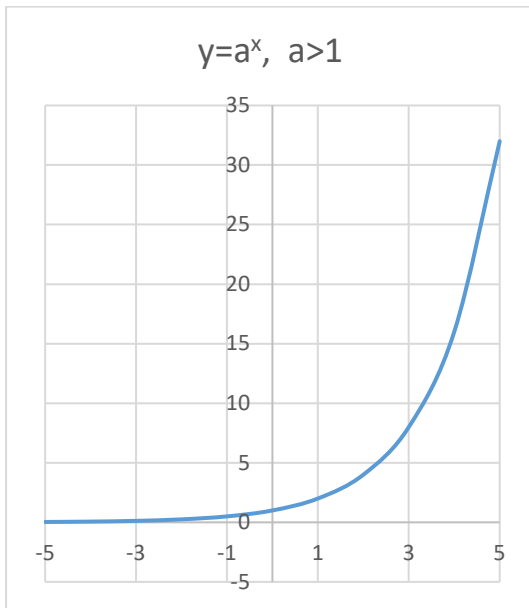
$$(a-2)(a+1) = 0$$

$a_1 = 2$, $a_2 = -1$, de $a \geq 0$ miatt az a_2 nem lehet

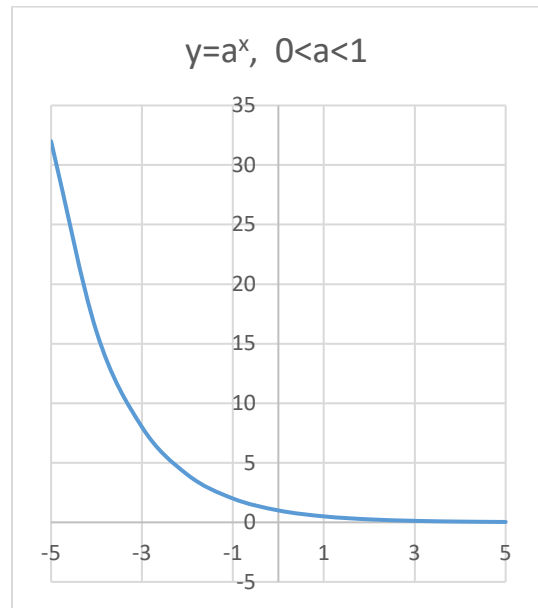
$\rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \rightarrow x+1 = 4 \rightarrow$ megoldás: $x = 3$

Exponenciális és logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek

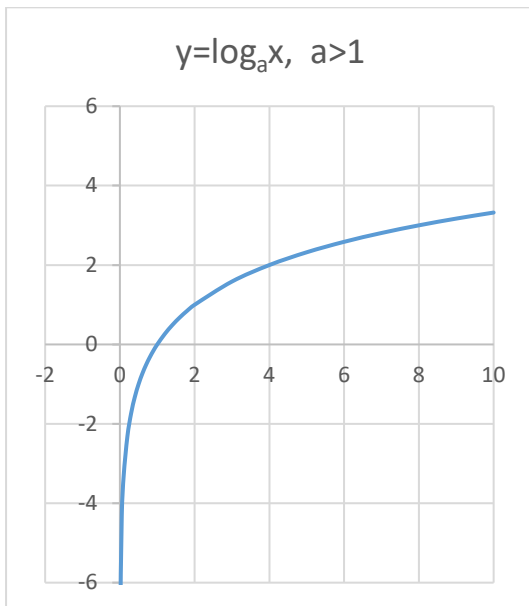
Exponenciális függvények



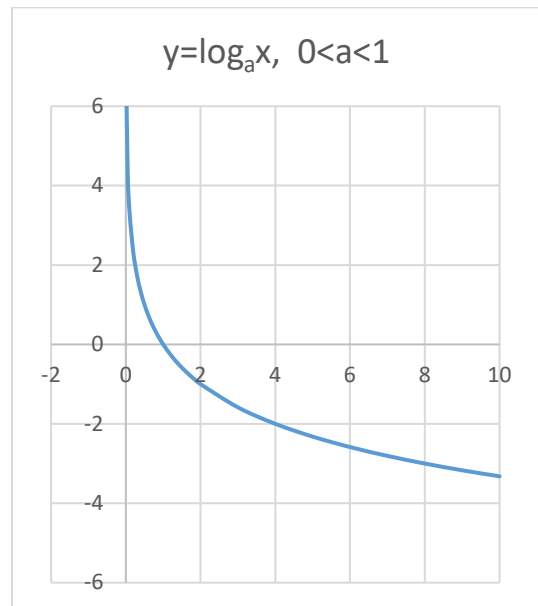
- ❖ szigorúan monoton nő
- ❖ érték tartomány: $\mathbb{R}$
- ❖ értékkészlet: $\mathbb{R}^+$



- ❖ szigorúan monoton csökken
- ❖ érték tartomány: $\mathbb{R}$
- ❖ értékkészlet: $\mathbb{R}^+$

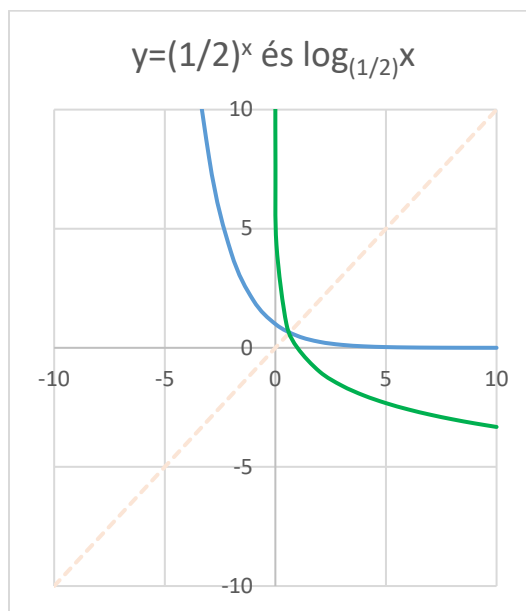
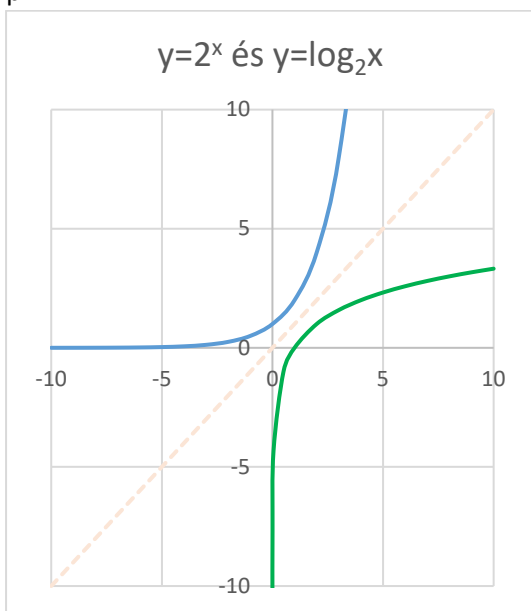


- ❖ szigorúan monoton nő
- ❖ érték tartomány: $\mathbb{R}^+$
- ❖ értékkészlet: $\mathbb{R}$



- ❖ szigorúan monoton csökken
- ❖ érték tartomány: $\mathbb{R}^+$
- ❖ értékkészlet: $\mathbb{R}$

❖ pl.:



Gyakorlás

Exponenciális egyenletek - 4. feladat (előadás)

b) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39$

$$\frac{1}{3}3^x + 3^x + 3 \cdot 3^x = 39$$

$$3^x \left(\frac{1}{3} + 1 + 3 \right) = 39$$

$$3^x \cdot \frac{13}{3} = 39$$

$$3^x = 9 = 3^2$$

az exponenciális függvény szigorú monotonitás miatt a megoldás $x = 2$

c) $2^x + 38 \cdot 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+2}$

$$2^x(1 + 38 \cdot 2 + 4) = 3^x(1 + 6 + 9)$$

$$2^x \cdot 81 = 3^x \cdot 16$$

$$2^x \cdot 3^4 = 3^x \cdot 2^4 \quad /: (3^4 \cdot 3^x)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

az exponenciális függvény miatt $x = 4$

f) $\left(\frac{25}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{125}\right)^{3x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-x}$

$$\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\right)^{3x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-x}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-3(3x-1)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-x} \rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{4-3(3x-1)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1-x}$$

$$\rightarrow 4 - 9x + 3 = 1 - x$$

$$6 = 8x \rightarrow x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$g) \quad 2^{3x+4} \cdot \frac{8^{2x-1}}{\sqrt{16^{x+1}}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{2-x}$$

$$2^{3x+4} \cdot \frac{(2^3)^{2x-1}}{(2^2)^{x+1}} = (2^{-6})^{2-x}$$

$$2^{3x+4} \cdot 2^{3(2x-1)} \cdot 2^{-2(x+1)} = 2^{-6(2-x)}$$

$$2^{7x-1} = 2^{6x-12}$$

→ az exponenciális függvény monotonitása miatt

$$7x - 1 = 6x - 12$$

$$\text{megoldás: } x = -11$$

$$h) \quad 5^x = 5^{-x} + \frac{24}{5}$$

$$\text{legyen } a = 5^x > 0 \rightarrow$$

$$a = \frac{1}{a} + \frac{24}{5} \quad / \cdot 5a$$

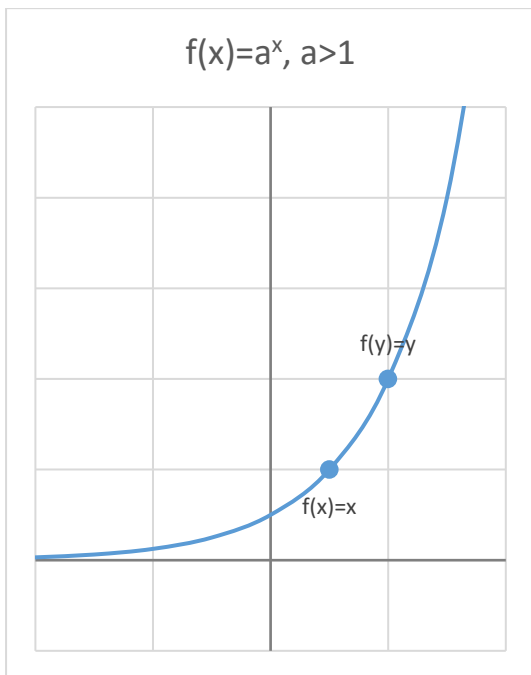
$$5a^2 = 5 + 24a$$

$$5a^2 - 24a - 5 = 0$$

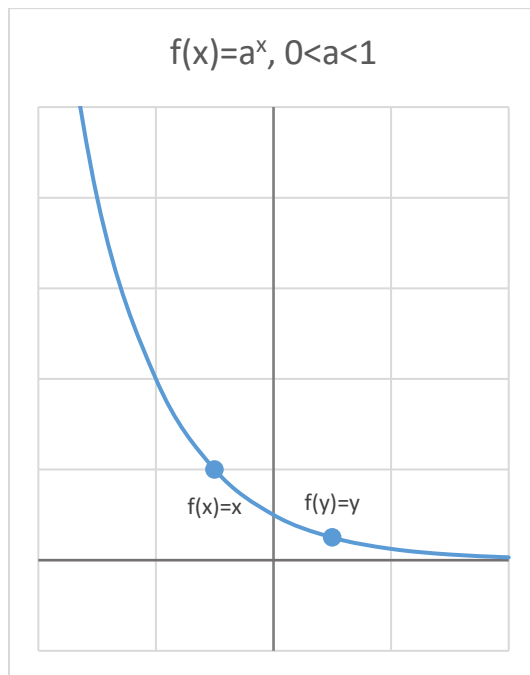
$$a_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \frac{24 \pm 26}{10} = \begin{cases} 5 \\ -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$a_1 = 5, a_2 = -\frac{1}{5}, \text{ de } a_2 \text{ nem lehet } a > 0 \text{ miatt } \rightarrow 5^x = 5 \rightarrow \text{megoldás: } x = 1$$

Exponenciális egyenlőtlenségek



❖ ha $a > 1$, akkor $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$



❖ ha $0 < a < 1$, akkor $x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$

Gyakorlás

Exponenciális egyenlőtlenségek - 5. feladat (előadás)

b) $4^{3-|x|} < 32$

$$2^{2(3-|x|)} < 2^5$$

mivel a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ezért az egyenlőtlenség iránya megmarad

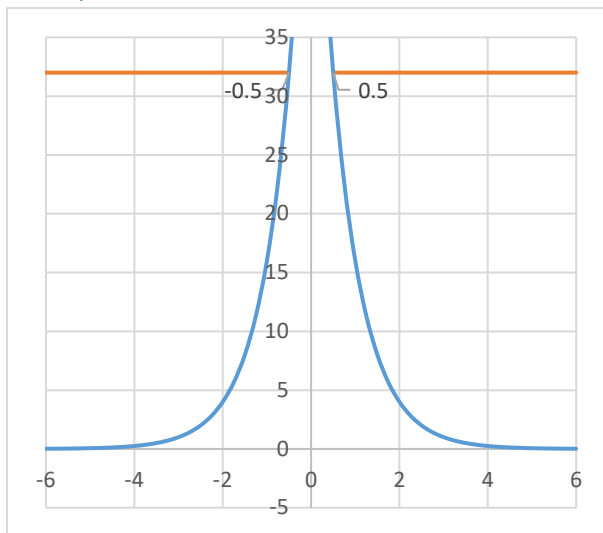
$$2(3 - |x|) < 5$$

$$6 - 2|x| < 5$$

$$1 < 2|x|$$

$$\frac{1}{2} < |x|$$

$$\text{megoldás: } x < -\frac{1}{2} \text{ vagy } x > \frac{1}{2}$$



d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-17} > \frac{1}{27}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-17} > \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

mivel az $\frac{1}{3}$ alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökken, ezért az egyenlőtlenség iránya megfordul

