VIK, Műszaki Informatika
ANALÍZIS (1)   B kurzus

Numerikus sorok

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné dr.
Kónya Ilona

2001. szeptember

Szerkesztette: Győri Sándor

1. Numerikus sorok konvergenciája

A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen összeghez hozzárendelünk egy (s_n) számsorozatot a következő módon:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1}_{s_1} + a_2}_{s_2} + a_3}_{s_3} + \cdots + a_n}_{s_n} + \cdots$$

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k : \quad n\text{-edik részletösszeg}$$

E számsorozat határértékének segítségével definiáljuk a sor összegét az alábbiaknak megfelelően.

D A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és összege s, ha létezik a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = s \in \mathbb{R}$$

(véges) határérték.

A részletösszegek (s_n) sorozatának viselkedése szerint az alábbi esetek lehetségesek:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} s \in \mathbb{R}, & \text{az összeg konvergens} \\ \left.\begin{array}{r} +\infty, \\ -\infty, \\ \nexists, \end{array}\right\} & \text{az összeg divergens.} \end{cases}$$

Pl. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ esetén $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \qquad \text{(Divergens a sor.)}$$

Pl. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^k + \cdots$ divergens, mert

$$\left.\begin{array}{l} s_{2k+1} = 1 \to 1 \\ s_{2k} = 0 \to 0 \end{array}\right\} \implies (s_n) \text{ -nek 2 torlódási pontja van, a sor divergens.}$$

Pl.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} \quad \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1\,,$$

tehát a sor konvergens.

Pl.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1, \qquad \text{konvergens a sor.}$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{(harmonikus sor) divergens}}$

Ugyanis

$$s_{2^k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2} \to \infty$$

$$\lim_{k\to\infty} s_{2^k} = \infty \quad \implies \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$$

Ugyanis $s_n \geq s_{2^k}$, ha $n > 2^k$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

•••

(T) **Geometriai sor**

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & \text{ha } |q|<1 \\ \infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \text{divergens}, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

(B) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$

Ha $q = 1$:

$$s_n = n, \quad \text{ezért} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \infty .$$

Ha $q \neq 1$:

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Mivel $q^n \to 0$, ha $|q| < 1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}, \text{ ha } |q| < 1.$$

Mivel $q^n \to \infty$, ha $q > 1 \implies s_n \to \infty$, ha $q > 1$.

Ha $q = -1$:

q^n-nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1 = 1$, $t_2 = -1$.

$\implies$ s_n-nek is 2 torlódási pontja van: 0 és 1, tehát divergens.

Ha $q < -1$:

q^n-nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1 = -\infty$, $t_2 = \infty$.

$\implies$ s_n-nek is 2 torlódási pontja van: $-\infty$ és ∞, tehát divergens.

■

(Pl.) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k + 3^{k+1}}{4^{k+2}} = ?$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^k}{4^{k+2}} + \frac{3^{k+1}}{4^{k+2}} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \right)$$

$$s_n = \frac{1}{16} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 3 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \right) \to \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + 3 \cdot \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} \right) = \frac{5}{8}$$

(Pl.) Milyen x-re konvergens a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\log_2 x)^k$ sor?

$$q = \log_2 x, \quad |\log_2 x| < 1 \iff -1 < \log_2 x < 1,$$
$$2^{-1} < x < 2, \quad \text{azaz } x \in (2^{-1}, 2).$$

●●●

(M) Ha a sorban *véges sok* tagot elhagyunk vagy megváltoztatunk, akkor a konvergencia ténye nem változik, konvergens sorból konvergens sort, divergens sorból divergens sort kapunk. Az összeg értéke természetesen megváltozik.

(M) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k$ és $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$ $(c \neq 0)$ egyszerre konvergens illetve divergens.

(Ugyanis $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ és $s_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n} c \cdot a_k$ egyidejűleg konvergens illetve divergens.)

●●●

A konvergencia szükséges és elégséges feltétele (Cauchy kritérium):

(T) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ M(\varepsilon)$:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > M(\varepsilon) \text{ és } k \in \mathbb{N}^+$$

(B) Triviálisan igaz, hiszen a számsorozatok konvergenciájára tanult szükséges és elégséges tétel alkalmazható. (s_n) akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists\, M(\varepsilon)$, hogy $n, m > M(\varepsilon)$ esetén $|s_m - s_n| < \varepsilon$.
Legyen $m > n$ és $m = n + k$, ekkor

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon\,,$$

ha $n > M(\varepsilon)$ és $k \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges. ■

(Pl.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ konvergens

Ugyanis

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{n+k} \right| =$$

$$
= \begin{cases}
\underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)}_{>0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)}_{>0} = \\
= \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}_{>0} - \dots - \underbrace{\left(\frac{1}{n+k}\right)}_{>0}, \qquad \text{ha } k \text{ páros} \\
\\
\underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)}_{>0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1}\right)}_{>0} + \frac{1}{n+k} = \\
= \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}_{>0} - \dots - \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)}_{>0}, \qquad \text{ha } k \text{ páratlan}
\end{cases}
$$

Vagyis

$$|s_{n+k} - s_n| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad \Longrightarrow \quad N(\varepsilon) \geq \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$$

1.1. A konvergencia szükséges feltétele

T $\boxed{\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\lim_{k\to\infty} a_k = 0\right)}$

B A Cauchy kritériumból:

$$|s_{k+1} - s_k| = |a_{k+1}| < \varepsilon, \quad \text{ha } k > N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad a_k \to 0$$

Vagy

$$s_k = s_{k-1} + a_k \quad \Longrightarrow \quad a_k = s_k - s_{k-1} \to s - s = 0$$

■

M A feltétel nem elégséges. Például a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor a feltételt teljesíti, mégis divergens.

