

1. feladat (25 pont)

$$f(x) = \frac{\sin(1-x)}{x^2-1} \quad (\mathbb{R} \text{ lehető legbővebb részhalmazán értelmezve})$$

Vizsgálja meg, hogy az f függvény hol folytonos, hol nem, és a szakadási helyeken a bal és jobboldali határértékek kiszámolása után állapítsa meg azok jellegét!

A nevező: $x^2-1 = (x+1)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ / $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ ②
 D_f -en f folytonos, mert folytonos függvények hányadosa, és a nevező nem 0. ③

-1-ben:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x+1} \cdot \frac{\sin(1-x)}{x-1} \right) = \pm\infty \quad \text{8} \quad \Rightarrow \text{Másodfajú szakadás} \quad \text{2}$$

$\frac{\sin 2}{-2} < 0$

+1-ben:

$$\lim_{x \rightarrow +1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1^+} \left(\frac{\sin(1-x)}{1-x} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x+1} \right) = -\frac{1}{2} \quad \text{8}$$

$\Rightarrow$ Elsőfajú, megszüntethető szakadás ②

2. feladat (7+7=14 pont)

Határozza meg a következő függvények deriváltját! (Számolási szabályokkal.)

(a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arsh}(x^2+2)$

(b) $g(x) = \frac{x^3 \ln(x)}{x^2+2}$

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{arsh}(x^2+2) + \sqrt{x} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1+(x^2+2)^2}}$ ⑦

b) $g'(x) = \frac{(3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x})(x^2+2) - x^3 \ln(x) \cdot 2x}{(x^2+2)^2}$ ⑦

3. feladat (9+17=26 pont)

Határozza meg a következő határértékeket!

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{e^{2x} - 1} = ?$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right) = ?$$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{e^{2x} - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos(5x)}{2e^{2x}} = \frac{5}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - (x-1)}{(x-1) \ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + \frac{x}{x-1} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x \ln x + x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}$

4. feladat (15+20=35 pont)

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$g(x) = (1+x)e^{-x}; \quad D_g = \mathbb{R}$$

(a) Vizsgálja meg az f függvényt monotonitás szempontjából! Határozza meg a legbővebb monotonitási intervallumokat, a lokális szélsőértékeket és azok típusát!

a) $f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

x	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x$
$f'(x)$	+	0	-	$\nearrow$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

$$g(x) = (1+x)e^{-x}; \quad D_g = \mathbb{R}$$

(b) Vizsgálja meg a g függvényt konvexitás szempontjából! Határozza meg a legbővebb konvexitási/konkavitási intervallumokat és az inflexiós pontokat!

$$b) \quad g'(x) = e^{-x} - (1+x)e^{-x} = -xe^{-x} \quad (5)$$

$$g''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x} \quad (5)$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$x < 1$	1	$1 < x$
f''	$- \quad (2)$	$0 \quad (2)$	$+ \quad (2)$
f	$\cap \quad (1)$	$\text{inflex. pont} \quad (2)$	$\cup \quad (1)$

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)

Határozza meg a következő függvény deriváltját minden $x \in \mathbb{R}$ pontban!

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

$x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

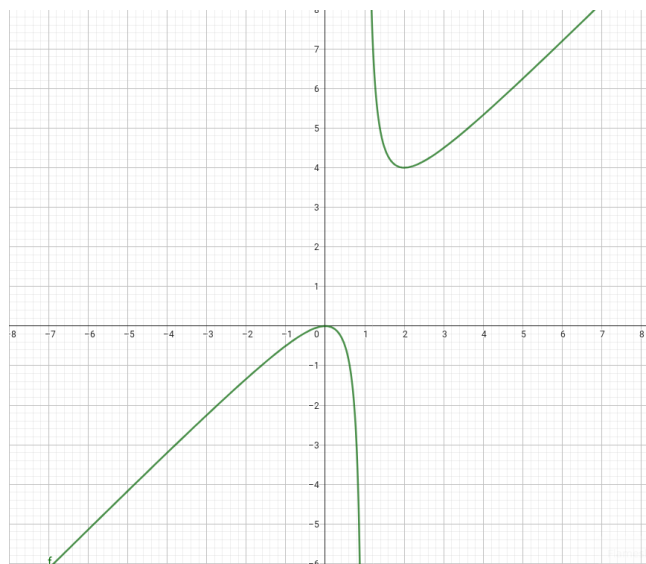
$x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0 \quad (2)$$