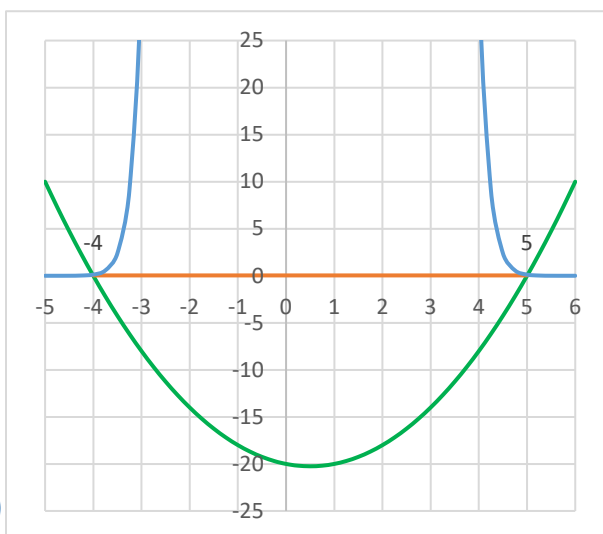
$x^2 - x - 17 < 3$

$$x^2 - x - 20 < 0$$

$$(x - 5)(x + 4) < 0$$

$$\text{gyökök: } x_1 = 5, x_2 = -4$$

$$\text{megoldás: } -4 < x < 5$$



Logaritmusos egyenletek – 6. feladat (előadás)

c) $\lg \sqrt{x-5} + \lg \sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30$

kikötés: a logaritmus argumentuma pozitív, azaz

$$\begin{cases} x - 5 > 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow x > 5$$

$$\lg \sqrt{(x-5)(2x-3)} = \lg 30 - \lg 10 = \lg \frac{30}{10} = \lg 3$$

logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt:

$$\sqrt{(x-5)(2x-3)} = 3$$

$$(x-5)(2x-3) = 9$$

$$2x^2 - 13x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{13 \pm 11}{4} = \left\{ \frac{1}{2}, 6 \right\}$$

mivel $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 6$, de $x_1 = \frac{1}{2}$ nem lehet $x > 5$ miatt $\rightarrow$ megoldás: $x = 6$

j) $\log_{x+1}(2x^2 + 1) = 2$

kikötés: $\left. \begin{matrix} 2x^2+1>0 \\ x+1>0 \\ x+1\neq 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow x > -1 \text{ és } x \neq 0$

logaritmus definíciója alapján:

$$(x+1)^2 = 2x^2 + 1$$

$$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 1$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$x_1 = 0, x_2 = 2$, de $x_1 = 0$ nem lehet a kikötés miatt $\rightarrow$ megoldás: $x = 2$

k) $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$

kikötés: értelmezési tartomány vizsgálata most bonyolult, ezzel nem foglalkozunk, de a végén ellenőrizzük

A $\log_2$ definíciója miatt: $\log_3(\log_4 x) = 2^0 = 1$

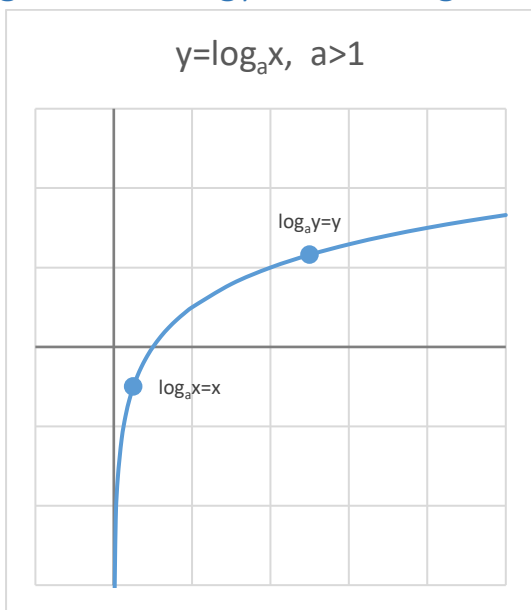
A $\log_3$ definíciója miatt: $\log_4 x = 3^1 = 3$

A $\log_4$ definíciója miatt: $x = 4^3 = 64$

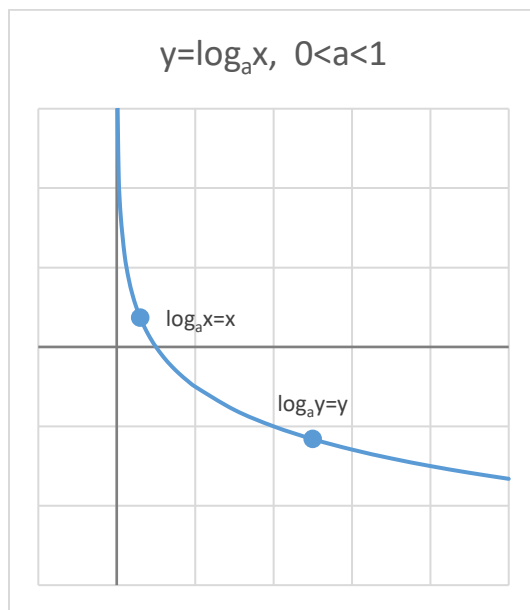
ellenőrzés: $\log_2(\log_3(\log_4 64)) = \log_2(\log_3 3) = \log_2 1 = 0$

megoldás: $x = 64$

Logaritmusos egyenlőtlenségek



- ❖ ha $a > 1$, akkor
 $0 < x < y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y$



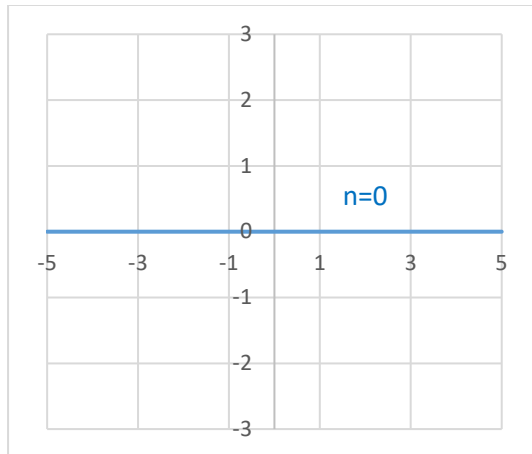
- ❖ ha $0 < a < 1$, akkor
 $x < y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$

Függvények tulajdonságai, ábrázolásuk

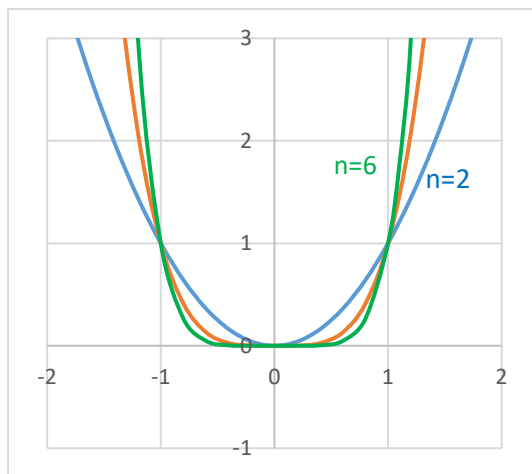
Elemi függvények

Hatványfüggvények

- ❖ $f(x) = x^n$
- ❖ $n = 0 \quad f(x) = 1$

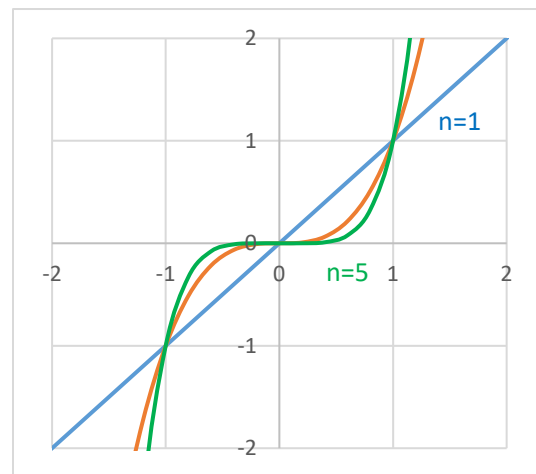


- ❖ $D_f = R_f$
- ❖ $R_f = \{1\}$
- ❖ $n = 2, 4, 6$



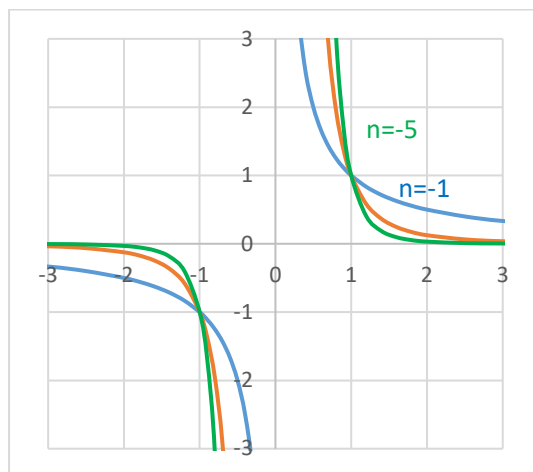
- ❖ páros függvények
- ❖ páros függvény: $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D_f$
- ❖ páratlan függvény: $f(x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$

- ❖ $n = 1, 3, 5$



- ❖ páratlan függvények
- grafikonja tükrös az y tengelye
- grafikonja tükrös az origóra

❖ $n = -1, -3, -5$



❖ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

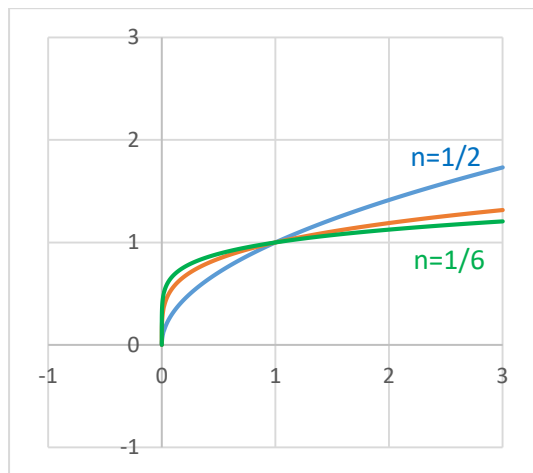
❖ $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

❖ $n = -3 \rightarrow f(x) = \frac{1}{x^3}$

❖ $n = -1 \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$

❖ páratlan függvények

❖ $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$



❖ $n = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = \sqrt{x}$

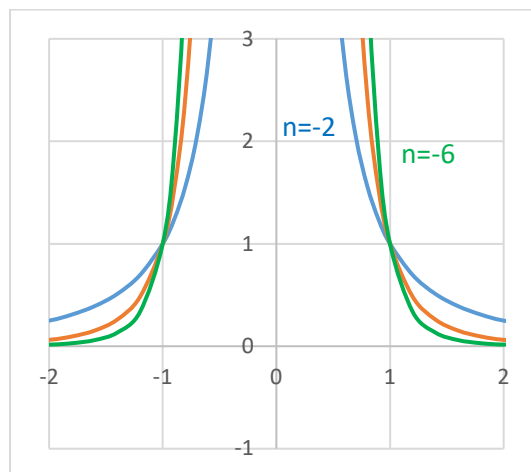
❖ $n = \frac{1}{4} \rightarrow f(x) = \sqrt[4]{x}$

❖ $D_f = \mathbb{R}_0^+$

❖ $R_f = \mathbb{R}_0^+$

❖ páratlan függvények

❖ $n = -2, -4, -6$



❖ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

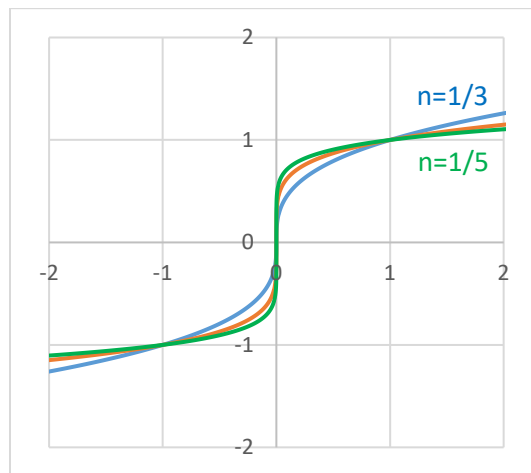
❖ $R_f = \mathbb{R}^+$

❖ $n = -2 \rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}$

❖ $n = -4 \rightarrow f(x) = \frac{1}{x^4}$

❖ páros függvények

❖ $n = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$



❖ $n = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = \sqrt{x}$

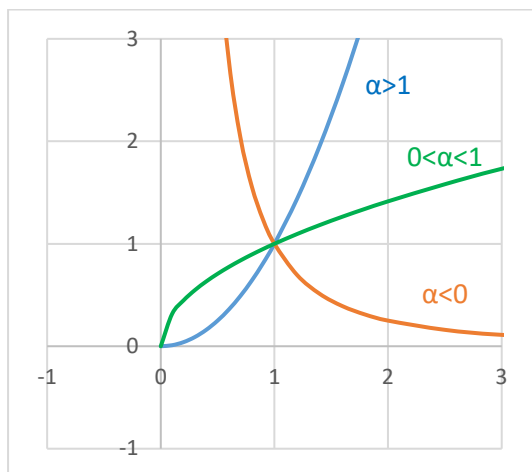
❖ $n = \frac{1}{4} \rightarrow f(x) = \sqrt[4]{x}$