D $\boxed{\sum^{\infty} a_k \text{ sor } \textit{abszolút konvergens}, \text{ ha } \sum^{\infty} |a_k| \text{ konvergens.}}$

Pl. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ abszolút konvergens.

(Konvergens geometriai sorokról van szó, ahol a kvóciens $-\dfrac{1}{2}$ illetve $\dfrac{1}{2}$.)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ nem abszolút konvergens, de konvergens.

D $\boxed{\begin{array}{l}\textit{Feltételesen konvergens sor:}\\ \quad\text{a konvergens, de nem abszolút konvergens sor}\end{array}}$

Ilyen pl. a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ sor.

Ugyanis beláttuk, hogy ez a sor konvergens, de a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ sor divergens.

T $\boxed{\begin{array}{l}\left(\sum^{\infty}|a_k| \text{ konvergens}\right) \quad\Longrightarrow\quad \left(\sum^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right)\\ \text{Tehát az abszolút konvergenciából következik a konvergencia.}\end{array}}$

B Ha $\sum^{\infty}|a_k|$ konvergens, akkor teljesül rá a Cauchy kritérium, továbbá

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}| \;\le\; |a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+k}|$$

miatt

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+k}| \le \underbrace{||a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+k}|| < \varepsilon, \quad \text{ha } \; n > M(\varepsilon),\; k\in\mathbb{N}^+}_{\text{Cauchy kritérium } \sum^{\infty}|a_k|\text{-ra}}$$

Így $\sum^{\infty} a_k$-ra is teljesül a szükséges és elégséges tétel (Cauchy kritérium), tehát konvergens. ■

2. Pozitív tagú sorok

Ⓣ

> (i) Egy pozitív tagú sor részletösszegei monoton növekedőek.
>
> (ii) Egy pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

Ⓑ

(i) Ha $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, akkor $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \ \ \forall\, n$-re.

(ii) a) Ha a sor konvergens, akkor (s_n) konvergens $\implies$ (s_n) korlátos

b) Ha (s_n) korlátos, akkor $(s_n) \nearrow$ miatt (s_n) konvergens.

■

Ⓜ Pozitív tagú sor vagy konvergens, vagy ∞-nel egyenlő. Ez nem igaz általánosságban egy váltakozó előjelű sorra, ahol a részletösszegek sorozatának lehet több torlódási pontja (pl. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k$).

Ⓣ

> $a_k > 0;\ a_k \geq a_{k+1}$ feltételek mellett
>
> a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} a_{2^l} \cdot 2^l$ is konvergens

Ⓑ (¬B)
(Megtekinthető Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai című könyvében.)

Példák a tétel alkalmazására:

Pl.

> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, ha $\alpha > 1$. Egyébként divergens.

Ha $\alpha \leq 0$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \not\to 0$

A konvergencia szükséges feltétele nem teljesül $\implies$ divergens a sor.

Ha $\alpha > 0$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \searrow$, így alkalmazható az előző tétel:

Vagyis $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ és $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l$ egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha l}} \frac{1}{2^{-l}} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{l\alpha - l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha-1)l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right)^l = \sum_{l=1}^{\infty} q^l$$

Geometriai sort kaptunk, mely csak akkor konvergens, ha

$$|q| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1.$$

Tehát a konvergencia csak akkor teljesül, ha $\alpha - 1 > 0$, vagyis $\alpha > 1$.

(Vigyázat! A két sor összege nem azonos, tehát így nem tudjuk megállapítani a $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor összegét, csak a konvergenciát tudjuk vizsgálni.)

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n} \quad \text{divergens}}$

$$\text{Ugyanis:} \qquad \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot \log_2 2^l} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l} \qquad \text{divergens.}$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log_2 n)^p} \quad p > 1 \ \text{konvergens, egyébként divergens}}$

$p > 0$ esetén alkalmazható az előző tétel:

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l)^p} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l^p} \qquad 0 < p \le 1: \ \text{div.}; \quad 1 < p: \ \text{konv.}$$

($p \le 0$ esete HF. Pl. minoráns kritériummal — lásd később — megmutatható.)

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n} \quad \text{divergens}}$

A tétel alkalmazható.

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l) \cdot (\log_2 \log_2 2^l)} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \log_2 l} \quad \text{ez pedig divergens}$$

3. Pozitív tagú sorok konvergenciájával kapcsolatos elégséges kritériumok

- majoráns kritérium (csak konvergencia eldöntésére)
- minoráns kritérium (csak divergencia eldöntésére)
- hányados kritérium
- gyökkritérium
- integrál kritérium

Ezeket a kritériumokat kizárólag pozitív tagú sorokra alkalmazhatjuk. Így a szóbanforgó kritériumok hasznosak lehetnek az abszolút konvergencia eldöntésére (amiből következik az eredeti — nem feltétlenül pozitív tagú — sor konvergenciája is.)

