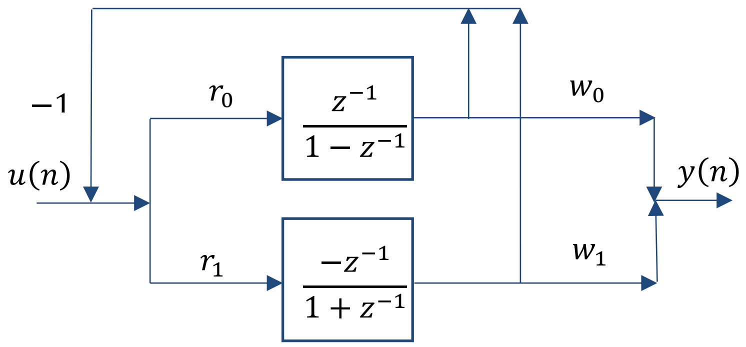
Méréselmélet 2. zárthelyi 2021.05.11.

1. A $H(z)=\frac{a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$ átviteli függvénnyel jellemezhető rendszer állapotváltozóit kellene megbecsülnünk. Vélelmezzük, hogy a rendszer belső struktúrája a rezonátoros számítási struktúrának felel meg $z_0=1$ és $z_1=-1$ pozíciójú rezonátorokkal. Bemenetén multiszinuszos gerjesztést alkalmazunk. A paramétereket ismertnek tételezzük fel: $a_1=a_2=0.25$, $b_1=-1$, $b_2=0.5$. Rajzolja fel a vélelmezett rendszer jelfolyamgráfját, és határozza meg az abban szereplő paraméterek számértékét (max. 3 pont)! Tervezzen olyan megfigyelőt (azaz számítsa ki a megfigyelő ismeretlen paramétereit), amely képes a vizsgált rendszer állapotváltozóinak a lehető legrövidebb időn belüli meghatározására (max. 4 pont)! (A megfigyelési zaj elhanyagolható!) Ellenőrizze, hogy teljesül-e a hibarendszer sajátértékeire vonatkozó feltétel (max. 2 pont)!

Megoldás:

A vélelmezett rendszer jelfolyamgráfja



$$H(z)=\frac{a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}=\frac{\frac{r_0z^{-1}}{1-z^{-1}}w_0-\frac{r_1z^{-1}}{1+z^{-1}}w_1}{1+\frac{r_0z^{-1}}{1-z^{-1}}-\frac{r_1z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{(1+z^{-1})r_0z^{-1}w_0-(1-z^{-1})r_1z^{-1}w_1}{1-z^{-2}+(1+z^{-1})r_0z^{-1}-(1-z^{-1})r_1z^{-1}}=$$

$$=\frac{(r_0w_0-r_1w_1)z^{-1}+(r_0w_0+r_1w_1)z^{-2}}{1+(r_0-r_1)z^{-1}+(r_0+r_1-1)z^{-2}}$$

$r_0-r_1=b_1$, $r_0+r_1-1=b_2$, ahonnan

$$r_0=\frac{1+b_1+b_2}{2}=0.25, r_1=\frac{1-b_1+b_2}{2}=1.25,$$

ill.

$$w_0=\frac{a_1+a_2}{1+b_1+b_2}=1, w_1=\frac{-a_1+a_2}{1-b_1+b_2}=0,$$

Az állapotváltozós leírás:

$$\begin{bmatrix}x_0(n+1)\\x_1(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-r_0 & -r_0\\ r_1 & -1+r_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0(n)\\x_1(n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}r_0\\-r_1\end{bmatrix}u(n)=\boldsymbol{Ax}(n)+\boldsymbol{B}u(n)$$

$$y(n)=\begin{bmatrix}w_0 & w_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0(n)\\x_1(n)\end{bmatrix}=\boldsymbol{Cx}(n)$$

A véges lépésben történő konvergencia feltétele, hogy

$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})^2=\boldsymbol{0}$ teljesüljön. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.75 & -0.25\\1.25 & 0.25\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}g_0\\g_1\end{bmatrix}$

Egyenértékű feltétel, hogy a megfigyelő összes sajátértéke nulla.