❖ $D_f = \mathbb{R}$

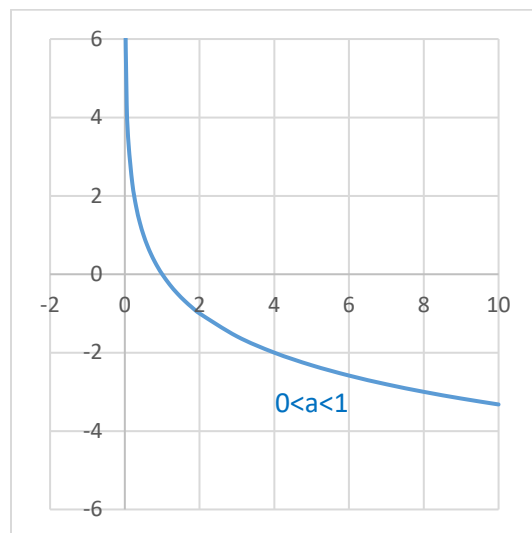
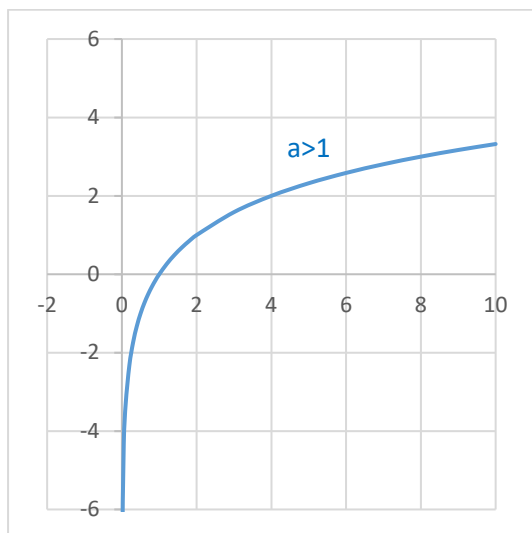
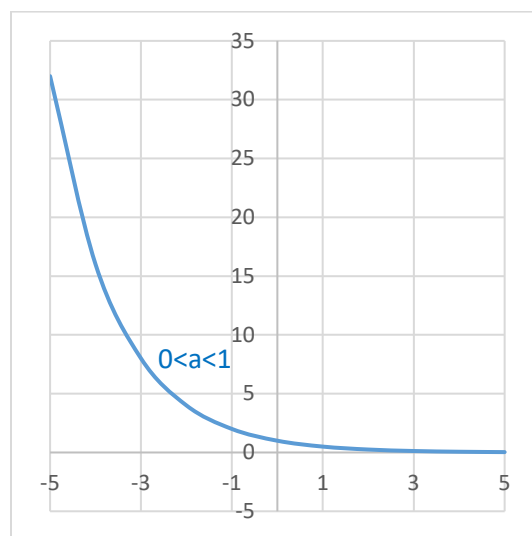
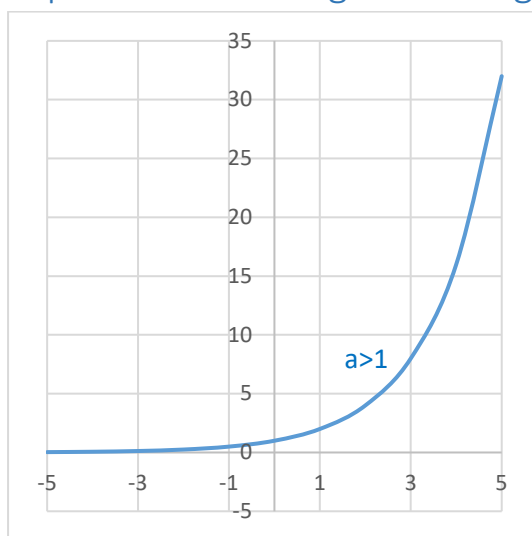
❖ $R_f = \mathbb{R}$

❖ páratlan függvények

❖ $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

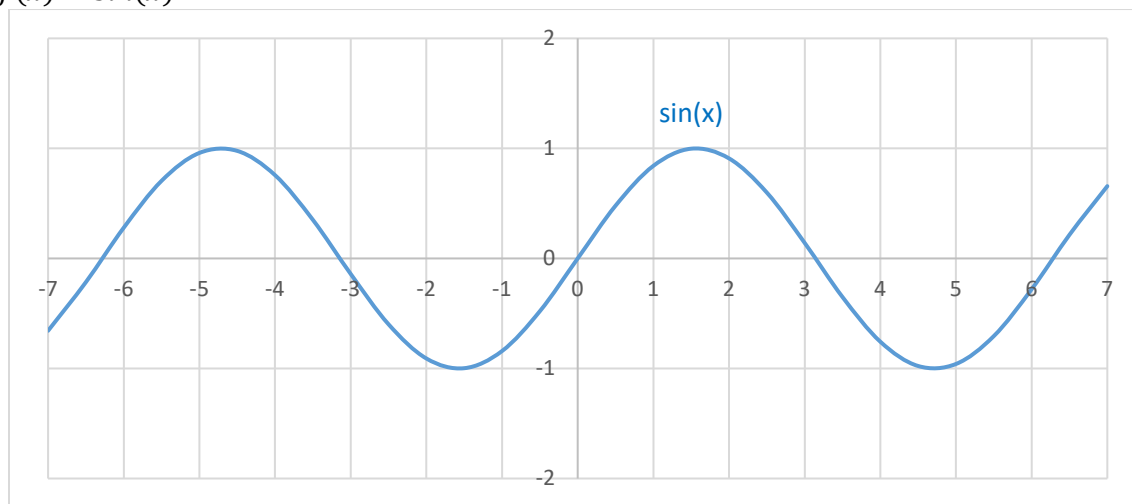


Exponenciális és logaritmusfüggvények

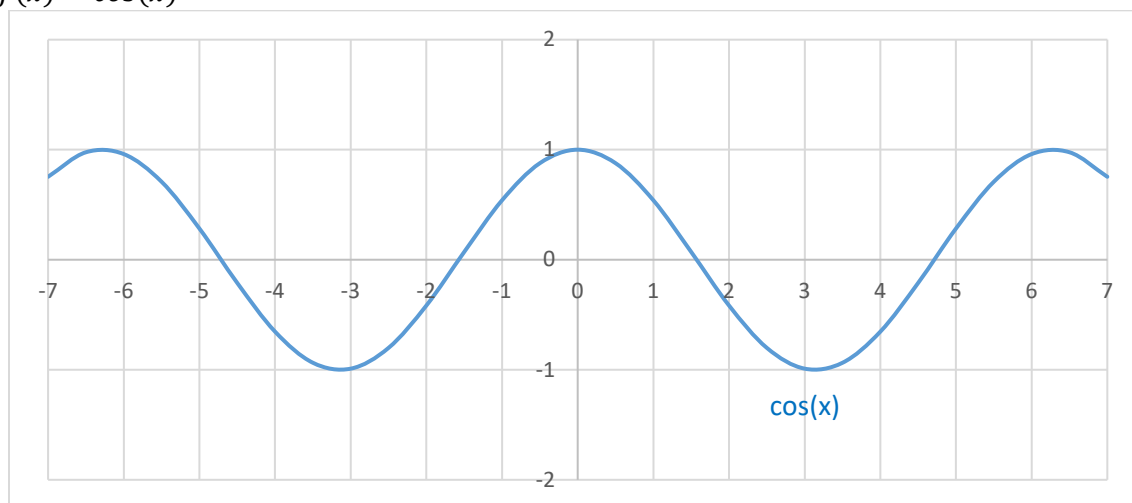


Trigonometrikus függvények

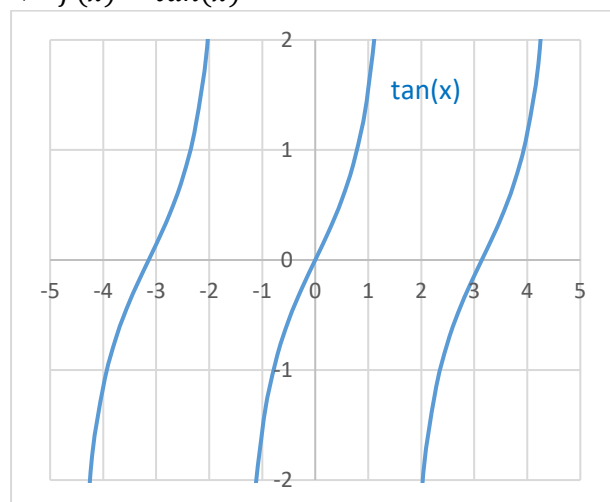
❖ $f(x) = \sin(x)$



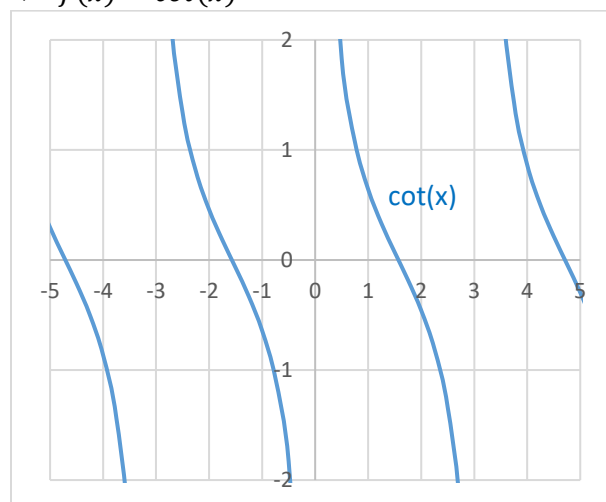
❖ $f(x) = \cos(x)$



❖ $f(x) = \tan(x)$



❖ $f(x) = \cot(x)$



Inverz függvény

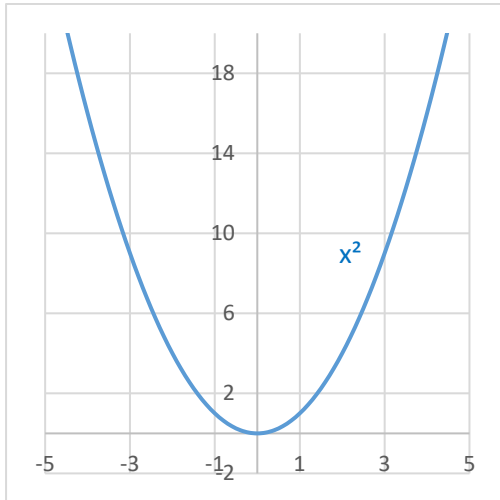
❖ adott: 2 inverzes halmaz, A és $B \rightarrow f$ hozzárendelés: ha A halmaz minden eleméhez hozzárendelt a B egyetlen eleme

❖ például:

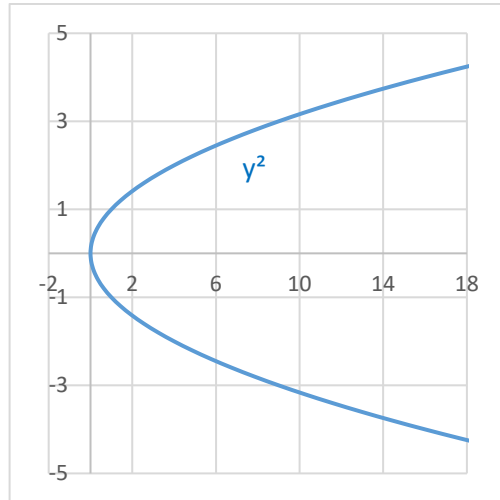
	f	f^{-1} (fordított hozzárendelés)	
nem függvény			
nem függvény			
függvény			nem függvény
függvény			nem függvény
függvény			függvény

❖ például:

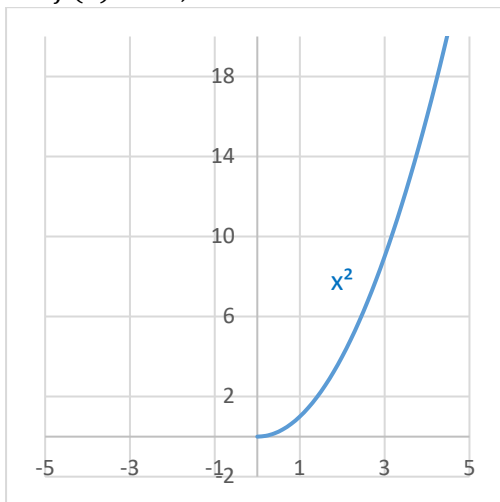
➤ $f(x) = x^2$ vagy $y = x^2$



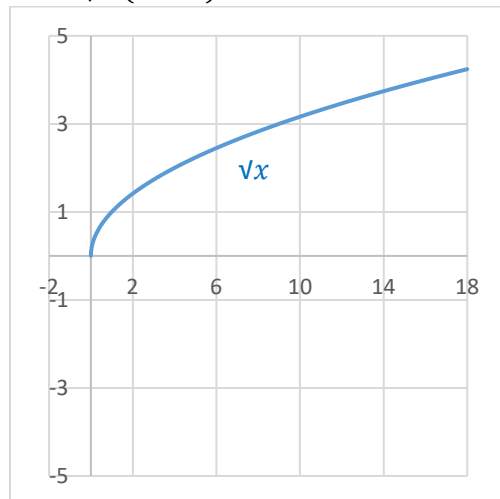
➤ fordított hozzárendelés: y^2



➤ $f(x) = x^2, x \geq 0$

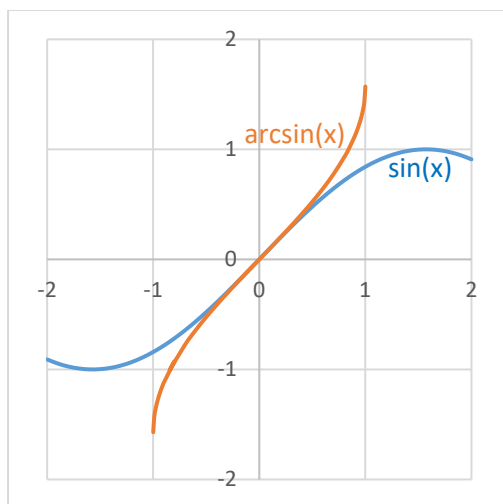


➤ már invertálható: $y = \sqrt{x} \rightarrow f^{-1} = -\sqrt{x} (x > 0)$

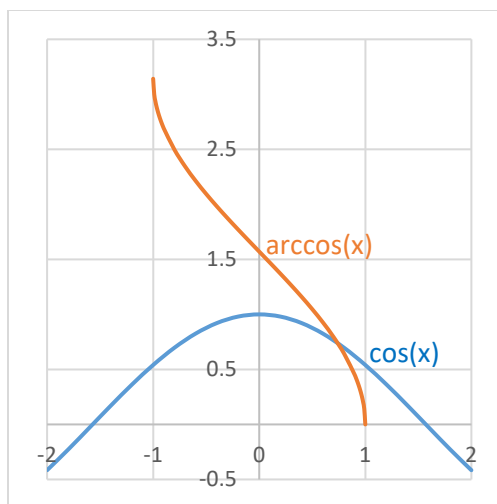


Trigonometrikus függvény inverze

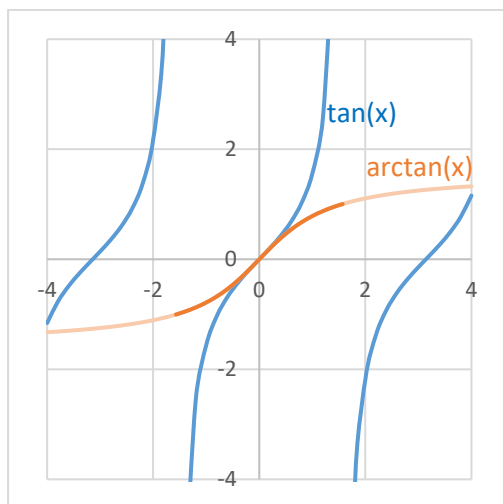
- ❖ $\arcsin = (\sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})$
- ❖ $\sin$ függvény $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumra vett leszűkítésének az inverze



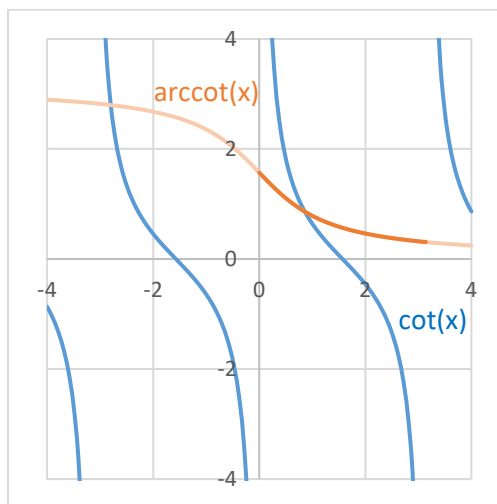
- ❖ $\arccos = (\cos |_{[0, \pi]})$
- ❖ $\cos$ függvény $[0, \pi]$ intervallumra vett leszűkítésének az inverze



- ❖ $\arctan = (\tan |_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})$
- ❖ $\tan$ függvény $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumra vett leszűkítésének az inverze



- ❖ $\operatorname{arccot} = (\cot |_{(0, \pi)})$
- ❖ $\cot$ függvény $(0, \pi)$ intervallumra vett leszűkítésének az inverze



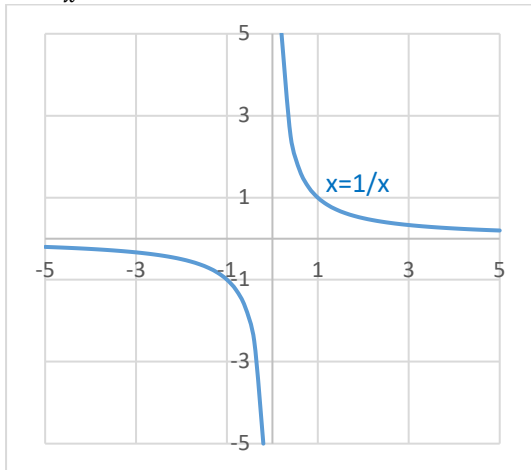
Gyakorlás

Példatár – 1.3. fejezet – 1./10.