3.1. Majoráns kritérium

T $\boxed{\text{Ha } 0 < a_n \le c_n \quad \forall\, n\text{-re} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konvergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}}$

B A megfelelő részletösszegek sorozatára a feltétel miatt fennáll, hogy

$$s_n^a \le s_n^c.$$

Továbbá $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergenciája miatt $s_n^c \le K \quad \Longrightarrow \quad s_n^a$ korlátos és pozitív tagú a sor

$\Longrightarrow \quad \sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ konv. ∎

3.2. Minoráns kritérium

T $\boxed{\text{Ha } 0 \le d_n \le a_n \quad \forall\, n\text{-re} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{ divergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens}}$

B $s_n^a \ge s_n^d \to \infty \quad \Longrightarrow \quad s_n^a \to \infty$ (spec. rendőrelv) ∎

Ⓜ Mindkét esetben elegendő, ha a feltétel $\forall\, n$ helyett $n \geq N_0$-ra teljesül.

($\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty} a_n$ egyidejűleg konvergens ill. divergens, hiszen az első szumma részletösszegei $c = \sum\limits_{n=1}^{N_0-1} a_n$ konstanssal nagyobbak, mint a második szumma részletösszegei.)

Feladatok

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$
2. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2-\sqrt{n}}$
3. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log_2 n}$
4. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n^2}$
5. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2}-3}$
6. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-3}$
7. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n-3}$
8. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n+2^{n+1}}$
9. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n+n}{n\cdot 4^n-3}$
10. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$
11. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^6+3n^2-\sqrt{n}}$
12. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^7+n^2-n+3}$
13. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^5+n^3+1}{n^8-n^2+3}$
14. $\displaystyle\sum_{6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

3.3. Hányados kritérium

T_1

1. $(a_n > 0,\ \forall\, n) \wedge \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\ \forall\, n\right) \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.
2. $(a_n > 0,\ \forall\, n) \wedge \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \geq 1,\ \forall\, n\right) \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

B

1. Mivel $\quad a_{n+1} \le q\, a_n \le q^2\, a_{n-1} \le \cdots \le q^n\, a_1, \quad \forall\, n\,,$ ezért $\sum\limits_1^\infty a_n$-nek $\sum\limits_1^\infty q^{n-1}\, a_1$ konvergens majoránsa (geometriai sor, $0 < q < 1$) $\Longrightarrow$ $\sum\limits_1^\infty a_n$ konvergens.

2. Mivel $\quad a_{n+1} \ge q\, a_n \ge q^2\, a_{n-1} \ge \cdots \ge q^n\, a_1, \quad \forall\, n\,,$ ezért $\sum\limits_1^\infty a_n$-nek $\sum\limits_1^\infty q^{n-1}\, a_1$ divergens minoránsa (geometriai sor, $q \ge 1$) $\Longrightarrow$ $\sum\limits_1^\infty a_n$ divergens. ■

M_1 $\sum\limits_1^\infty a_n$ és $\sum\limits_{N_0}^\infty a_n$ egyidejűleg konvergens ill. divergens, ezért elég, ha a T_1 feltételei $\forall\, n \ge N_0$ teljesülnek.

M_2 T_1 (1)-nél nem elég megmutatni, hogy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, q-t is kell találni.

(L. $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n}$).

T_1 (2)-nél viszont q megtalálása nem fontos. A tétel így is kimondható.

$$(a_n > 0) \,\wedge\, \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1,\ \forall\, n \ge N_0\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_1^\infty a_n \text{ div.}$$

Ekkor ugyanis:

$0 < a_n \le a_{n+1}$, tehát $a_n \nearrow$ (és $a_n > 0$) $\Longrightarrow$ $a_n \not\to 0$ (nem teljesül a szükséges feltétel) $\Longrightarrow$ $\sum\limits_1^\infty a_n$ divergens

A hányados kritérium egy kényelmesebben használható formában is kimondható:

T_{1^*}

1. $(a_n > 0, \forall\, n) \wedge \left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ konv.

2. $(a_n > 0, \forall\, n) \wedge \left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ div.

B

1. Legyen $\varepsilon = \dfrac{1-c}{2}$, így $q = c + \varepsilon < 1$. A határérték tulajdonsága miatt

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1\,, \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

   Ezért T_1 (1)-ből adódik, hogy $\sum\limits_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} a_n$ és így vele együtt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.

2. Legyen $\varepsilon = \dfrac{c-1}{2}$, így $q = c - \varepsilon > 1$. Ekkor $\exists\, N(\varepsilon)$, hogy

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1, \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

   Így T_1^* (2)-ből adódik az állítás. ■

T_1^* (2) állítása $c = \infty$ esetén is igaz. Ugyanis, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, akkor is található megfelelő q. (Pl. $q = 2$ is választható.)

M3 Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor nem tudtunk meg semmit a konvergenciáról. Lehet a sor konvergens és divergens is.