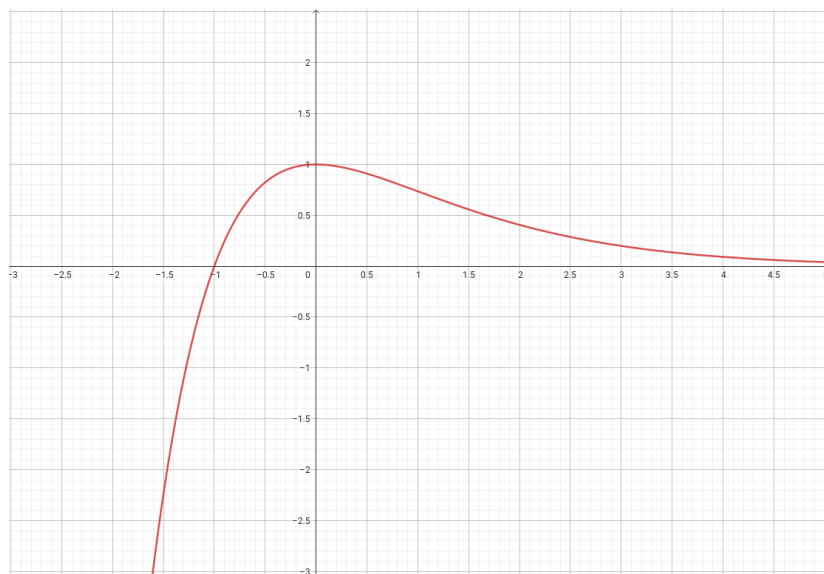
$\begin{matrix} \text{kerülte} \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$

Az alfa variáns 4. és 5. feladatában szereplő függvények grafikonjai:

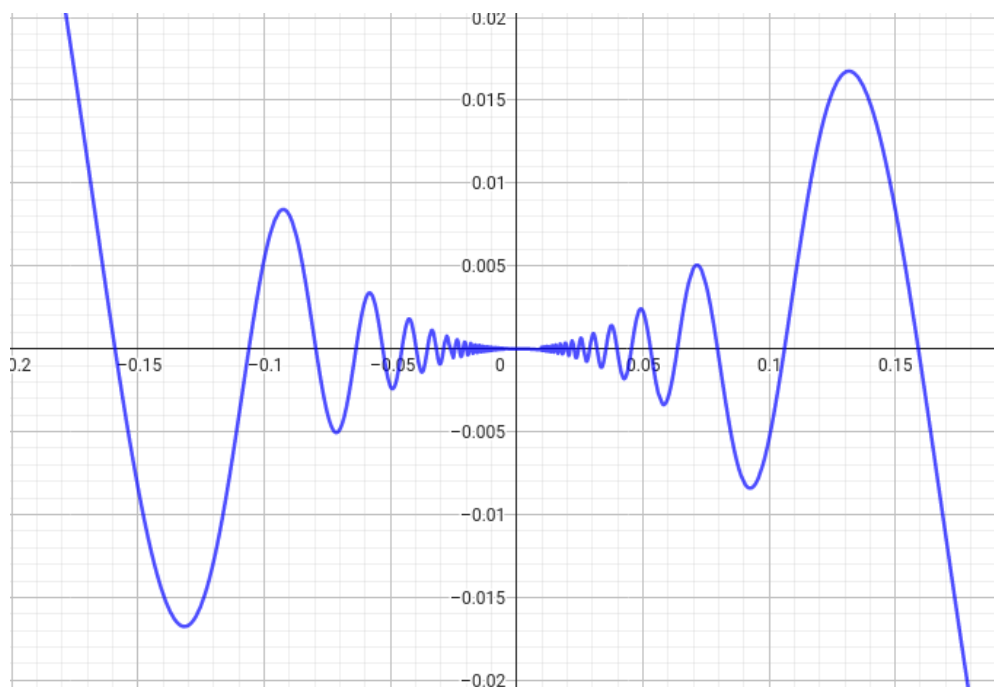
$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$



$$g(x) = (1+x)e^{-x}; \quad D_g = \mathbb{R}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$



1. feladat (25 pont)

$$f(x) = \frac{\sin(x+1)}{1-x^2} \quad (\mathbb{R} \text{ lehető legbővebb részhalmazán értelmezve})$$

Vizsgálja meg, hogy az f függvény hol folytonos, hol nem, és a szakadási helyeken a bal és jobboldali határértékek kiszámolása után állapítsa meg azok jellegét!

$$1-x^2 = (1-x)(1+x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\} \quad (2)$$

f a D_f -en folytonos, mert folyt. fvk-ek hányadosa (3)

-1-ben:

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{\sin(x+1)}{x+1} \cdot \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \quad (8) \quad \text{Elsőfajta, megszüntethető} \quad (2)$$

+1-ben:

$$\lim_{x \rightarrow +1^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow +1} \left(\frac{1}{1-x} \cdot \frac{\sin(x+1)}{1+x} \right) = \pm \infty \quad (8) \quad \text{Másodfajta} \quad (2)$$

2. feladat (7+7=14 pont)

Határozza meg a következő függvények deriváltját! (Számolási szabályokkal.)