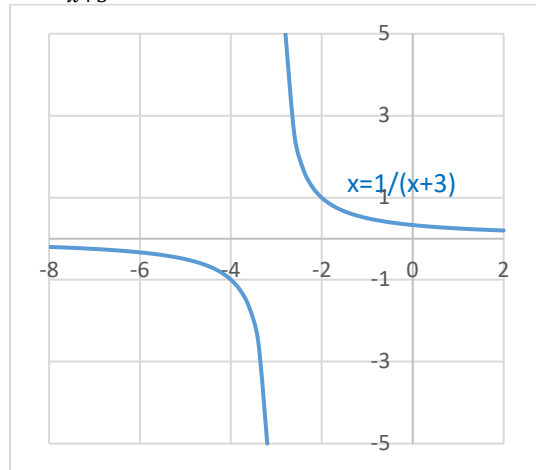
Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, adjuk meg az inverzet és azt is ábrázoljuk!

❖ $f(x) = 4 - \frac{2}{x+3}, x > -3$

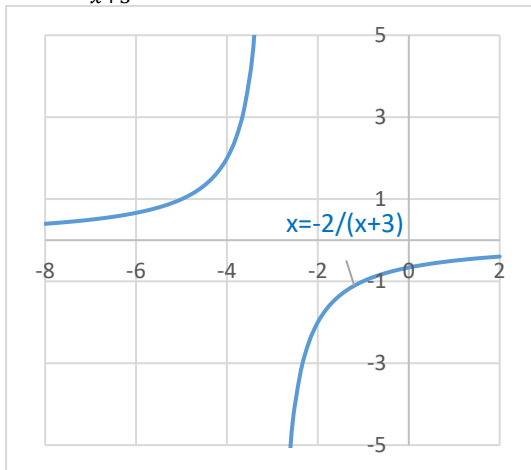
❖ $x \rightarrow \frac{1}{x}$



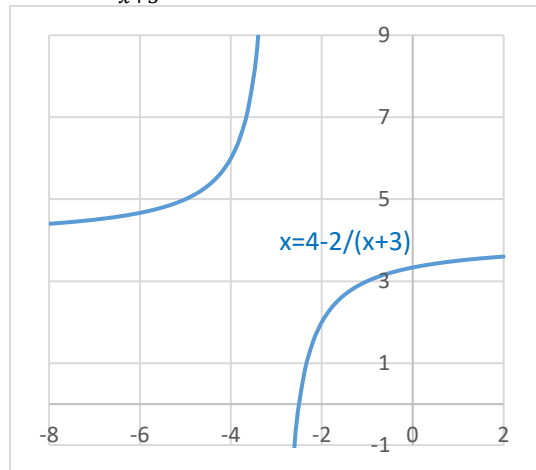
❖ $x \rightarrow \frac{1}{x+3}$



❖ $x \rightarrow -\frac{2}{x+3}$



❖ $x \rightarrow 4 - \frac{2}{x+3}, x > -3$



❖ invertálhatóság feltétele: f kölcsönösen egyértelmű legyen

❖ ha f szigorúan monoton, akkor invertálható (elégletes feltétel)

❖ itt: f szigorúan monoton nő a $] -3, \infty[$ intervallumon, ezért itt invertálható

❖ inverz meghatározása:

$$y = 4 - \frac{2}{x+3}$$

$$x = 4 - \frac{2}{y+3} \rightarrow \text{fejezzük ki } y\text{-t}$$

$$\frac{2}{y+3} = 4 - x$$

$$\frac{1}{y+3} = \frac{4-x}{2}$$

$$y+3 = \frac{2}{4-x}$$

$$y = -3 + \frac{2}{4-x} = 3 - \frac{2}{x-4}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = 3 - \frac{2}{x-4}, x < 4$$

megjegyzés: $D_{f^{-1}} =] -\infty, 4[$ $R_{f^{-1}} =] -3, \infty[$

Példatár – 1.3. fejezet – 1./4.

Értelmezési tartomány, zérushely meghatározása!

$$f(x) = \frac{2x(x-2)^2 - 2(x-2)x^2}{(x-2)^4} = \frac{2x(x-2) - 4x^2}{(x-2)^3} = \frac{2x^2 - 4x - 4x^2}{(x-2)^3} = \frac{-2x^2 - 4x}{(x-2)^3} = \frac{-2x(x+2)}{(x-2)^3}$$

értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

zérushely: $f(x) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$

Példatár – 1.3. fejezet – 1./18.

Értelmezési tartomány, zérushely meghatározása!

$$f(x) = \sqrt{5 - |x + 2|}$$

értelmezési tartomány: $5 - |x + 2| \geq 0$

egyenlőtlenségből: $|x + 2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x + 2 \leq 5 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 3$

azaz: $D_f = [-7, 3]$

zérushely: $f(x) = 0 \rightarrow 5 - |x + 2| = 0$

$|x + 2| = 5 \Leftrightarrow x + 2 = \pm 5 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -7$

2018. 10. 31. – előadás

Gyakorlás

Elemi függvények - 1. feladat (előadás)

Értelmezési tartomány, zérushely?

a)
$$f(x) = \frac{2x^2(x-2)^2(x+1)^2 - (2x^2-4x)(x^2-1)^2}{(x-2)^4(x+1)^2} = \frac{2x^2(x-2)^2(x+1)^2 - 2x(x-2)(x-1)^2(x+1)^2}{(x-2)^4(x+1)^2}$$

egyszerűsítés $(x-2)(x+1)^2$ -el:
$$\frac{2x^2(x-2) - 2x(x-1)^2}{(x-2)^3} = \frac{2x^2(x-2) - 2x(x^2-2x+1)}{(x-2)^3} = \frac{2x^3-4x^2-2x^3+4x^2-2x}{(x-2)^3}$$

marad:
$$\frac{-2x}{(x-2)^3}$$

értelmezési tartomány: $x \neq 2; x \neq -1$ vagy $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$

zérushely: $x = 0$

b) $f(x) = \ln(5 - |2x + 1|) = 0$

értelmezési tartomány: logaritmus argumentuma pozitív

$$\rightarrow 5 - |2x + 1| > 0$$

$$|2x + 1| < 5$$

$$-5 < 2x + 1 < 5$$

$$-3 < x < 2 \text{ vagy } D_f =]-3, 2[\text{ vagy } (-3, 2)$$

zérushely: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(5 - |2x + 1|) = 0$

$$5 - |2x + 1| = 1$$

$$|2x + 1| = 4$$

$$2x + 1 = \pm 4 \rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 4 \rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2x - 1 = 4 \rightarrow x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Elemi függvények - 2. feladat (előadás)

Határozzuk meg az inverz függvényt!

$$f(x) = 3 \log_2(x - 5) + 1, \quad x > 5$$

$$\text{zérushely: } 3 \log_2(x - 5) + 1 = 0$$

$$\log_2(x - 5) = -\frac{1}{3}$$

$$x - 5 = 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$x = 5 + 2^{-\frac{1}{3}}$$

f invertálható $\Leftrightarrow f$ kölcsönösen egyértelmű
itt: f szigorúan monoton nő $\rightarrow f$ invertálható

inverz meghatározása:

$$y = 3 \log_2(x - 5) + 1$$

$$x = 3 \log_2(y - 5) + 1 \rightarrow \text{kifejezzük } y\text{-t}$$

$$\frac{x - 1}{3} = \log_2(y - 5)$$

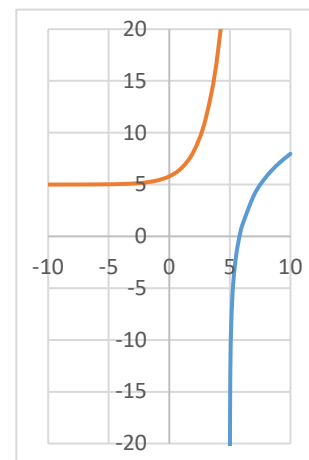
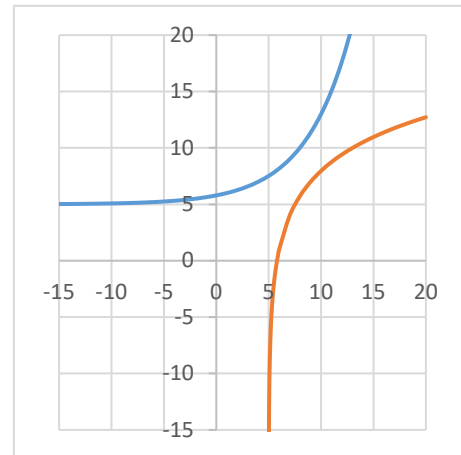
2-es alapú logaritmus definíciója alapján:

$$y - 5 = 2^{\frac{x-1}{3}}$$

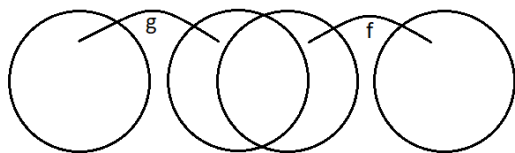
$$y = 5 + 2^{\frac{x-1}{3}}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = 5 + 2^{\frac{x-1}{3}}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad R_{f^{-1}} =]5, \infty[$$



Összetett függvény



$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

Gyakorlás

1. feladat

$$f(x) = \sin x \quad g(x) = x^2$$

$$\text{a) } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$$

$$\text{b) } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$$

2. feladat

$$f(x) = \ln x \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{a) } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln \frac{1}{x}$$

$$\text{értelmezési tartomány: } \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R}^+$$

$$\text{b) } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \frac{1}{\ln x}$$

$$\text{értelmezési tartomány: } \left. \begin{matrix} \ln x \neq 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} x \neq 1 \\ x > 0 \end{matrix}$$

$$D_{g \circ f} =]0, 1[\cup]1, \infty[$$

3. feladat

$$f(x) = \sqrt{x} \quad g(x) = 1 - x^2$$

$$\text{a) } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{értelmezési tartomány: } 1 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow |x| \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$D_{f \circ g} = [-1, 1]$$

$$\text{b) } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x$$

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R}_0^+ \leftarrow \sqrt{x} \text{ miatt } x \geq 0$$

Trigonometria

Hegyszögek szögfüggvénye

α : a -val szemben

β : b -vel szemben

$$\diamond \sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\diamond \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\diamond \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\diamond \cot \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\diamond \alpha + \beta = 90^\circ$$

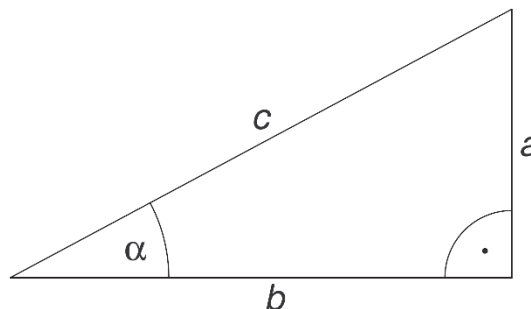
$$\diamond \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\diamond \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\diamond \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\diamond \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\diamond \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



Szabályos háromszög

$$\diamond \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\diamond \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\diamond \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\diamond \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\diamond \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\diamond \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\diamond \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\diamond \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