Pl. $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergens, és a $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ konvergens sorok esetén egyaránt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$

M4 A fenti tétel tovább finomítható. Bebizonyíthatók az alábbi állítások is:

$$\text{Ha } a_n > 0\ \forall n, \text{ és } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

$$\text{Ha } a_n > 0\ \forall n, \text{ és } \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

($\overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ a konvergenciáról nem mond semmit.)

3.3.1. Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

1. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{(2n+1)!}$

2. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{2^n}{3^{n+2}\,(n+2)!}$

3. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

4. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n!}{n^n}$

5. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n+2}{(n+1)^{n+3}}$

6. $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n^k}{n!},\quad k \in \mathbb{N}^+$

3.4. Gyökkritérium

T$_2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ha } \forall n > N\text{-re } a_n > 0 \text{ és} \\ 1.\ \sqrt[n]{a_n} \le q < 1 \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_N^\infty a_n \text{ konv.} \\ 2.\ \sqrt[n]{a_n} \ge 1 \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_N^\infty a_n \text{ div.} \end{array}}$$

B

1. $0 < a_n \le q^n$ és $\displaystyle\sum_N^\infty q^n$ konvergens $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_N^\infty a_n$ konvergens a majoráns kritérium miatt.

2. $a_n \ge 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n \not\to 0 \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_N^\infty a_n$ div.

■

M$_5$ $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ elég, ha végtelen sok n-re igaz. Nem kell, hogy $\forall\ n > N$-re teljesüljön. Ekkor már $\exists\ a_{n_r} \not\to 0$ részsorozat.

Ez a tétel is kimondható limeszes alakban:

T$_{2*}$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{\text{Ha } \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c \text{ és}} \\ c < 1 & \Longrightarrow & \displaystyle\sum^\infty a_n \text{ konvergens.} \\ c > 1 \text{ vagy } c = \infty & \Longrightarrow & \displaystyle\sum^\infty a_n \text{ divergens.} \end{array}}$$

B Hasonló a hányados kritériumnál látotthoz.

M $c = 1$ esetben nem használható a gyökkritérium (pl. $\sum\limits^{\infty} \frac{1}{n}$ és $\sum\limits^{\infty} \frac{1}{n^2}$).

Bebizonyítható az alábbi állítás is:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Ha } a_n > 0,\ n > N \text{ és } \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} < 1 & \Longrightarrow & \sum\limits^{\infty} a_n \text{ konv.} \\ \text{Ha } a_n > 0,\ n > N \text{ és } \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} > 1 & \Longrightarrow & \sum\limits^{\infty} a_n \text{ div.} \end{array}}$$

M6 A második állítás könnyen bizonyítható, hiszen $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} > 1$-ből következik a divergencia, mivel végtelen sok n-re:

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n > 1\,; \quad \text{tehát } \exists\ a_{n_r} \not\to 0 \text{ részsorozat.}$$

3.5. Integrálkritérium

T Legyen f pozitív értékű <u>monoton csökkenő</u> függvény $[1, \infty)$-en és $f(k) = a_k > 0$

1. Ha $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens

2. Ha $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ divergens $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergens

M $\Longleftrightarrow$ állítás is igaz, tehát a sor és az improprius integrál egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

B

1. Mivel

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \le \underbrace{\int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{monoton növő}} \le \int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,,$$

$$a_k > 0 \text{ és } \sum_2^n a_k \text{ korlátos} \quad \Longrightarrow \quad \sum_2^{\infty} a_k \text{ konvergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum_1^{\infty} a_k \text{ konvergens}$$

2. $\displaystyle\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = s_{n-1}$

Mivel $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \infty$, tehát a sor divergens.

■

3.6. Hibabecslés pozitív tagú sorösszegek közelítése esetén

1. Ha a sor konvergenciája integrálkritériummal állapítható meg, akkor az s sorösszeg s_n részletösszeggel való közelítésének hibáját is egy integrállal becsülhetjük.

(T) Ha az integrálkritérium 1. állításának feltételei teljesülnek, akkor az $s \approx s_n$ közelítésnél elkövetett hiba

$$H = r_n = a_{n+1} + a_{n+2} \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(B) Mivel

$$a_{n+1} + a_{n+2} \cdots + a_m \le \int_n^m f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ezért

$$H = r_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} a_k \le \lim_{m\to\infty} \int_n^m f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

2. Ha a sor konvergenciájára hányados vagy gyökkritériummal következtettünk, akkor a sorhoz található konvergens majoráló geometriai sor. A majoráló sor r_n^* maradékösszegével becsülhetjük az eredeti sor r_n maradékösszegét.
(L. előadás és gyakorlat!)

4. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok

$$c_1 - c_2 + c_3 - \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n \quad , \qquad c_n > 0$$

Leibniz kritérium:

T Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat (fent (c_n)) monoton fogyóan tart 0-hoz ($c_n \searrow 0$), akkor a sor konvergens.

Az ilyen alternáló sor neve: **Leibniz sor**.