$$\begin{bmatrix} 0.75-g_0 & -0.25 \\ 1.25-g_1 & 0.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.75-g_0 & -0.25 \\ 1.25-g_1 & 0.25 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (0.75-g_0)^2 - 0.25(1.25-g_1) & -0.25(0.75-g_0) - 0.25^2 \\ (1.25-g_1)(0.75-g_0) + 0.25(1.25-g_1) & -0.25(1.25-g_1) + 0.25^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ellenőrzésképpen:

$$\begin{bmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A hibarendszer összes sajátértéke nulla feltétel:

$$det\begin{bmatrix} \lambda - 0.75 + g_0 & 0.25 \\ -1.25 + g_1 & \lambda - 0.25 \end{bmatrix} = (\lambda - 0.75 + g_0)(\lambda - 0.25) - 0.25(-1.25 + g_1) =$$
$$= \lambda^2 + \lambda(1 - g_0) + 0.5 - 0.25(g_0 + g_1) = 0$$

Ebből is $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Mutassa be a skalár Kalman prediktor modelljét és zajparamétereit! (max. 2 pont)! Tanulmányainkból tudjuk, hogy a rekurzív becslő egyenletei:

$$\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + \beta(n)(y(n) - c\hat{x}(n)),\ \hat{y}(n) = c\hat{x}(n)$$

ahol az $E\{e^2(n+1)\} = p(n+1)$ négyzetes hiba minimumát a következő iteratív számítással beállított $\beta(n)$ súlyozással kapjuk:

$$\beta(n) = acp(n)[c^2p(n) + \sigma_n^2]^{-1},\ p(n+1) = a(a - \beta(n)c)p(n) + \sigma_w^2$$

Határozza meg az állapotbecslés négyzetes hibáját az állandósult állapot elérését követően, feltételezve, hogy $a^2 = 0.5$, $c = 1$, $\sigma_w^2 = \sigma_n^2$ (max. 4 pont)! (Használja fel, hogy az állandósult hiba elérését követően a négyzetes hiba már nem változik.)

Megoldás:

$$x(n+1) = ax(n) + w(n),\ y(n) = cx(n) + n(n)$$

ahol $w(n)$ az ún. rendszerzaj, amelyre $E[w(n)] = 0$, $E[w(j)w(k)] = \sigma_w^2$, ha $j = k$, egyébként 0, $n(n)$ az ún. megfigyelési zaj, amelyre $E[n(n)] = 0$, $E[n(j)n(k)] = \sigma_n^2$, ha $j = k$, egyébként 0. $x(n) = 0, w(n) = 0$, ha $n < 0$.

$$E[w(n)x(n)] = 0\ E[n(n)\hat{x}(n)] = 0\ E[w(n)n(n)] = 0,\ \forall n.$$

$p(n+1) = p(n) = p$ jelöléssel: $\beta = \frac{acp}{c^2p+\sigma_n^2}$, és $p = a\left(a - \frac{acp}{c^2p+\sigma_n^2}c\right)p + \sigma_w^2 = \frac{a^2\sigma_n^2}{c^2p+\sigma_n^2}p + \sigma_w^2$, ahonnan

$p^2 + p\left[\frac{1-a^2}{c^2}\sigma_n^2 - \sigma_w^2\right] - \frac{1}{c^2}\sigma_w^2\sigma_n^2 = 0$ egyenlet pozitív gyöke adja a megoldást. Behelyettesítve:

$p^2 - p[0.5\sigma_w^2] - \sigma_w^4 = 0$; $p_{1,2} = \frac{0.5\sigma_w^2 \pm \sigma_w^2\sqrt{4.25}}{2}$; $p \approx 1.28\sigma_w^2$

3. Adja meg annak a jelnek a diszkrét időfüggvényét, amelyet az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-j}{2}, \frac{1+j}{2}, \frac{1}{2}\right)$ értékű Fourier transzformált jellemez (max. 3 pont)!