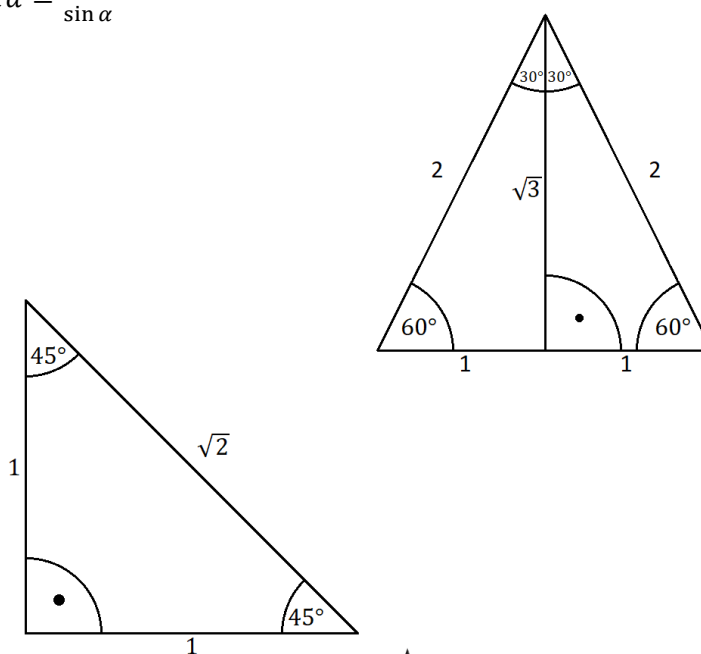
Derékszögű 45°-os háromszög

$$\diamond \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

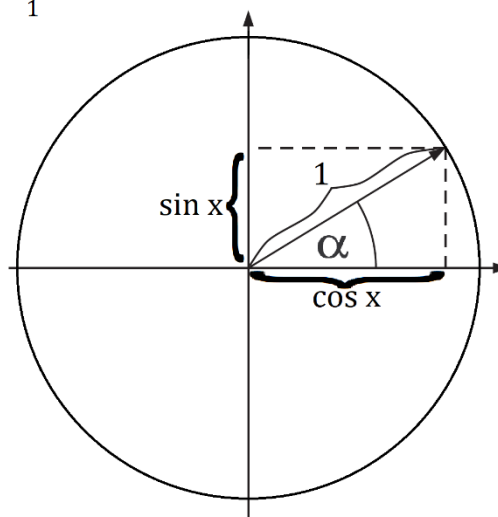
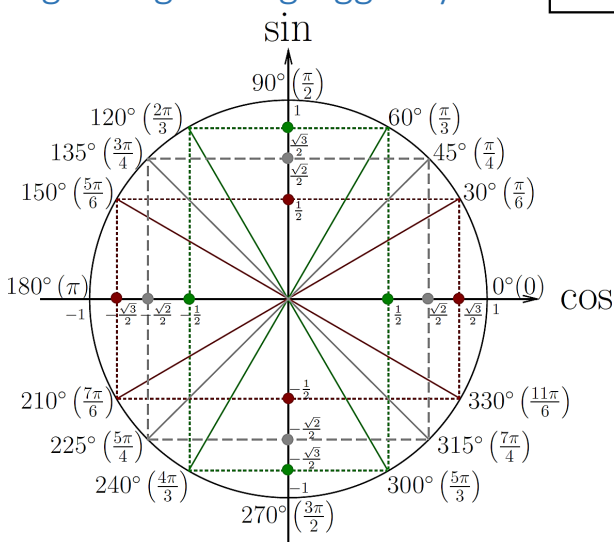
$$\diamond \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\diamond \tan 45^\circ = 1$$

$$\diamond \cot 45^\circ = 1$$



Forgásszögek szögfüggvényei



$$\diamond \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Addíciós képletek

- ❖ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- ❖ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- ❖ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- ❖ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- ❖ specifikusan: $\alpha = \beta$
 - $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 - $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 - $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$

Gyakorlás

Szögfüggvények

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} & \rightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} & \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} & & \rightarrow x \\ \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} & \text{c) } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} & = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{b) } \cos x = \frac{1}{2} & & \end{array}$$

Trigonometrikus egyenletek – 1. feladat (előadás)

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\begin{array}{l} \text{b) } \cos 2x - 2 \sin x = -3 \\ \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x = -3 \\ (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x - 2 \sin x = -3 \\ 1 - 2 \sin^2 x - 2 \sin x + 3 = 0 \quad :(-2) \\ \sin^2 x + \sin x - 2 = 0 \\ a = \sin x \rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \\ (a + 2)(a - 1) = 0 \\ a = -2 \text{ vagy } a = 1 \\ \text{1. eset: } \sin x = -2 \\ \text{nem lehet, mert } \forall x \in \mathbb{R} \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \\ \text{2. eset: } \sin x = 1 \\ \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Trigonometrikus egyenletek – 2. feladat (előadás)

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a $[0, 2\pi]$ intervallumon!

b) $(\cos x + \sin x)^2 + \cos x = 1$

oldjuk meg a $[0, 2\pi]$ zárt intervallumon

$$\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = 1$$

$$2 \sin x \cos x = 0$$

szorzattá alakítva: $\cos(2 \sin x + 1) = 0$

1. eset: $\cos x = 0$

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. eset: $\sin x = 1$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

miel $0 \leq x \leq 2\pi$ esetén a megoldás: $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2}, x_3 = \frac{7\pi}{6}, x_4 = \frac{11\pi}{6}$

2018. 11. 07. – előadás

Gyakorlás

Példatár – 1.6. fejezet – 1.13.

Oldja meg az egyenleteket a megadott intervallumon!

$$\tan x + \tan^2 x + \cot x + \cot^2 x = 4, \quad x \in]0, \frac{\pi}{4}]$$

$$\text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{4} \rightarrow \tan x > 0 \text{ és } \cot x > 0 \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

felhasználjuk, hogy minden $p > 0$ számra $p + \frac{1}{p} \geq 2$ és egyenlőség pontosan akkor, ha $p = 1$

$$\text{ugyanis } p + \frac{1}{p} \geq 2 \Leftrightarrow p^2 + 1 \geq 2p \Leftrightarrow p^2 - 2p + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (p - 1)^2 \geq 0$$

$$\text{egyenlet: } \underbrace{\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)}_{\geq 2} + \underbrace{\left(\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x}\right)}_{\geq 2} = 4$$

egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\left. \begin{matrix} \tan x = 1 \\ \tan^2 x = 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow \tan x = 1$ tehát $x = \frac{\pi}{4}$

Példatár – 1.6. fejezet – 1.14.

Oldja meg az egyenleteket a megadott intervallumon!

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos 2x = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\text{kell:} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\rightarrow \sqrt{\sin^2 x} - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\sqrt{\sin^2 x} - (1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$|\sin x| - 1 + 2 \sin^2 x = 0$$

$$2 \sin^2 x + |\sin x| - 1 = 0$$

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } \sin x \geq 0 \\ -\sin x, & \text{ha } \sin x < 0 \end{cases}$$

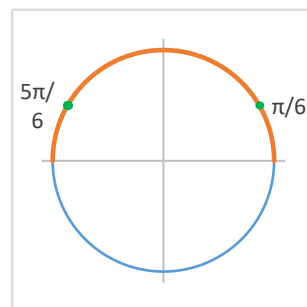
1. eset: $\sin x \geq 0$, azaz: $0 \leq x \leq \pi$ vagy $x = 2\pi$

$$\text{egyenlet: } 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = -\frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

tehát $\sin x = \frac{1}{2}$ vagy $\sin x = -1$, de az utóbbi nem lehet, mert $\sin x \geq 0$

$$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} \text{ és } x_2 = \frac{5\pi}{6}$$



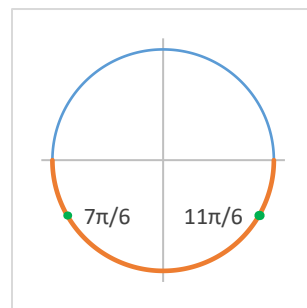
2. eset: $\sin x < 0$, azaz: $\pi < x < 2\pi$

$$\text{egyenlet: } 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

tehát $\sin x = -\frac{1}{2}$ vagy $\sin x = 1$, de az utóbbi nem lehet, mert $\sin x < 0$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow x_3 = \frac{7\pi}{6} \text{ és } x_4 = \frac{11\pi}{6}$$



Példatár – 1.6. fejezet – 1.15.

Oldja meg az egyenleteket a megadott intervallumon!

$$\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x$$

$$\sin x - \sin^3 x = \cos x - \cos^3 x$$

$$\sin x (1 - \sin^2 x) = \cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$\text{kell: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \sin x \cos^2 x = \cos x \sin^2 x$$

(nem oszthatunk $\sin x \cos x$ -el, mert 0 is lehet)

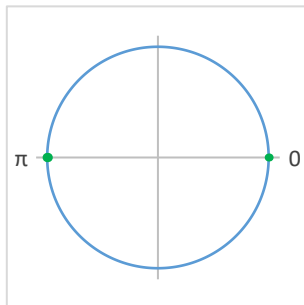
0-ra rendezve és szorzattá alakítva:

$$\sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x = 0$$

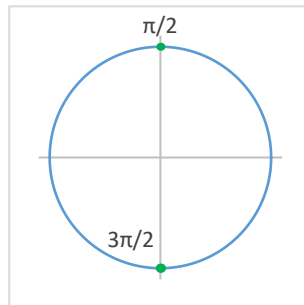
$$\sin x \cos x (\cos x - \sin x) = 0$$

$$\text{ebből: } \sin x = 0 \text{ vagy } \cos x = 0 \text{ vagy } \cos x = \sin x$$

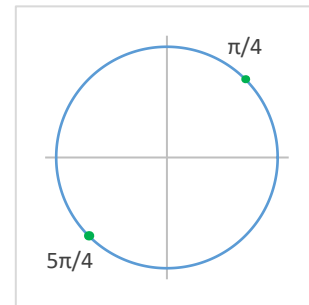
1. eset: $\sin x = 0$



2. eset: $\cos x = 0$



3. eset: $\sin x = \cos x$



$$\hookrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példatár – 1.6. fejezet – 1.18.

Oldja meg az egyenleteket a megadott intervallumon!

$$\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x + \sin^2 x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{kikötés: } \cos x \neq 0, \text{ azaz } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x + \sin x \cos x + \sin 2x \cos x = 1$$

$$\text{kell: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

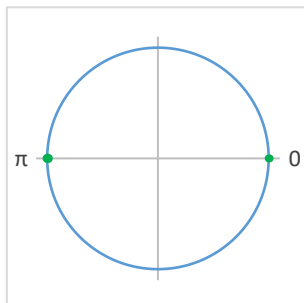
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$1 + \sin x \cos x + 2 \sin x \cos^2 x = 1$$

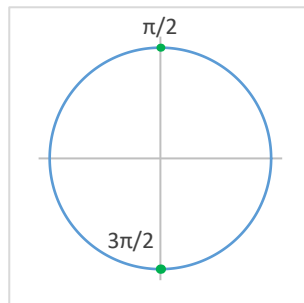
$$\sin x \cos x + 2 \sin x \cos^2 x = 0$$

$$\sin x \cos x (1 + 2 \cos x) = 0$$

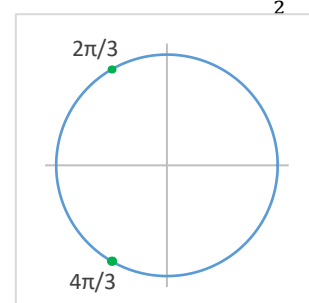
1. eset: $\sin x = 0$



2. eset: $\cos x = 0$



3. eset: $\cos x = -\frac{1}{2}$



$$\hookrightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példatár – 1.6. fejezet – 1.21.

Oldja meg az egyenleteket a megadott intervallumon!

$$\sin 3x - \cos 2x \sin x = \cos x$$

$$\text{kell: } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\rightarrow \sin(x + 2x) - \cos 2x \sin x = \cos x$$

$$(\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x) - \cos 2x \sin x = \cos x$$

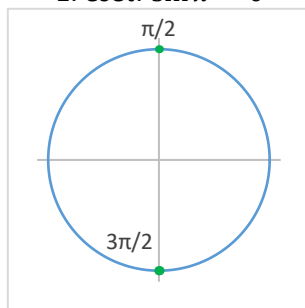
$$\cos x \sin 2x = \cos x$$

nullára rendezve és szorzattá alakítva:

$$\cos x \sin 2x - \cos x = 0$$

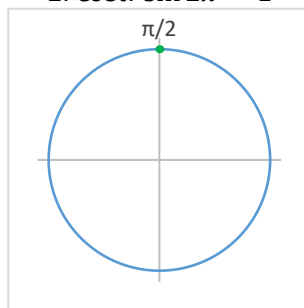
$$\cos x (\sin 2x - 1) = 0$$

1. eset: $\sin x = 0$



$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. eset: $\sin 2x = 1$



$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Példatár – 1.6. fejezet – 1.23.

Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét segédeszköz használata nélkül!

$$\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \frac{1}{2} (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) = \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 15^\circ) = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{kell: } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Példatár – 1.6. fejezet – 1.24.

Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét segédeszköz használata nélkül!

$$\sin 30^\circ \cos 15^\circ + \cos 30^\circ \sin 15^\circ = \sin(30^\circ + 15^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

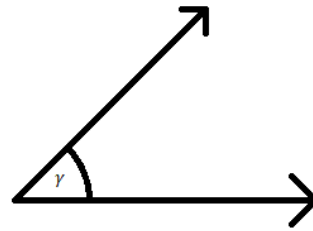
Példatár – 1.6. fejezet – 1.26.

Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét segédeszköz használata nélkül!

$$\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vektorok és koordináta geometria

- ❖ vektor: irányított szakasz
- ❖ koordináták: $\underline{a} = (a_1, a_2)$
- ❖ vektor hossza: $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- ❖ összeadás, számmal való szorzás:
 - $\underline{a} = (a_1, a_2), \quad \underline{b} = (b_1, b_2), \quad c \in \mathbb{R}$
 - $\rightarrow \underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
 - $c \cdot \underline{a} = (c \cdot a_1, c \cdot a_2)$
- ❖ skaláris szorzat:
 - $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cdot \cos \gamma$
 - $\cos \gamma = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$
 - koordinátákkal: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$
 - $\cos \gamma = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$



Gyakorlás

Példatár – 1.8. fejezet – 1./1.

Legyenek $\underline{a} = (2, 3)$, $\underline{b} = (-3, 2)$ és $\underline{c} = (5, -1)$. Adja meg a következő vektorokat: $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$; $3(2\underline{a} - \underline{b})$; $(\underline{a} + \underline{b})\underline{c}$; $(\underline{a} - \underline{b})(\underline{b} + \underline{c})$; $|\underline{a} - \underline{b}|$!

$$\underline{a} = (2, 3)$$

$$\underline{b} = (-3, 2)$$

$$\underline{c} = (5, -1)$$

$$\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = (4, 4)$$

$$3(2\underline{a} - \underline{b}) = 3((4, 6) - (-3, 2)) = 3(7, 4) = (21, 12)$$

$$(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = ((2, 3) + (-3, 2)) \cdot (5, -1) = (-1, 5) \cdot (5, -1) = -1 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) = -10$$

$$|\underline{a} - \underline{b}| = |(5, 1)| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

Példatár – 1.8. fejezet – 1.3.

Legyen $\underline{a} = (4; 3)$ és $\underline{b} = (-1; 2)$. Mekkora az $\underline{a}\underline{b}$ skaláris szorzat és az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által bezárt szög?

$$\underline{a} = (4, 3)$$

$$\underline{b} = (-1, 2)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = ?$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 2$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

mekkora az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ által közre zárt szög?

skaláris szorzatból: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 2$

$$|\underline{a}| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\hookrightarrow \cos \gamma = \frac{2}{5 \cdot \sqrt{5}}$$

$$\gamma = \arccos \frac{2}{5 \cdot \sqrt{5}} \approx 79,7^\circ$$

Példatár – 1.8. fejezet - 1.4.