B Belátjuk, hogy $s_{2k} \nearrow$ és felülről korlátos:

$$s_{2k+2} = s_{2k} + \underbrace{(c_{2k+1} - c_{2k+2})}_{\geq 0} \geq s_{2k} \quad \Longrightarrow \quad s_{2k} \nearrow$$

Másrészt

$$\underbrace{0 \leq s_{2k+2}}_{\text{az előzőből látható}} = c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_4 - c_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(c_{2k+2})}_{\geq 0} \leq c_1$$

Tehát s_{2k} monoton növő és felülről korlátos $\Longrightarrow$ s_{2k} konvergens, legyen $s = \lim_{k\to\infty} s_{2k}$.
Megmutatjuk, hogy $s_{2k+1} \to s$ szintén, és így a sor konvergens.

$$s_{2k+1} = s_{2k} + c_{2k+1} \to s + 0 = s$$

Hibabecslés Leibniz típusú soroknál

Leibniz típusú soroknál a páros indexű részletösszegek s-nél kisebbek vagy egyenlők:

$$s_{2k} \leq s.$$

A páratlan indexű elemek monoton csökkenve tartanak s-hez, ezért

$$s \leq s_{2k+1}.$$

Mivel

$$s - s_{2k} \leq s_{2k+1} - s_{2k} = c_{2k+1} \quad \text{és} \quad s_{2k+1} - s \leq s_{2k+1} - s_{2k+2} = c_{2k+2},$$

ezért

$$H = |s - s_n| \leq c_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4.1. Feladatok a váltakozó előjelű sorokhoz

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\lg k}$

2. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

3. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\,2k}{k^2-1}$

4. $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

5. $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2^3}-\cdots-\frac{1}{n!}+\frac{1}{2^n}-\cdots$

6. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\cdots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\cdots$

7. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2^n}+\cdots$

5. Műveletek konvergens sorokkal

T Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = S_b, \quad S_a, S_b \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k+b_k) = S_a+S_b \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c\cdot a_k) = c\cdot S_a\,.$$

B Házi feladat!

5.1. Végtelen sorok természetes szorzata

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc}
 & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \cdots & + & a_k & + & \cdots \\
\hline
b_1 & b_1a_1 & + & b_1a_2 & + & b_1a_3 & + & b_1a_4 & + & \cdots & + & b_1a_k & + & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_2 & b_2a_1 & + & b_2a_2 & + & b_2a_3 & + & b_2a_4 & + & \cdots & + & b_2a_k & + & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_3 & b_3a_1 & + & b_3a_2 & + & b_3a_3 & + & b_3a_4 & + & \cdots & + & b_3a_k & + & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_4 & b_4a_1 & + & b_4a_2 & + & b_4a_3 & + & b_4a_4 & + & \cdots & + & b_4a_k & + & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_k & b_ka_1 & + & b_ka_2 & + & b_ka_3 & + & b_ka_4 & + & \cdots & + & b_ka_k & + & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

A természetes szorzat elemei:

$$t_1 = b_1a_1, \quad t_2 = b_2a_1 + b_2a_2 + b_1a_2, \quad t_3 = b_3a_1 + b_3a_2 + b_3a_3 + b_2a_3 + b_1a_3, \ldots$$

A természetes szorzat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k\,, \qquad \text{ahol} \qquad \sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Ⓣ Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok természetes szorzata konvergens, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = S_a\, S_b.$$

(Bizonyítás az előzőek alapján nyilvánvaló.)

5.2. Végetelen sorok Cauchy-szorzata

$$
\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \cdots & + & a_k & + \ \cdots \\
\hline
b_1 & b_1a_1 & & b_1a_2 & & b_1a_3 & & b_1a_4 & & \cdots & & b_1a_k & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
b_2 & b_2a_1 & & b_2a_2 & & b_2a_3 & & b_2a_4 & & \cdots & & b_2a_k & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
b_3 & b_3a_1 & & b_3a_2 & & b_3a_3 & & b_3a_4 & & \cdots & & b_3a_k & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
b_4 & b_4a_1 & & b_4a_2 & & b_4a_3 & & b_4a_4 & & \cdots & & b_4a_k & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
b_k & b_ka_1 & & b_ka_2 & & b_ka_3 & & b_ka_4 & & \cdots & & b_ka_k & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

A Cauchy-szorzat elemei:

$c_1 = b_1a_1,$

$c_2 = b_1a_2 + b_2a_1,$

$c_3 = b_1a_3 + b_2a_2 + b_3a_1,$

$\cdots,$

$c_n = b_1a_n + b_2a_{n-1} + b_3a_{n-2} + \cdots + b_na_1$ (indexek összege $n+1$).

A Cauchy-szorzat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,, \quad \text{ahol} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\, a_{n-k+1}\,.$$

Ⓣ Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ abszolút konvergens sorok és $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a\,,\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b\,,$ akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Cauchy-szorzata is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = S_a\, S_b\,, \quad \text{ahol} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\, a_{n-k+1}\,.$$

(¬B)

(Pl.) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \dfrac{1}{1-x}\,,$ ha $|x| < 1.$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, x^k = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k \, x^k + \cdots = \frac{1}{1+x}\,, \quad \text{ha} \quad |x| < 1\,.$$

Írjuk fel a fenti két sor Cauchy-szorzatát!