(a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arch}(x^3 + 5)$

(b) $g(x) = \frac{x^2 \ln(x)}{x^4 + 1}$

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{arch}(x^3 + 5) + \sqrt{x} \frac{3x^2}{\sqrt{(x^3 + 5)^2 - 1}} \quad (7)$

b) $g'(x) = \frac{(2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x})(x^4 + 1) - x^2 \ln(x) \cdot 4x^3}{(x^4 + 1)^2} \quad (7)$

3. feladat (9+17=26 pont)

Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{e^{5x} - 1} = ?$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{x-1} \right) = ?$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{e^{5x} - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(3x)}{5e^x} = \frac{3}{5} \quad (2) \quad (3) \quad (3) \quad (1)$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{x-1} \right) = ? = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-x \ln x}{(x-1) \ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\ln x - \frac{x}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x \ln x}{x \ln x + x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\ln x - 1}{\ln x + 1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

4. feladat (15+20=35 pont)

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad g(x) = (1-x)e^x; \quad D_g = \mathbb{R}$$

(a) Vizsgálja meg az f függvényt monotonitás szempontjából! Határozza meg a legbővebb monotonitási intervallumokat, a lokális szélsőértékeket és azok típusát!

(b) Vizsgálja meg a g függvényt konvexitás szempontjából! Határozza meg a legbővebb konvexitási/konkavitási intervallumokat és az inflexiós pontokat!

$$a) f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$$

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x$
f'	+	0	-	+	-	0	+
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	+	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

$$b) g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$$

$$g''(x) = -e^x - xe^x = -(1+x)e^x$$

x	$x < -1$	-1	$-1 < x$
f''	+	0	-
f	$\cup$	inflex. pont	$\cap$

5. feladat (10 pont, IMSC-seknek javasolt.)

Határozza meg a következő függvény deriváltját minden $x \in \mathbb{R}$ pontban!

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

$x \neq 0$:

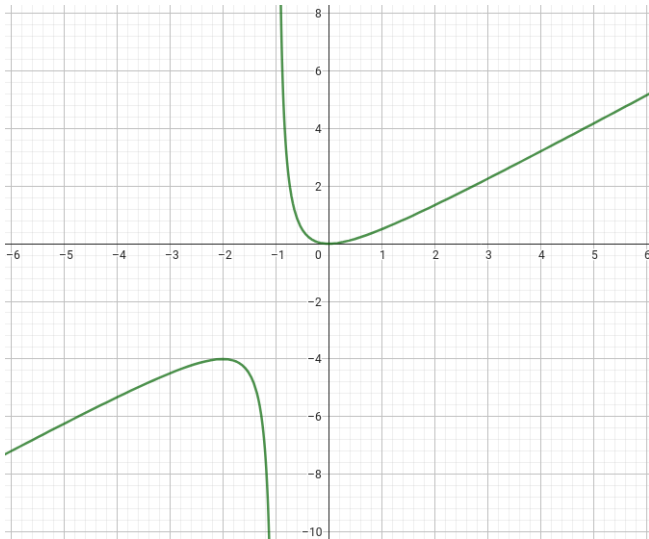
$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$x = 0$:

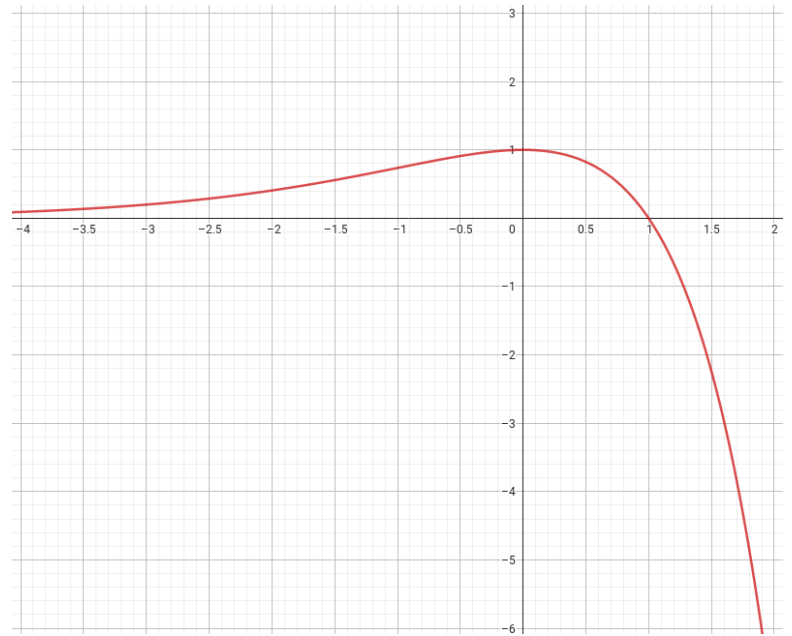
$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

A béta variáns 4. és 5. feladatában szereplő függvények grafikonjai:

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$



$$g(x) = (1-x)e^x; \quad D_g = \mathbb{R}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