Adja meg a p paraméter összes olyan értékét, amelyre az $a = (6, -5)$ és $b = (p, 3)$ vektorok párhuzamosak; merőlegesek; illetve hegyesszöget zárnak be egymással!

$$\underline{a} = (6, -5)$$

$$\underline{b} = (p, 3)$$

$$1 \quad p = ? \quad \underline{a} \parallel \underline{b}$$

$$\alpha = 0^\circ \text{ vagy } 180^\circ$$

$$6p - 15 = \pm \sqrt{6^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{p^2 + 3}$$

$$(6p - 15)^2 = (36 + 25) \cdot (p^2 - 9)$$

$$36p^2 - 180p + 225$$

$$= (36 + 25) \cdot (p^2 - 9)$$

2 vektor párhuzamos $\rightarrow$ egymás

számszorosai

$$\lambda \underline{a} = \underline{b} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(6\lambda - 5\lambda) = (p, 3)$$

másodfokú egyenlet:

$$6\lambda = p$$

$$-5\lambda = 3$$

$$p = -\frac{18}{5}$$

$$\lambda = -\frac{3}{5}$$

$$2 \quad p = ? \quad \underline{a} \perp \underline{b}$$

$$6p - 15 = 0$$

$$p = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Példatár – 1.8. fejezet – 1.6.

Adott 2 pont: $A(2,6)$ és $B(-3,2)$. Adja meg az alábbi értékeket!

1. A és B távolsága:

$$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

$$B - A(-5, -4)$$

$$\sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$

2. $\overline{AB}$ felezőpontja, harmadolópontjai:

$$F = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$$

$$F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$$

$$H_1 = \frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{3}$$

$$H_1\left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

$$H_2 = \frac{2\underline{a} + \underline{b}}{3}$$

$$H_2\left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

3. $\overline{AB}$ felezőmerőleges egyenlete:

$$\tan \phi = m$$

$$\text{irányvektor: } \underline{v} = (v_1, v_2)$$

$$\text{normálvektor: } \underline{n} = (A, B)$$

szakasz felező merőleges egyenlő távolságra vannak A és B -től

$$P_0(x_0, y_0)$$

$$\underline{v} = (x - x_0, y - y_0)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \tan \phi = \frac{v_2}{v_1}$$

$$y - y_0 = \frac{v_2}{v_1}(x - x_0)$$

$$v_1(y - y_0) = v_2(x - x_0)$$

$$\underline{v}(v_1, v_2) \sim \underline{n}(-v_2, v_1) \text{ vagy } (v_2, -v_1)$$

$$Ax + By = Ax_0 + By_0$$

$$5x + 4y = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot 4$$

$$\underline{n}_f = (5, 4)$$

4. kör, melynek $\overline{AB}$ szakasz átmérője:

$$\text{átmérő: } \overline{AB} (= B - A = A - B)$$

$$C(u, v)$$

$$\text{kör egyenlete: } (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 = \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2$$

Példatár – 1.8. fejezet – 1.9.

Mennyi az $A(3, -1)$, $B(1, 4)$ és $C(-7, -9)$ csúcspontú háromszög súlypontjának az origótól vett távolsága?

$$F_{AB} \left(2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\underline{v} = F \cdot C \left(9, \frac{21}{2}\right) \sim \underline{n} \left(-\frac{21}{2}, 9\right)$$

$$\frac{f + 2c}{3}, \frac{2f + c}{3}$$

$$S(-1, -2)$$

$$\text{hossz} = |s| = \sqrt{5}$$

Gyakorlás

Példatár – 1.8. fejezet – 1.2

Legyenek $a = (2; 5)$, $b = (-10; 2)$ és $c = (-6; 12)$.

1. Bontsa fel a c vektort a -val és b -vel párhuzamos összevőkire!
2. Bontsa fel a b vektort c -vel párhuzamos és c -re merőleges összetevőkre!
3. Adj meg $(a + b)$ -re merőleges egységnyi hosszúságú vektort!

$\underline{b}$ $\underline{c}$ -vel párhuzamos és $\underline{c}$ -re merőleges összetevőkre BONTÁSA

$$\begin{aligned}\underline{c} &\parallel \underline{c}_1 \\ \underline{c} &\perp \underline{c}_2 \\ \underline{b} &= \underline{c}_1 + \underline{c}_2\end{aligned}$$

1. megoldás: $\underline{c}$ -vel párhuzamos

$$\underline{c}_1 = (-1, 2) \text{ erre merőleges pl.: } \underline{c}_2 = (2, 1)$$

vektorfelbontási tétel:

$$\begin{aligned}\underline{b} &= \alpha \underline{c}_1 + \beta \underline{c}_2 \Leftrightarrow (-10, 2) = \alpha(-1, 2) + \beta(2, 1) \\ -10 &= -\alpha + 2\beta \\ 2 &= 2\alpha + \beta \\ \rightarrow \beta &= 2 - 2\alpha \\ -10 &= -\alpha + 4 - 4\alpha \\ -14 &= -5\alpha \\ \alpha &= \frac{14}{5}, \quad \beta = -\frac{18}{5}\end{aligned}$$

tehát a $\underline{c}$ -vel párhuzamos összetevő:

$$\underline{c}_p = \alpha \underline{c}_1 = \frac{14}{5}(-1, 2) = \left(-\frac{14}{5}, \frac{28}{5}\right)$$

a $\underline{c}$ -re merőleges összetevő:

$$\underline{c}_m = \beta \underline{c}_2 = -\frac{18}{5}(2, 1) = \left(-\frac{36}{5}, -\frac{18}{5}\right)$$

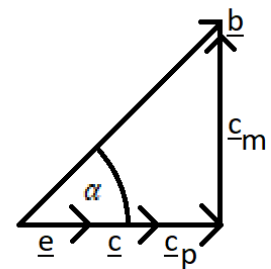
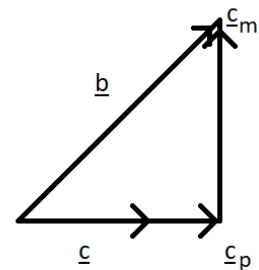
2. megoldás: legyen $\underline{e}$ a $\underline{c}$ -vel párhuzamos egységvektor $\rightarrow \underline{e} = \frac{\underline{c}}{|\underline{c}|} \rightarrow |\underline{e}| = 1$

$$\cos \alpha = \frac{|\underline{c}_{1,2}|}{|\underline{b}|}$$

$$\text{ekkor: } \underline{e} \cdot \underline{b} = |\underline{e}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha = 1 \cdot |\underline{b}| \cos \alpha = |\underline{c}_p|$$

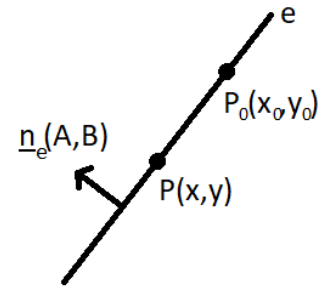
$$\begin{aligned}\underline{c}_p &= |\underline{c}_p| \cdot \underline{e} = (\underline{e} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{e} = \left(\frac{\underline{c}}{|\underline{c}|} \cdot \underline{b}\right) \cdot \frac{\underline{c}}{|\underline{c}|} = \frac{(-10) \cdot (-6) + 2 \cdot 12}{\sqrt{(-6)^2 + 12^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-6)^2 + 12^2}} \cdot (-6, 12) \\ &= \frac{60 + 24}{36 + 144} \cdot (-6, 12) = \frac{7}{15} \cdot (-6, 12) = \left(-\frac{14}{5}, \frac{28}{5}\right)\end{aligned}$$

$$\underline{c}_m = \underline{b} - \underline{c}_p = \left(-\frac{36}{5}, -\frac{18}{5}\right)$$



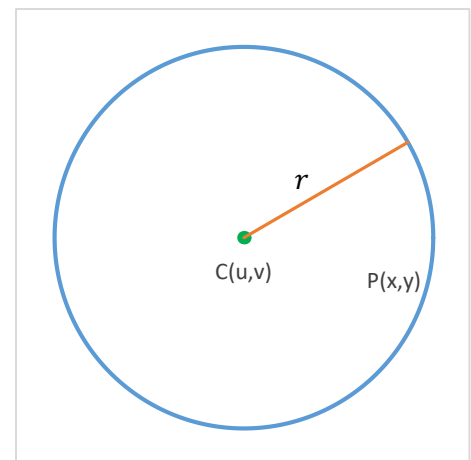
Egyenes egyenlete

- ❖ adott: $P_0 \in e, \underline{n}_e \perp e$ ($\underline{n}_e$ normálvektor)
 - $P \in e \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \underline{n}_e \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \underline{n}_e = 0 \Leftrightarrow$
 - $(x - x_0, y - y_0) \cdot (A, B) = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow$
 $Ax + By = Ax_0 + By_0$
- ❖ adott: $P_0 \in e, \underline{v}_e \perp e$ ($\underline{v}_e$ irányvektor)
 - $\underline{v}_e = (v_1, v_2) \perp \underbrace{(v_2, -v_1)}_{\substack{A \\ B}} = \underline{n}_e$
 - $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$
- ❖ adott: $P_0 \in e, m$ (m meredekség)
 - $\underline{v}_e = (v_1, v_2), v_2 \neq 0 \rightarrow m = \frac{v_2}{v_1}$
 - $P_0(x_0, y_0)$
 - $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$



Kör egyenlete

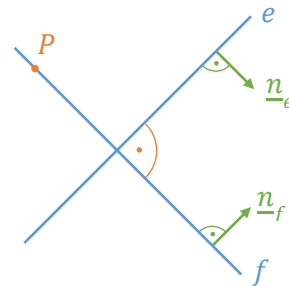
- ❖ $C(u, v), P(x, y)$
- ❖ $d(C, P) = r \Leftrightarrow |\overrightarrow{CP}| = r \Leftrightarrow$
- ❖ $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$



Gyakorlás

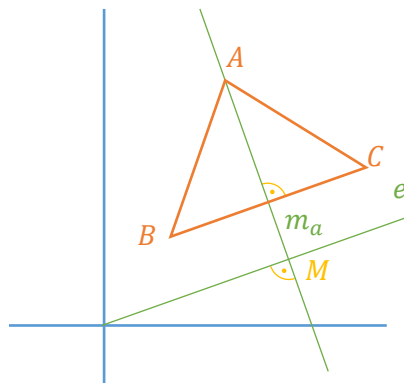
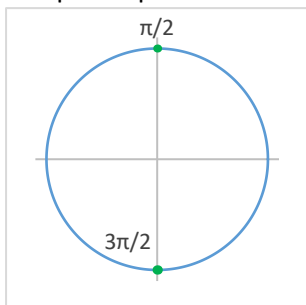
1. feladat

- ❖ Tükrözzük a $P(2, -4)$ pontot az $e: 5x + y = 15$ egyenesre!
- ❖ 1. lépés: f egyenes, ahol $P \in f, f \perp e$
 - $e: 5x + 3y = 15 \rightarrow \underline{n}_e = (5, 3)$
 - $e \perp f \Leftrightarrow \underline{n}_e \perp \underline{n}_f \Leftrightarrow \underline{n}_f = (5, 3)$
 - $f: 3x - 5y = 32 - 5(-4)$
 - $3x - 5y = 26$
- ❖ 2. lépés: e és f metszéspontja: $M = e \cap f$
 - $\left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 15 \\ 3x - 5y = 26 \end{array} \right\} \cdot 5$
 - $\left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 15 \\ 3x - 5y = 26 \end{array} \right\} \cdot 3$
 - $\left. \begin{array}{l} 25x + 15y = 75 \\ 9x - 15y = 78 \end{array} \right\}$
 - $\rightarrow 34x = 153, x = \frac{153}{34} = 4,5 = \frac{9}{2}$
 - $y = \frac{15 - 5x}{3} = 5 - \frac{5}{3} \cdot 4,5 = -2,5$
 - $M(4,5; -2,5) = \left(\frac{9}{2}; -\frac{5}{2}\right)$
- ❖ 3. lépés: $T = ?$ $T(a, b)$ M felezőpontja a PT szakasznak
 - $\frac{9}{2} = \frac{2 + a}{2}$
 - $\rightarrow \frac{5}{2} = \frac{-4 + b}{2} \rightarrow b = -1$
 - P tükörképe: $T(7, -1)$



2. feladat

- ❖ $ABC\Delta$: $A(4, -3)$, $B(4, 2)$, $C(-2, 5)$
- ❖ Határozzuk meg az A ponton átmenő magasságvonalnak az önmagától való távolságát!
- ❖ 1. lépés: A ponton átmenő magasságvonal (m_a) egyenlete



adott: $A(4, -3) \in m_a$

m_a normálvektora: $\overrightarrow{BC} = (-2 - 4, 5 - 2) = (-6, 3) \parallel \underbrace{(2, -1)}_{A, B}$

$$m_a: 2x - y = 24 - (-3) \rightarrow 2x - y = 11$$

- ❖ 2. lépés: legyen e az origón átmenő, m_a -ra merőleges egyenes

$$\underline{v}_e = (2, -1) \perp (1, 2) = \underline{n}_e$$

$$\rightarrow e: x + 2y = 0$$

- ❖ 3. lépés: e és m_a metszéspontja: $M = m_a \cap e$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 11 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right\} / \cdot (-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 11 \\ -2x + 4y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow -5y = 11 \rightarrow y = -\frac{11}{5} \rightarrow x = -y = \frac{22}{5}$$

$$M\left(\frac{22}{5}, -\frac{11}{5}\right)$$

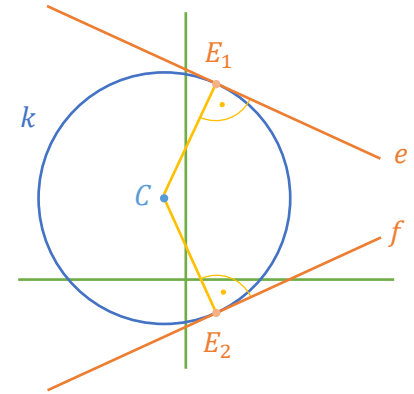
- ❖ 4. lépés: az origó távolsága az m_a -tól

$$\begin{aligned} d(O, m_a) &= d(O, M) = |\overline{OM}| = \left| \left(\frac{22}{5} - 0, -\frac{11}{5} - 0 \right) \right| = \sqrt{\left(\frac{22}{5} \right)^2 + \left(-\frac{11}{5} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(2 \cdot 11)^2 + 11^2}{25}} = \sqrt{\frac{11^2(4 + 1)}{25}} = \frac{11 \cdot \sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

3. feladat

Adott a kör: $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$, írjuk fel az 1 abszcisszájú (x koordináta) pontokban húzott érintők egyenletét!