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
 & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + & \cdots & + & x^k & + & \cdots \\
\hline
1 & 1 & & x & & x^2 & & x^3 & & \cdots & & x^k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
-x & -x & & -x^2 & & -x^3 & & -x^4 & & \cdots & & -x^{k+1} & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
x^2 & x^2 & & x^3 & & x^4 & & x^5 & & \cdots & & x^{k+2} & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
-x^3 & -x^3 & & -x^4 & & -x^5 & & -x^6 & & \cdots & & -x^{k+3} & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
(-1)^k x^k & \cdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Cauchy-szorzat:

$$1+0+x^2+0+x^4+0+x^6+\cdots = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2k}+\cdots = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x}\,,$$

ha $|x| < 1\,.$

Házi feladat:

Határozzuk meg a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$ és $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \mathrm{e}^y$ sorok Cauchy-szorzatát!

(Megjegyzés: $\displaystyle \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$ eredményt kell kapni.)

5.3. Zárójelek elhelyezése illetve elhagyása végtelen sor esetén

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots$$

A fenti sor részletösszegei:

$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1+a_2,\ s_3 = a_1+a_2+a_3,\ s_4 = a_1+a_2+a_3+a_4,\ s_5 = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5, \ldots$ stb. Az

$$a_1 + a_2 + (\underbrace{a_3 + a_4 + a_5}_{a_3^*}) + a_6 + \cdots$$

bezárójelezett új sor részletösszegei

$$s_1^* = a_1,\ s_2^* = a_1 + a_2,\ s_3^* = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,\ s_4^* = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,\ \ldots$$

Zárójelek elhelyezése esetén a részletösszegek sorozata szűkül. Ha a sor konvergens volt, akkor zárójelek behelyezése esetén is konvergens marad. Előfordulhat, hogy divergens sorból – zárójelek elhelyezése után – konvergens sor lesz.

Pl. $(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-\cdots$.

Véges sok zárójel elhelyezése nem befolyásolja a konvergenciát!

Zárójelek elhagyása után a részletösszegek sorozata bővül. Ha a sor divergens volt, akkor zárójelek elhagyása esetén is divergens marad. Előfordulhat, hogy konvergens sorból – zárójelek elhagyása után – divergens sor lesz. Véges sok zárójel elhagyása nem befolyásolja a konvergenciát!

5.4. Végtelen sor elemeinek felcserélése (átrendezése)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_k + \cdots$$

$$a_1 + a_3 + a_2 + a_{100} + a_5 + a_6 + \cdots + a_{99} + a_4 + a_{101} + \cdots$$

Véges sok elem felcserélése nem változtatja meg a konvergencia vagy divergencia tényét, nem változik meg a sorösszeg sem. Végtelen sok elemcsere megváltoztathatja a sorösszeget, feltételesen konvergens sor átrendezhető akár divergenssé is.

T Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergens, akkor $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ átrendezhető úgy, hogy divergens legyen, és átrendezhető úgy is, hogy egy előre tetszőlegesen megadott szám legyen az összege. (Nem bizonyítjuk.)

T Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ abszolút konvergens, akkor tetszőleges átrendezése is abszolút konvergens, az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget. (Nem bizonyítjuk.)

6. Feladatok sorokhoz

1. a) $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{3^{k+1}+2^{2k+1}}{5^k} = ?$

   b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = ?$

   c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}} = ?$

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

   a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}$

   b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n n^3+1}{n^5+1}$

   c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+5}}$

   d) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+3)!}$

   e) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{3n+1}$

   f) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,4^{n+1}}$

   g) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$

   h) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n+n}$

   i) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

   j) $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

   k) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{7^{3n+2}}$

   l) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n}{(3n)!}$

   m) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$

   n) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{5^n+6^n}$

   o) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n\frac{n+1}{2n+1}$

   p) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n\frac{n}{n^2+5}$

   q) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n\frac{n}{n^3+5}$

   r) $\displaystyle\sum_{10}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{n-\sqrt{n^2-\sqrt{n}+3}}$

   s) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(1-\frac{\sqrt{5}}{3n}\right)^n$

   t) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{10^n}{n!\,n^2}$

   u) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(1-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^{n^2+n}$

v) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{\left(4+\frac{2}{n^2}\right)^n}$

w) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

x) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$

y) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$

z) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$

3. Határozzuk meg az alábbi sorok értékét 10^{-3}-nál kisebb hibával!

   a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^{n}$

   b) $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!-n!}$

   c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n+10^n}$

   d) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n+5}$

   e) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

   f) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n!\,3^n}{(2n)!}$

4. Mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget 10. részletösszegével közelítjük?

   $(s \approx s_{10};\quad H = r_{10} = \sum\limits_{k=11}^{\infty} a_k;\quad |H| \le ?)$

   a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!+\sqrt{2}}$

   b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3^n}$

   c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^{n}$

   d) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

e) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}+n^2+3}$

f) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(n-1)}{n^2+n}$

5. Abszolút illetve feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{n+4}{n^2+4}$

b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\log_2 n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-3n+8}$

d) $\displaystyle 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{3^n}+\cdots$

e) $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{1^2}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n^2}+\cdots$

7. Számsorozatok nagyságrendje

(D) $a_n = O(b_n)$ („nagy ordó b_n”), ha $\exists\, c_1$:
$|a_n| \le c_1 |b_n|, \quad n > N$ (legfeljebb véges sok kivétellel)

(D) $a_n = \Omega(b_n)$ („omega b_n”), ha $b_n = O(a_n)$.

