

## Vizsgadolgozat

1. Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:
  - (a) Mikor mondjuk azt, hogy az  $A_1, \dots, A_n$  események teljes eseményrendszert alkotnak? ( $n > 0$ )
  - (b) Mondjuk ki az eloszlásfüggvény karakterizációjára vonatkozó tételt. (Azaz pontosan milyen tulajdonságok határozzák meg, hogy egy  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  függvény egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye-e)?
2. Petra és a kishúga kikészítették az ablakba a szépen kipucolt csizmájukat, amelyekbe a Mikulás hozott is sok finomságot. De a lányok a hét végére már majdnem mindent fel is faltak, csak Petra csizmájában maradt még három ezüst- és három aranypapíros szaloncukor. Ezek közül találmra hármat átrakott szomorkodó kishúga kiürült csizmájába, majd mindkét lány kivett a saját csizmájából egy-egy szaloncukrot. Feltéve, hogy azonos színű szaloncukrot vettek ki, mekkora a valószínűsége annak, hogy a Petra által áttett szaloncukrok között pontosan két aranyszínű volt?
3. Egy projektorhoz összesen 150 égőnk van, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású 3 óra várható értékkel. Az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett.
  - (a) Közelítőleg mennyi a valószínűsége annak, hogy 462 óra után még van működő égőnk?
  - (b) Milyen várható élettartamú égőket kellene vásárolnunk, hogy ez a valószínűség legalább 0.85 legyen?
4. Kétszer dobunk egy dobókockával. Jelölje  $X$  a kisebbik,  $Y$  pedig a nagyobbik dobott számot.
  - (a) Adjuk meg  $X$  és  $X$  együttes eloszlását. Független-e a két valószínűségi változó?
  - (b) Legyen  $Z = 2X$  és  $W = Y - 1$ . Adjuk meg  $Z$  és  $W$  kovariancia mátrixát.
5. Legyenek  $X \sim N(2; 4)$  és  $Y \sim U(0, 2)$  független valószínűségi változók, és legyen

$$Z = 2X \ln Y + X^2 Y^2 - 3Y$$

Számoljuk ki az  $\mathbb{E}(Z | Y)$  regressziót.

- 6.\* Legyen  $(X, Y) \sim N(\underline{m}, \underline{\Sigma})$  kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó, ahol

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (a) Határozzuk meg a  $\mathbb{P}(Y > 2)$  valószínűséget.
- (b) Legyen  $W = X - 2Y + 5$  és  $Z = 3X + Y - 2$ . Határozzuk meg  $W$ -nek  $Z$ -re vett lineáris regresszióját.

---

**Tudnivalók:** A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítjük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