- ❖ $(x+2)^2(y-3)^2 = 12 + 4 + 9$
- ❖ $(x+2)^2(y-3)^2 = 25 \quad r = \sqrt{25} = 5 \quad C(-2,3)$
- ❖ $x = 1 \rightarrow (1+2)^2(y-3)^2 = 25 \rightarrow (y-3)^2 = 16 \rightarrow$
- ❖ tehát: $\rightarrow y-3 = \pm 4 \quad y_1 = 3+4 = 7 \quad y_2 = 3-4 = -1$
- ❖ 1 abszcisszájú pontok: $E_1(1,7) \quad E_2(1,-1)$
- ❖ felhasználható: kör érintője az adott pontba húzott sugárra merőleges
- ❖ $\underline{n}_e = \overrightarrow{CE_1} = (1,7) - (-2,3) = (3,4)$
- ❖ $e: 3x + 4y = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 7 \rightarrow 3x + 4y = 31$
- ❖ $\underline{n}_f = \overrightarrow{CE_2} = (1,-1) - (-2,3) = (3,-4)$
- ❖ $f: 3x + 4y = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-7) \rightarrow 3x + 4y = -25$



Példatár – 1.8. fejezet – 1.8.

- ❖ $x^2 + y^2 - 18x + 6y - 166 = 0$ körhöz $P(25, -15)$ -ből egyenletet húzunk, érintők egyenletei?
 - $(x-9)^2 + (y+3)^2 = 166 + 81 + 9$
 - $(x-9)^2 + (y+3)^2 = 256 \quad r = 16 \quad C(9, -3)$

❖ megoldás lépései:

1. F : CP szakasz felezőpontja
2. F középpontú, FP magasságú Thalész-kör egyenlete
3. 2 kör metszéspontjai: $k_1 \cap k_2$
4. P, E_1 illetve P, E_2 ponton átmenő érintők egyenlete

❖ 1. lépés:

$$F(a, b) = ?$$

$$a = \frac{9 + 25}{2} = 17$$

$$b = \frac{-3 - 15}{2} = -9$$

$$F(17, -9)$$

❖ 2. lépés:

$$r = |\overrightarrow{FP}| = |(9, -3) - 17, -9| = |-8, 6| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10$$

$$k_2: (x-17)^2 + (y+9)^2 = 100$$

$$\rightarrow C(9, -3)$$

❖ 3. lépés:

$$k_1 \cap k_2: \begin{cases} (x-9)^2 + (y+3)^2 = 256 \\ (x-17)^2 + (y+9)^2 = 100 \end{cases}$$

$$(1) k_1: x^2 + y^2 - 18x + 6y = 166$$

$$(2) k_2: x^2 + y^2 - 34x + 18y = 100 - 17^2 - 9^2$$

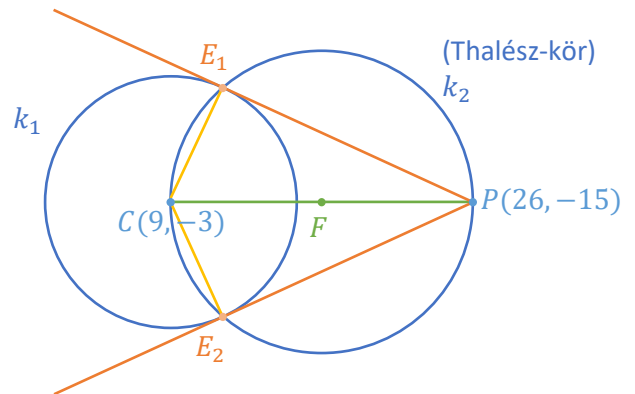
$$(1) - (2) \rightarrow \text{érintési pontok: } E_1(25, -3) \quad E_2\left(\frac{257}{25}, -\frac{459}{25}\right)$$

❖ 4. lépés: P, E_1 pontokon átmenő vektor

$$\overrightarrow{PE_1} = (25, -15) - (25, -3) = (0, -12)$$

$$(0, -12) \parallel (0, 1) \perp (1, 0) = \underline{n}_e$$

$$e: 1x + 0y = 125 + 0 \cdot 25 \rightarrow x = 25$$



Példatár – 1.8. fejezet – 1.12.

A $C(-1, 2)$ középpontú kör átmegy a $P(3, -2)$ ponton. Adja meg a kör sugarát és egyenletét!

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

$$r = |P - C| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{2} \cdot 4$$

$$P - C(4, -4)$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{2}^2 + 4^2 = 32$$

Példatár – 1.8. fejezet – 1.13.

A paraméterek mely értékeire lesz köregyenlet?

1. $x^2 + y^2 + 4x + 10y + a = 0$

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

$$(x + 2)^2 + (y + 5)^2 - 4 - 25 + a = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 29 - a$$

$$29 - a = r^2 \geq 0$$

$$29 - a \geq 0$$

$$29 \geq a$$

2. $4x^2 + Ay^2 - 32x + 24y + 13xy + C = 0$

$$B = 0 \quad A \neq 0$$

$$4(x^2 - 8x) + A\left(y^2 + \frac{24}{A}y\right) + C = 0$$

$$4 \cdot ((x - 4)^2 - 16) + A\left(\left(y + \frac{12}{A}\right)^2 - \frac{144}{A^2}\right) + C = 0$$

$$4 \cdot (x - y)^2 - 64 + A\left(y + \frac{12}{A}\right)^2 - \frac{144}{A} + C = 0$$

$$(2(x - 4))^2 - 64 + \left(\sqrt{A}\left(y + \frac{12}{A}\right)\right)^2 - \frac{144}{A} + C = 0$$

$$-64 - \frac{144}{A} + C \geq 0$$

$$C \geq 64 + \frac{144}{A}$$

Példatár – 1.16

Írjuk fel annak az egyenletét, mely merőleges a $2x - 5y = 7$ egyenletű egyenesre és átmegy az $x^2 + 8x + y^2 - 6y = 10$ egyenletű kör középpontján!

$$f \perp e$$

$$e: 2x - 4y = 7 \rightarrow \underline{n}_e(2, -5)$$

$$\underline{n}_e \rightarrow \underline{n}_f(5, 2)$$

$$(x + 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 = 10$$

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 35$$

$$C(-4, 3)$$

$$f: 5x + 2y = 5 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 = -14$$

Kombinatorika

Permutáció

- ❖ ismétlés nélküli:
 - n különböző elemet sorrendjeinek száma
 - sorba rendezések száma: $P_n = n!$
- ❖ ismétléses:
 - n elem sorrendjeinek száma – fajtán belül nem megkülönböztethetők
 - n elem között k különböző fordul elő, ezekből rendezve $k_1, k_2, \dots, k_n$ darab van ($\sum_{i=1}^n k_i = n$)
 - sorba rendezések száma: $P_n^{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$

Variáció

- ❖ ismétlés nélküli:
 - n különböző elemből k sorba rendezése az összes lehetséges féleképpen, visszatérés nélkül
 - 1 elem 1-szer fordulhat elő
 - n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli variációi
 - kiválasztások száma: $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- ❖ ismétléses:
 - n különböző elemből k sorbarendezése
 - 1 elem többször fordulhat elő
 - n elem k -ad osztályú ismétléses variációi
 - kiválasztások száma: $V_n^{k,i} = n^k$

Kombináció

- ❖ ismétlés nélküli:
 - n különböző elem közül visszatérés nélkül k darab kiválasztása, a sorrend nem számít
 - n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációi
 - kiválasztások száma: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
vagy: $0! = 1$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$
 $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$
- ❖ ismétléses:
 - n különböző elem közül k darab kiválasztása, a sorrend nem számít
 - n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációi
 - kiválasztások száma: $C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$

Gyakorlás

1. feladat

Hány szám készíthető az alábbi számjegyekből minden egyes számjegy felhasználásával:

a) 1,2,3,4?

$$P_4 = 4! \quad \text{ismétlés nélküli permutáció}$$

b) 1,1,2,2,3,3,4?

$$P_4 = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} \quad \text{ismétléses permutáció}$$

c) 4,4,4,4,5,5,5?

$$P_7 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \quad \text{ismétléses permutáció}$$

2. feladat

Egy 30 fős osztályban 4 jutalmat osztunk ki. Hányféleképpen történhet ez, ha

a) jutalmak különbözők, mindenki legfeljebb 1-et kaphat?

visszatevés nélkül, sorrend számít

$$V_{30}^4 = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = \frac{30!}{(30-4)!} \quad \text{ismétlés nélküli kombináció}$$

b) jutalmak különbözők, mindenki többet is kaphat?

visszatevéses, sorrend számít

$$V_{30}^{4,i} = 30^4 \quad \text{ismétléses kombináció}$$

c) jutalmaz azonosak, mindenki legfeljebb 1-et kaphat?

ismétlés nélküli, sorrend számít

$$C_{30}^4 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{30!}{4! \cdot 26!} = \binom{30}{4} \quad \text{ismétlés nélküli variáció}$$

d) jutalmaz azonosak, mindenki többet is kaphat?

$$C_{30}^{4,i} = \binom{30+4-1}{4} \quad \text{ismétléses kombináció}$$

3. feladat

Hány féle különböző 13+1-es totó van? (3 tipp: 1, 2, x)

$$V_{14}^{3,i} = 3^{14} \quad \text{ismétléses variáció}$$

4. feladat

Hány féle kitöltött 5-ös lottó van?

$$C_{90}^5 = \binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \text{ismétlés nélküli kombináció}$$

Valószínűesszámítás

- ❖ klasszikus valószínűségi mező
- ❖ esemény valószínűsége: $p = \frac{\text{kedvező eset}}{\text{összes eset}}$

Gyakorlás

4. feladat

Kétjegyű természetes számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mi a valószínűsége annak, hogy 2-vel vagy 3-mal osztható?

összes esetek száma: $9 \cdot 10 = 90$

A : 2-vel osztható 2-jegyűek száma: $|A| = \frac{90}{2} = 45$

B : 3-mal osztható 2-jegyűek száma: $|B| = \frac{90}{3} = 30$

$A \cap B$: 2-vel és 3-mal osztható: $|A \cap B| = \frac{90}{6} = 15$

$A \cup B$: 2-vel vagy 3-mal osztható: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 45 + 30 - 15 = 60$
(szitaformula)

$$p = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

7. feladat

2 dobókockával dobunk egyszerre. Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege legfeljebb 5?

összes esetek száma: $6 \cdot 6 = 36$

kedvező esetek száma:

1+1 2+1 3+1 4+1

1+2 2+2 3+2

1+3 2+3

1+4 össz.: 10 eset

$$p = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

8. feladat

Egy dobókockával 5-ször dobunk egymás után. Mi a valószínűsége, hogy az 5 dobásból egyetlen egyszer a 4. dobásnál dobunk 3-ast?

1. 2. 3. 4. 5.

— — — 3 —

5-féle 5-féle 5-féle 1-féle 5-féle

kedvező esetek száma: 5^4

összes esetek száma: 6^5

$$p = \frac{5^4}{6^5}$$

12. feladat

Anna, Berci, Csabi kezében 1-1 32 lapos magyar kártya van. Mindenki húz 1-1 kártyát. Mi a valószínűsége, hogy Anna és Berci királyt húzott, Csabi viszont nem. (4 király van paklinként.)

$$\text{összes esetek száma: } \underbrace{A}_{32\text{-féle}} \cdot \underbrace{B}_{32\text{-féle}} \cdot \underbrace{C}_{32\text{-féle}} \rightarrow 32^3$$

$$\text{kedvező esetek száma: } \underbrace{A}_{4\text{-féle}} \cdot \underbrace{B}_{4\text{-féle}} \cdot \underbrace{C}_{28\text{-féle}} \rightarrow 4^2 \cdot 28$$

$$p = \frac{4^2 \cdot 28}{32^3}$$

11. feladat

Anna, Berci, Csabi 1 32 lapos magyar kártyával kihúznak 1-1 lapot. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan egyiknél van király?

$$\text{összes esetek száma: } 32 \cdot 31 \cdot 30$$

$$\text{kedvező esetek száma: } 3 \cdot 4 \cdot 28 \cdot 27$$

$$\underbrace{\text{király}}_{4\text{-féle}} \underbrace{\text{más}}_{28\text{-féle}} \underbrace{\text{más}}_{27\text{-féle}} \text{ vagy } \underbrace{\text{más}}_{28\text{-féle}} \underbrace{\text{király}}_{4\text{-féle}} \underbrace{\text{más}}_{27\text{-féle}} \text{ vagy } \underbrace{\text{más}}_{28\text{-féle}} \underbrace{\text{más}}_{27\text{-féle}} \underbrace{\text{király}}_{4\text{-féle}}$$

$$p = \frac{3 \cdot 4 \cdot 28 \cdot 27}{32 \cdot 31 \cdot 30}$$

15. feladat

Mennyi a valószínűsége, hogy 2 találatunk lesz az 5-ös lottón?