Megoldás:

$$\frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}0n} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1-j}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}2n} + \frac{1+j}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}3n} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}4n} =$$

$$= \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}0n} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1-j}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}2n} + \frac{1+j}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}2n} =$$

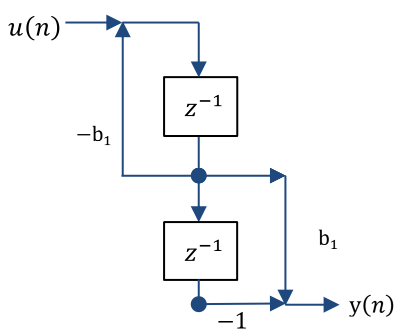
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}2n} + \frac{1}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}2n} - \frac{j}{2} * e^{+j\frac{2\pi}{5}2n} + \frac{j}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}2n} =$$

$$= 1 + cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right) + sin\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

4. Hogyan kell módosítani az 1. feladatban szereplő átviteli függvény paramétereit annak érdekében, hogy az átviteli függvény mindentáteresztő tulajdonságú legyen (max. 2 pont)? Rajzolja fel az ennek megfelelően módosított átviteli függvényt megvalósító direkt struktúra blokkvázlatát (max. 2 pont)! Bizonyítsa be, hogy a módosított $H(z)$ átviteli függvény mindentáteresztő tulajdonságú (max. 1 pont)! Valósítsa meg ezt az átviteli függvényt másodfokú direkt struktúrájú rezonátorral is (max. 3 pont)! Rajzolja le mindkét implementáció transzponáltjának blokkvázlatát is (max. 2 pont)!

Megoldás:

Ahhoz, hogy a zérus(ok) és a pólus(ok) egymás tükörképei legyenek az egységsugarú körre vonatkoztatva, a $H(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$ átviteli függvényben $b_2 = 0, a_2 = 1, a_1 = b_1$ beállítás szükséges azzal, hogy az átviteli függvény előjele szabadon megválasztható ($a_2 = \pm 1, a_1 = \pm b_1$). A továbbiakban a pozitív előjelű változatot valósítjuk meg.



Az átvitel abszolút értékének négyzete a komplex konjugálttal történő szorzás után:

$$|H(z)|^2 = z^{-1}\frac{z^{-1} + b_1}{1 + b_1 z^{-1}} z \frac{z + b_1}{1 + b_1 z} = \frac{1 + b_1(z + z^{-1}) + b_1^2}{1 + b_1(z + z^{-1}) + b_1^2} = 1$$

Rezonátor átviteli függvény:

$$H(z) = 2r_m \frac{z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1}cos\varphi_m + z^{-2}}$$

A visszacsatolt rezonátoros struktúra átviteli függvénye:

$$\frac{2r_m \frac{z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1}cos\varphi_m + z^{-2}}}{1 + 2r_m \frac{z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1}cos\varphi_m + z^{-2}}} = \frac{2r_m(z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2})}{1 - 2(1 - r_m)z^{-1}cos\varphi_m + (1 - 2r_m)z^{-2}}$$

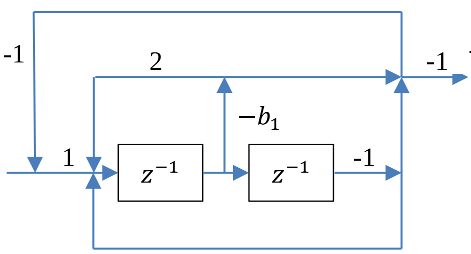
A kicsatolás: $w_m = -1$, mert a megvalósítandó átviteli függvény a $z_m = e^{j\varphi_m}$ helyen -1.

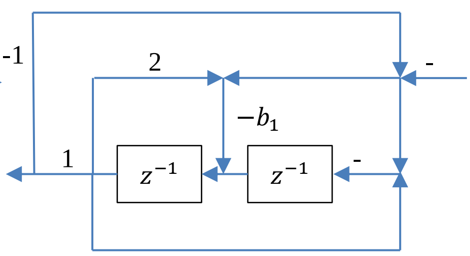
$$\frac{2r_m(z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2})}{1 - 2(1 - r_m)z^{-1}cos\varphi_m + (1 - 2r_m)z^{-2}}(-1) = \frac{z^{-2} + b_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$$

Az együtthatók egyeztetésével:

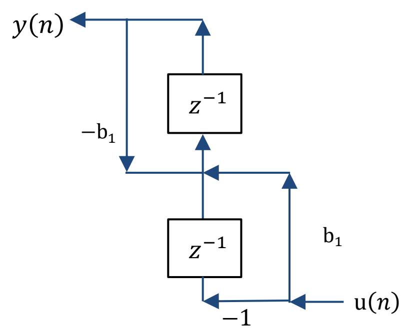
$$2r_m = 1, \qquad r_m = \frac{1}{2}, cos\varphi_m = -b_1$$