Vagyis $|b_n| \le c_1 |a_n| \quad n > N \quad (\exists\, c_1)$.

Ekkor: $c_2|b_n| = \dfrac{1}{c_1}|b_n| \le |a_n|$, vagyis most $|a_n|$ alulról becsülhető $|b_n|$ segítségével.

(D) $a_n = \Theta(b_n)$ („teta b_n”), ha $a_n = O(b_n)$ és $a_n = \Omega(b_n)$.

Az előzőből következik:

(T) $a_n = \Theta(b_n) \iff c_2|b_n| \le |a_n| \le c_1|b_n|$

(Pl.) $a_n = 2n^2 - n + 3$

1. $a_n = O(n^2)$, mert $2n^2 - n + 3 \le 2 \cdot n^2$, ha $n \ge 3$. Persze $a_n = O(n^3)$ is igaz, sőt általánosságban: $a_n = O(n^{2+\alpha}), \quad \alpha \ge 0$.
2. $a_n = \Omega(n^2)$, mert $1 \cdot n^2 = 2n^2 - n^2 \le 2n^2 - n + 3$. Sőt $a_n = \Omega(n^{2-\alpha}), \quad \alpha \ge 0$.
3. Tehát $a_n = \Theta(n^2)$.

7.1. Műveletek Θ-val

(T) $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \Theta(c_n) \\ b_n &= \Theta(d_n) \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} 1. & a_n \cdot b_n = \Theta(c_n \cdot d_n) \\ 2. & \dfrac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\dfrac{c_n}{d_n}\right) \\ 3. & a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n) \end{cases}$$

Különbségre nem igaz!

Megj.: Akkor van értelme használni ezt, ha c_n és d_n sokkal „egyszerűbb” sorozatok.

(B)

$$0 < \alpha_1 c_n \le a_n \le \alpha_2 c_n, \quad \text{mert } a_n = \Theta(c_n)$$

$$0 < \beta_1 d_n \le b_n \le \beta_2 d_n, \quad \text{mert } b_n = \Theta(d_n)$$

1. Azonos értelmű egyenlőtlenségek összeszorozhatók:

$$(\alpha_1\beta_1)c_n d_n \le a_n b_n \le (\alpha_2\beta_2)c_n d_n \quad \Longrightarrow \quad a_n b_n = \Theta(c_n d_n)$$

2.

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \alpha_1 c_n \le \alpha_n \le \alpha_2 c_n \\ 0 < \dfrac{1}{\beta_2}\dfrac{1}{d_n} \le \dfrac{1}{b_n} \le \dfrac{1}{\beta_1}\dfrac{1}{d_n} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)\frac{c_n}{d_n} \le \frac{a_n}{b_n} \le \left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\frac{c_n}{d_n},$$

tehát $\dfrac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\dfrac{c_n}{d_n}\right)$

3.

$$\alpha(c_n + d_n) \le \alpha_1 c_n + \beta_1 d_n \le a_n + b_n \le \alpha_2 c_n + \beta_2 d_n \le \beta(c_n + d_n)$$

$$\alpha = \min\{\alpha_1, \beta_1\}, \quad \beta = \max\{\alpha_2, \beta_2\}$$

$\Longrightarrow a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n)$

■

Pl. $a_n = \sqrt{2n^2 + 3n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} = \dfrac{n^2 + 4n}{\sqrt{2n^2 + 3n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} =$

$$= \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n) + \Theta(n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n + n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n)} = \Theta\left(\frac{n^2}{n}\right) = \Theta(n) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to \infty$$

Pl. $a_n = \sqrt{7n^2 - 2n + 10} - \sqrt{7n^2 - 2n + 3} = \dfrac{10 - 3}{\sqrt{7n^2 - 2n + 10} + \sqrt{7n^2 - 2n + 3}} =$

$$= \frac{\Theta(1)}{\Theta(n + n)} = \Theta\left(\frac{1}{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to 0$$

7.2. $a_n \sim b_n$

D

> a_n aszimptotikusan egyenlő b_n-nel, jelben $a_n \sim b_n$, ha
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Pl. $\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

Pl. $n! \sim \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ **Stirling formula** (¬B)

(T) $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \sim c_n \\[2ex] b_n \sim d_n \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} 1. & a_n + b_n \sim c_n + d_n \\[1ex] 2. & a_n b_n \sim c_n d_n \\[1ex] 3. & \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{c_n} \\[1ex] 4. & \dfrac{b_n}{a_n} \sim \dfrac{d_n}{c_n} \end{array}\right.$$

Megint nincs különbség!