90-ből 5-t kihúznak, 85-öt nem

2 találat az 5-ből

85-ből 3-at

$$\text{összes eset: } \binom{90}{5}$$

$$\text{kedvező eset: } \binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}$$

$$2 \text{ találat: } p = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$$

$$\text{legfeljebb 2 találat: } \frac{\overset{0 \text{ találat}}{\binom{85}{5}} + \overset{1 \text{ találat}}{\binom{5}{1} \cdot \binom{85}{4}} + \overset{2 \text{ találat}}{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}}}{\binom{90}{5}}$$

2018. 12. 05. – előadás

Gyakorlás

2. minta ZH – 1. feladat

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-5} \cdot \frac{\sqrt{8^{2x-10}}}{16^{4-x}} = 32^{x-3}$$

$$(2^{-2})^{2x-5} \cdot \frac{((2^3)^{2x-10})^{\frac{1}{2}}}{(2^4)^{4-x}} = (2^5)^{x-3}$$

$$2^{-2(2x-5)} \cdot \frac{2^{3(2x-10) \cdot \frac{1}{2}}}{2^{4(4-x)}} = 2^{5(x-3)}$$

$$2^{-4x+10} \cdot \frac{2^{3x-15}}{2^{16-4x}} = 2^{5x-15}$$

$$\frac{2^{(-4x+10)+(3x-15)}}{2^{16-4x}} = 2^{5x-15}$$

$$\frac{2^{-x-5}}{2^{16-4x}} = 2^{5x-15}$$

$$2^{(-x-5)+(16-4x)} = 2^{5x-15}$$

$$2^{3x-21} = 2^{5x-15}$$

2-es alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt

$$3x - 21 = 5x - 15$$

$$-6 = 2x \rightarrow x = -3$$

2. minta ZH – 2. feladat

Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x) > -2$$

kikötés: a logaritmus argumentuma pozitív

$$x^2 - 3x = x(x - 3) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ vagy } x > 3$$

zérushelyek: $x_1 = 0, x_2 = 3$

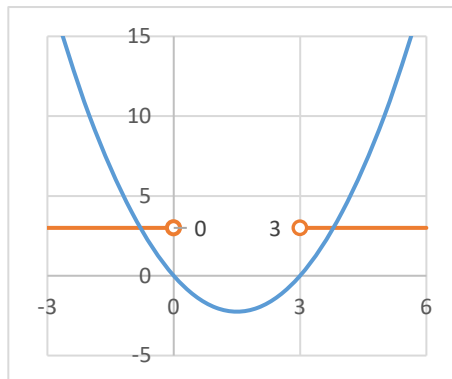
logaritmus definíciója alapján $\rightarrow \log_a b = c \Leftrightarrow$

$$a^c = b \text{ és } \log_a a^c = c$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$\rightarrow x^2 - 3x < 4 \text{ (mivel } \frac{1}{2} \text{ alapú logaritmus}$$

függvény szigorúan monoton növekvő



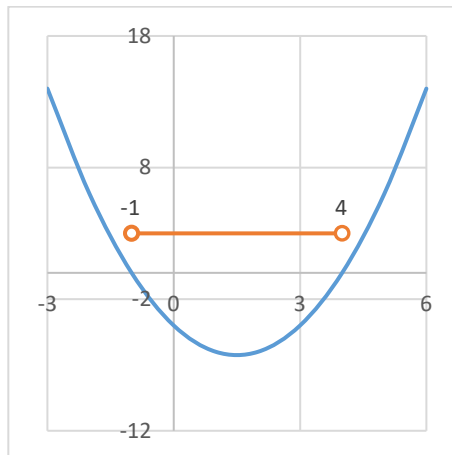
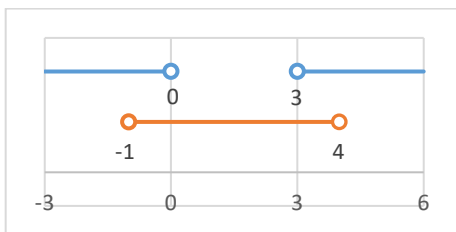
$$x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$(x - 4)(x + 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 4$$

zérushelyek: $x_1 = -1, x_2 = 4$

tehát: $\left. \begin{matrix} x < 0 \text{ vagy } x > 3 \\ -1 < x < 4 \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{megoldás: } -1 < x < 0$

vagy $3 < x < 4$



2. minta ZH – 3. feladat

Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit (hossa a törtet a lehetőleg egyszerűbb alakra)!

$$f(x) = \frac{x^2(x^2 - 1) - 2x(x - 1)}{(x + 3)(x^2 - 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2(x^2 - 1) - 2x(x - 1)}{(x + 3)(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x - 1)(x + 1) - 2x(x - 1)}{(x + 3)(x - 1)^2(x + 1)^2} = \frac{x^2(x + 1) - 2x}{(x + 3)(x - 1)(x + 1)^2} =$$

$$\frac{x^3 + x^2 - 2x}{(x + 3)(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{x(x^2 + x - 2)}{(x + 3)(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{x(x + 2)(x - 1)}{(x + 3)(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{x(x + 2)}{(x + 3)(x + 1)^2}$$

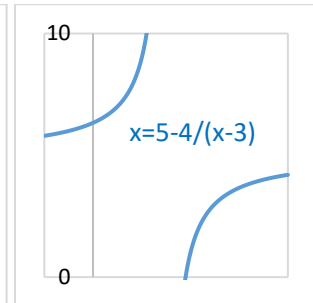
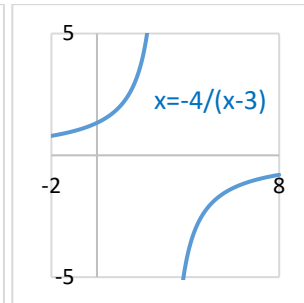
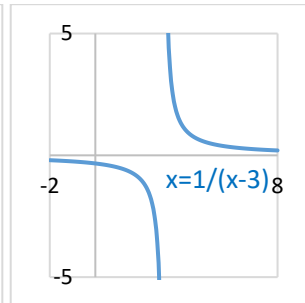
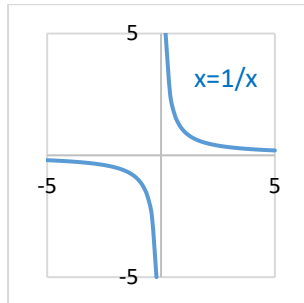
f zérushelyei: $x(x + 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$

f (eredeti) értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$

2. minta ZH – 4. feladat

Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, írja fel az inverzét (a választ indokolja)!

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x-3} \quad x > 3$$



f szigorúan monoton (növekvő)

→ invertálható

inverz meghatározása

$$y = 5 - \frac{4}{x-3}$$

$$x = 5 - \frac{4}{y-3} \rightarrow y \text{ kifejezése}$$

$$x - 5 = -\frac{4}{y-3}$$

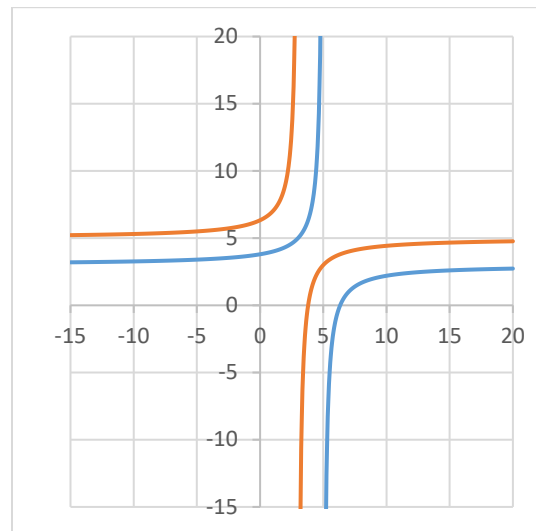
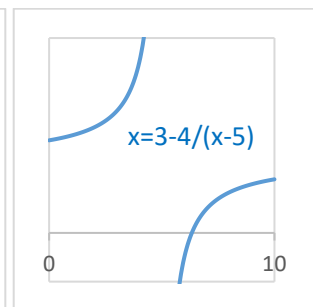
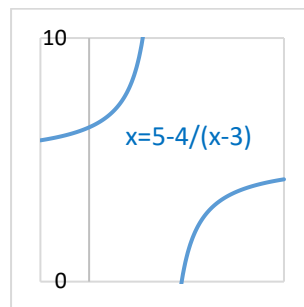
$$\frac{x-5}{-4} = \frac{1}{y-3}$$

$$-\frac{4}{x-5} = y-3$$

$$y = 3 - \frac{4}{x-5}$$

$$\rightarrow f'(x) = 3 - \frac{4}{x-5} \quad x < 5$$

$$\left. \begin{array}{l} D_f = (3, \infty) \\ R_f = (-\infty, 5) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 5) \\ R_{f^{-1}} = D_f = (3, \infty) \end{array} \right\}$$



2. minta ZH – 5. feladat

Oldja meg az alábbi trigonometrikus egyenletet a $[0; 2\pi]$ zárt intervallumon!

$$(\cos x + \sin x)^2 + \sin x = 1 + \tan x \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\text{kikötés: } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1} + 2 \sin x \cos x + \sin x = 1 + \tan x$$

$$1 + 2 \sin x \cos x + \sin x = 1 + \tan x$$

$$2 \sin x \cos x + \sin x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos x = \sin x$$

$\sin x$ -szel nem oszthatunk, mert gyök veszthető $\rightarrow 0$ -ra rendezés és szorzattá alakítás

$$\sin x (2 \cos^2 x + \cos x - 1) = 0$$

valamelyik szorzattényező 0

$$1. \text{ eset: } \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

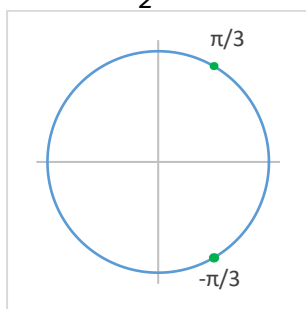
$$x \in [0, 2\pi]$$

$$x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = 2\pi$$

$$2. \text{ eset: } (2 \cos^2 x + \cos x - 1) = 0$$

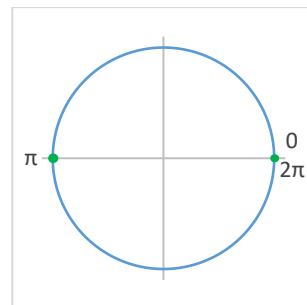
$$\cos x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

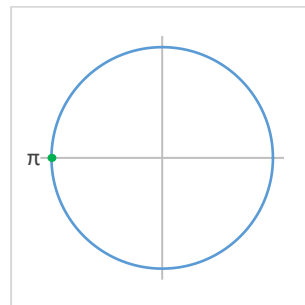


$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_4 = \frac{\pi}{3}, x_5 = \frac{5\pi}{3}$$



$$\rightarrow \cos x = -1$$



$$x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. minta ZH – 6. feladat

Mennyi az $a = (3, 3\sqrt{2})$ és $b = (\sqrt{2}, 1)$ vektorok által közbezárt szög szinusza?

$$\underline{a} = (3, 3\sqrt{2}) \quad \underline{b} = (\sqrt{2}, 1) \quad \sin \alpha = ?$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$\underline{a} = (a_1, a_2) \quad \underline{b} = (b_1, b_2)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$\rightarrow \cos x = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \cdot 1 = 6\sqrt{2}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 + 18} = \sqrt{27}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$$

$$\cos x = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{27}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{81}} = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

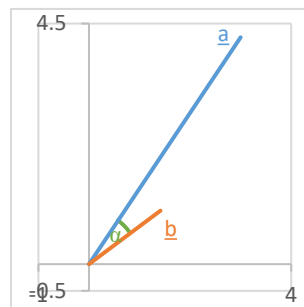
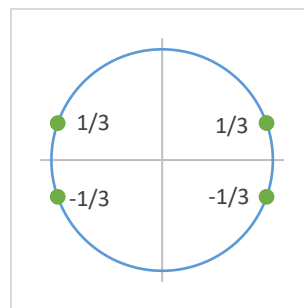
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$|\sin x| = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{3}$$

mivel $\underline{a}$ és $\underline{b}$ az 1. síknegyedre esnek $\rightarrow \alpha$ hegyesszög $\rightarrow$ megoldás: $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

$\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ nem lehet $\leftarrow 0 \leq \alpha \leq \pi$



2. minta ZH – 7. feladat

Adottak az $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ és $C(2, 5)$ pontok. Határozza meg az ABC háromszög A csúcsból induló magasságvonalának az origótól való távolságát!

1. lépés: m_a egyenlete:

$$A(1, 2) \in m_a$$

$$\text{az egy normálvektora } \underline{n}_1 = \overrightarrow{BC} = (-3, 6) \parallel (1, -2)$$

$$\rightarrow (1, -2) \text{ is normálvektor}$$

$$\rightarrow m_a: x - 2y = 1 - 2 \cdot 2$$

$$x - 2y = -3$$

2. lépés: $O(0,0)$ -n érkező, m_a -ra merőleges egyenes egyenlete

$$\underline{v}_e = \overrightarrow{BC} = (-3, 6) \perp (6, 3) \parallel (2, 1) = \underline{n}_e$$

$$e: 2x + y = 0$$

3. lépés: $T = e \cap m_a$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ 2x + y = 0 \end{array} \right\}$$

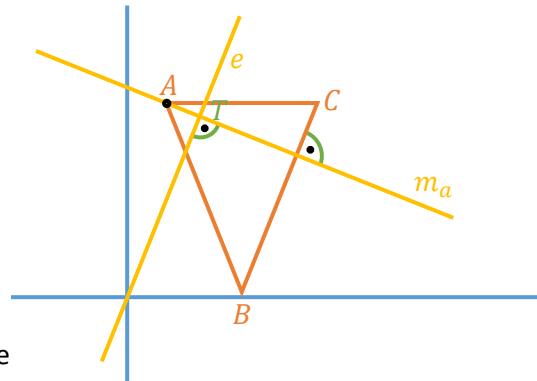
$$2x + y = 0 \rightarrow y = -2x$$

$$x + 4x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{5}, y = \frac{6}{5}$$

$$T\left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

4. lépés: origótól való távolság

$$d(\pi, m_a) = |\overrightarrow{OT}| = \left| \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right) \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+36}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$



2. minta ZH – 8. feladat

András, Bence és Dani kezében 1-1y 32 lapos magyar kártyapakli van. Mindannyian találomra húznak egy-egy kártyát a saját paklijukból. Mi annak a valószínűsége, hogy a három gyerek közül pontosan egynél van zöld? (A magyar kártyában nyolc zöld van.)

pakli: 8 zöld, 24 nem zöld

összes esetek száma: $32 \cdot 32 \cdot 32$

$$\frac{\checkmark}{A} \cdot \frac{X}{B} \cdot \frac{X}{C} \quad \frac{X}{A} \cdot \frac{\checkmark}{B} \cdot \frac{X}{C} \quad \frac{X}{A} \cdot \frac{X}{B} \cdot \frac{\checkmark}{C}$$

8-féle $\checkmark$, 24-féle X

kedvező esetek száma: $3 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 24$

$$p = \frac{3 \cdot 8 \cdot 24^2}{32^3}$$

Gyakorlás

Trigonometria feladat

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x - 2 \sin x = 1 \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cos^2 x - 2 \sin x = 1$$

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x = 1$$

$$3 \cdot (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x - 2 \sin x = 1$$

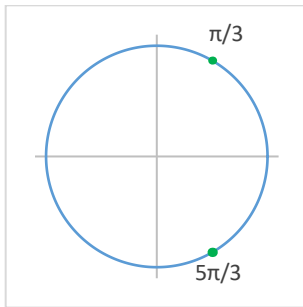
$$3 - 3 \sin^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x = 1$$

$$-4 \sin^2 x - 2 \sin x + 2 = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

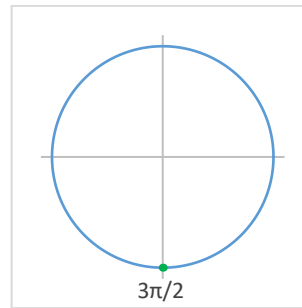
$$\sin x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$



$$\rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{5\pi}{3}$$

$$\sin x = -1$$



$$\rightarrow x_3 = -\frac{3\pi}{2}$$