1. feladat (10 pont)
Hol és milyen típusú szakadásai vannak a következő függvénynek? A szakadási helyeken határozza meg a bal és jobb oldali határértékeket!

$$f(x) = \frac{|x-3|\sin(x-2)}{x^2-5x+6}$$

Megoldás: Tanult tételek szerint f folytonos, így csak az értelmezési tartomány határán lehet szakadása, azaz a nevező zérushelyein $\boxed{\textbf{1p.}}$.

$x=2$: $\lim\limits_{x\to 2\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to 2\pm} \frac{|x-3|}{x-3}\frac{\sin(x-2)}{x-2} = -1\cdot 1 = -1.$ $\boxed{\textbf{3p.}}$
Mivel a féloldali határértékek léteznek, végesek és megegyeznek, ezért itt megszüntethető szakadás van. $\boxed{\textbf{1p.}}$

$x=3$: $\lim\limits_{x\to 3\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to 3\pm} \frac{|x-3|}{x-3}\frac{\sin(x-2)}{x-2} = \pm 1\cdot \sin 1 = \pm\sin 1.$ $\boxed{\textbf{4p.}}$
Mivel a féloldali határértékek léteznek, végesek de különbözőek, ezért itt véges ugrás van. $\boxed{\textbf{1p.}}$

2. feladat (7+4=11 pont)
A derivált definíciójának alapján határozza meg az

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

függvény deriváltját, és írja föl a függvény grafikonját az $x_0 = 2$ pontban érintő egyenes egyenletét!

Megoldás: $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ $\boxed{\textbf{3p.}}$ $= \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x+1)-3(x-1)}{(x-1)(x-a)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{-2}{x-1}$ $\boxed{\textbf{3p.}}$ $= -2$ $\boxed{\textbf{1p.}}$.
Az $x_0 = 2$-beli érintőegyenes: $y(x) = f'(2)(x-2) + f(2) = -2(x-2)+3$ $\boxed{\textbf{4p.}}$ $= -2x+7$.

3. feladat (4+4=8 pont)
Határozza meg a következő függvények deriváltját!

$$a)\quad f(x) = \sqrt{\frac{e^x+2}{x^2+1}}, \qquad b)\quad g(x) = e^{2x}\arccos(x^2+2).$$

Megoldás:

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^x+2}{x^2+1}}}\,\frac{e^x(x^2+1)-2x(e^x+2)}{(x^2+1)^2}$ $\boxed{\textbf{4p.}}$
2. $g'(x) = 2e^{2x}\arccos(x^2+2) - e^{2x}\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+2)^2}}2x$ $\boxed{\textbf{4p.}}$

4. feladat (5+5=10 pont)
Határozza meg a következő határértékeket!

$$a)\quad \lim_{x\to 0+} x^x = ?, \qquad b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{arsh}(2x^2)} = ?$$

Megoldás:

1. $\lim\limits_{x\to 0+}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0+} -x = 0$ $\boxed{\textbf{3p.}}$, ezért mivel e^x folytonos a 0-ban, $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$ $\boxed{\textbf{2p.}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{arsh}(2x^2)} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg} x\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sqrt{1+4x^4}}4x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sqrt{1+4x^4}}{2\cos^3 x} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\boxed{\textbf{5p.}}$

5. feladat (11 pont)
Vizsgálja meg, hogy hol konvex, konkáv az

$$f(x) = x^2e^{3x}$$

függvény! Hol van a függvénynek inflexiós pontja?

Megoldás: $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = 2xe^{3x} + x^2 3e^{3x}$, és $f''(x) = 2e^{3x} + 2x3e^{3x} + 2x3e^{3x} + x^2 9e^{3x} = e^{3x}(9x^2 + 12x + 2)$ $\boxed{\textbf{2p.}}$

$f''(x) = 0$ $\boxed{\textbf{1p.}}$ $\iff 9x^2 + 12x + 2 = 0 \iff x = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{3}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$.

	$]-\infty, \frac{-2-\sqrt{2}}{3}[$	$\frac{-2-\sqrt{2}}{3}$	$]\frac{-2-\sqrt{2}}{3}, \frac{-2+\sqrt{2}}{3}[$	$\frac{-2+\sqrt{2}}{3}$	$]\frac{-2+\sqrt{2}}{3}, \infty[$
f	konvex	inflexió	konkáv	inflexió	konvex $\boxed{\textbf{2p.}}$
f''	+	0	-	0	+ $\boxed{\textbf{2p.}}$

Az f függvény konvex a $]-\infty, \frac{-2-\sqrt{2}}{3}]$ és a $[\frac{-2+\sqrt{2}}{3}, \infty[$ intervallumon, illetve konkáv a $[\frac{-2-\sqrt{2}}{3}, \frac{-2+\sqrt{2}}{3}]$ intervallumon. Inflexiója van a $\frac{-2-\sqrt{2}}{3}$ és a $\frac{-2+\sqrt{2}}{3}$ pontokban. $\boxed{\textbf{3p.}}$