A rezonátoros megvalósítás és transzponáltja:





A direkt struktúra transzponáltja:



5. Bizonyítsa be, hogy az 4. feladatban szereplő rendszer belső energiáját a direkt struktúrájú rezonátor esetén $P_D = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix segítségével tudjuk megadni (max. 3 pont)! Milyen állítást tudunk megfogalmazni abszolút-érték csonkítás esetén ezekre a struktúrákra (max. 1 pont)? Adja meg a struktúra által tárolt energia kifejezését (max. 2 pont)!

Megoldás:

A 4. feladatban szereplő direkt struktúra állapot-, becsatolási és kicsatolási mátrixai:

$A = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [b_1 \quad 1]$

Igazolandó, hogy $A^T P_D A + C^T C = P_D$. Behelyettesítve:

$$\begin{bmatrix} -b_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix} [b_1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -b_1^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mivel a P_D mátrix nem diagonálmátrix, ezért abszolút-érték kvantálás esetén sem tudunk megfogalmazni olyan állítást, hogy a rendszer belső energiáját disszipálni fogja, és ezáltal a határciklus oszcillációk elkerülhetők.

$$E = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}_D \boldsymbol{x} = x_0^2 + 2b_1 x_0 x_1 + x_1^2$$

6. Jellemezze az $\frac{1}{N}(1 - z^{-N}) \frac{z^{-1}}{1 - z^{-2}} (1 + z^{-N})$ átviteli függvényű diszkrét rendszer amplitúdó- és fáziskarakterisztikáját a vonatkozó összefüggések levezetésével és grafikus illusztrációval (max. 4 pont)! Vizsgálja meg, hogy megvalósítható-e ez az átviteli függvény a rezonátoros struktúra alkalmazásával (max. 2 pont)?

Megoldás:

Az átviteli függvény $\frac{1}{N}(1 - z^{-2N}) \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}$ alakú, ami a frekvenciatartományban

$$\frac{1}{N} e^{-jN\omega T}\left(e^{jN\omega T} - e^{-jN\omega T}\right) \frac{e^{-j\omega T}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega T}\left(e^{j\frac{1}{2}\omega T} - e^{-j\frac{1}{2}\omega T}\right) e^{-j\frac{1}{2}\omega T}\left(e^{j\frac{1}{2}\omega T} + e^{-j\frac{1}{2}\omega T}\right)} = \frac{1}{2N} e^{-jN\omega T} \frac{sinN\omega T}{sin\frac{\omega T}{2} cos\frac{\omega T}{2}}$$

Az amplitúdókarakterisztika:

$$\frac{1}{2N} \left| \frac{sinN\omega T}{sin\frac{\omega T}{2} cos\frac{\omega T}{2}} \right|$$

Ez az amplitúdókarakterisztika hasonlóan néz ki, mint a $2N$ szélességű csúszó ablakos átlagoló amplitúdókarakterisztikája azzal a különbséggel, hogy a mintavételi frekvencia felénél is egységnyi az átvitel.

A fáziskarakterisztika:$-N\omega T$, π fázisugrásokkal ott, ahol $sinN\omega T$ előjelet vált, kivéve azokat a helyeket, ahol $sin\frac{\omega T}{2} cos\frac{\omega T}{2}$ is előjelet vált.

A $2N$ dimenziós rezonátoros struktúrának van olyan csatornája, amelynek átvitele:

$\frac{1}{2N}(1 - z^{-2N}) \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})}$, ill. $\frac{1}{2N}(1 - z^{-2N}) \frac{-z^{-1}}{(1 + z^{-1})}$. A két csatorna különbségét képezve a kívánt átvitelt kapjuk:

$$\frac{1}{2N}(1 - z^{-2N}) \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})} - \frac{1}{2N}(1 - z^{-2N}) \frac{-z^{-1}}{(1 + z^{-1})} = \frac{1}{N}(1 - z^{-2N}) \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}$$

Az elérhető pontszám: 40. Az elégségeshez 16 pont kell.