1. Feladat (5+6=11 pont)

(a) A defiícióval mutassa meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3-5n}{n^3+8} = 2$! ($N(\varepsilon)=$?)

(b) Határozza meg az $a_n = \sqrt{2n^4+n^2-2} - 2n^2$ sorozat határértékét!

2. Feladat (13 pont)

$$f(x) = \frac{x^3}{x-1}$$

Vizsgálja meg a függvényt monotonitás és konvexitás szempontjából! Hol van a függvénynek lokális szélsőértéke, inflexiós pontja?

3. Feladat (9+9=18 pont)

(a) $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x =$? (alkalmas helyettesítéssel); (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x =$?

4. Feladat (12 pont)

Adja meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = 32x + 18\mathrm{e}^{-2x}$$

5. Feladat (4+8=12 pont)

Tudjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor az $x_0 > 0$ pontban konvergens.

(a) Igazolja, hogy az $\{a_n x_0^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos!

(b) Igazolja, hogy a fenti hatványsor minden $x \in (-x_0, x_0)$ pontban abszolút konvergens!

6. Feladat * (7 pont) A g kétszer folytonosan deriválható, egyváltozós függvény változójának helyére írjunk $\dfrac{3y}{1+x^2}$-et, és az így kapott kétváltozós függvényt jelöljük $f(x,y)$-nal!

(a) $f'_x(x,y) =$?; (b) $f''_{xy}(x,y) =$?

7. Feladat * (6+4=10 pont)

(a) Egy ábrán ismertesse a gömbi polár-koordinátákat, és fejezze ki a derékszögű koordinátákat a gömbi polár-koordinátákkal!

(b) Számolja ki az R sugarú gömb térfogatát!

8. Feladat * (8+3+6=17 pont)

Legyen az f függvény Fourier-transzformáltja $F = \mathcal{F}[f]$.

(a) Fejezze ki az $x \mapsto f(x-a)$ függvény $\mathcal{F}[f(x-a)]$ Fourier-transzformáltját F-el! Bizonyítsa is be az egyenlőséget!

(b) Fejezze ki az $\mathcal{F}\left[f\left(\frac{x}{b}\right)\right]$ Fourier-transzforláltat F-el! (Bizonyítani nem kell.)

(c) $\mathcal{F}\left[f\left(\frac{x-3}{2}\right)\right] =$? (Az eredményt F-el adja meg!)

A $*$-al jelölt feladatokból legalább 12 pontot el kell érni!