(B)

$$a_n \sim c_n : \quad \frac{a_n}{c_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{c_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N_1$$

$$b_n \sim d_n : \quad \frac{b_n}{d_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1 - \varepsilon < \frac{b_n}{d_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N_2$$

Legyen $n > \max\{N_1, N_2\} = N$

1. $1 - \varepsilon = \dfrac{(1-\varepsilon)c_n + (1-\varepsilon)d_n}{c_n + d_n} < \dfrac{a_n + b_n}{c_n + d_n} < \dfrac{(1+\varepsilon)c_n + (1+\varepsilon)d_n}{c_n + d_n} = 1 + \varepsilon\,,$

   ha $n > N$

2. $\neg$B

3. $\dfrac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{c_n}} = \dfrac{c_n}{a_n} = \dfrac{1}{\frac{a_n}{c_n}} \to 1$

4. Az előző kettőből következik: $a_n \sim c_n \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{c_n}$; másrészt $b_n \sim d_n$

   $$\Longrightarrow \quad \frac{b_n}{a_n} \sim \frac{d_n}{c_n}$$

(Pl.) $a_n = \sqrt[3]{2n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7} =$

$$= \frac{2n^2 + n + 1 - (2n^2 - 3n - 7)}{\left(\sqrt[3]{2n^2 + n + 1}\right)^2 + \sqrt[3]{2n^2 + n + 1}\sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7} + \left(\sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7}\right)^2} \sim$$

$$\sim \frac{4n}{\left(\sqrt[3]{2}\, n^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\, n^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\, n^{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{4n}{\sqrt[3]{4} \cdot 3\, n^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{n}} \quad \Longrightarrow \quad a_n \to 0$$

(Pl.) $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg} \sqrt{n}}{\sqrt[3]{2n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7}} \sim \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4}{3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{n}}} = \text{konst} \cdot \sqrt[3]{n} \to \infty$

Pl. $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \dfrac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} 2\pi n}{\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \cdot 2n}} = \dfrac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{4^n} \to 0$

Pl. Az előző példa felhasználásával:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \qquad \left(= \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

M $a_n \sim b_n \quad \not\Longrightarrow \quad (a_n)^n \sim (b_n)^n$ Pl. $\underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\downarrow\, 1} \sim \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow\, 1}$, de $\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow\, \mathrm{e}} \not\sim 2$

Persze $a_n \sim b_n$ esetén $a_n^k \sim b_n^k, k \in \mathbb{N}^+$ már igaz ($k \neq f(n)$). (k valós is lehet)

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k \to 1\right)$$

És igaz a következő tétel is:

T $\boxed{a_n, b_n > 0 \qquad a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}}$

B $a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1 - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon)$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\sqrt[n]{1-\varepsilon}}_{\downarrow\, 1} < \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} < \underbrace{\sqrt[n]{1+\varepsilon}}_{\downarrow\, 1} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} \to 1$$

■

Pl. $\sqrt[n]{\dfrac{3n^2 - n\sqrt{n} + 6}{2n^2 + 3n + 7}} \sim \sqrt[n]{\dfrac{3}{2}} \sim 1$

Pl. $\boxed{\text{Határozza meg } A \text{ és } \alpha \text{ értékét úgy, hogy } \cos\frac{1}{n} - 1 \sim An^{\alpha} \text{ teljesüljön!}}$

1. megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{n}-1}{An^\alpha} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{n}-1}{n^\alpha} = A \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0\text{-ra } A = 0 \text{ lenne} \\ \alpha > 0\text{-ra } \frac{0}{\infty} \to 0 = A \text{ lenne} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha < 0$$

$$u := \frac{1}{n} \xrightarrow[\infty]{n} 0$$

$$\lim_{u\to+0} \underbrace{\frac{\cos u - 1}{u^{-\alpha}}}_{\frac{0}{0} \text{ alakú } (-\alpha>0)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to+0} \frac{-\sin u}{-\alpha u^{-\alpha-1}} = \lim_{u\to+0} \frac{\sin u}{u^{-\alpha-1}} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = A$$

ha $-\alpha - 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -2, A = -\dfrac{1}{2}$.

Tehát $\cos\dfrac{1}{n} - 1 \sim -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2}$

2. megoldás:

$\cos x - 1 = -2\sin^2\dfrac{x}{2}$ azonosság segítségével: $\dfrac{\cos\dfrac{1}{n}-1}{An^\alpha} = \dfrac{-2\sin^2\dfrac{1}{2n}}{An^\alpha} \to 1$, ha

$An^\alpha = -2\left(\dfrac{1}{2n}\right)^2 \to A = -\dfrac{1}{2}, \alpha = -2$

Feladat:

Határozza meg A és α értékét úgy, hogy $\sin\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} \sim An^\alpha$ fennálljon!

T

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n > 0, b_n > 0 \\ a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \sum^\infty a_n \text{ és } \sum^\infty b_n \text{ egyidejűleg konvergens, illetve divergens} \\ (\text{Jelben: } \sum^\infty a_n \sim \sum^\infty b_n) \end{array}}$$

B $a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon$. Legyen $\varepsilon < 1$.

Tehát $c_1 b_n < a_n < c_2 b_n \quad (c_1 = 1 - \varepsilon > 0, \quad c_2 = 1 + \varepsilon)$

Ha $\sum^\infty a_n$ konvergens, akkor $b_n < \dfrac{1}{c_1} a_n$ miatt $\sum^\infty b_n$ is konvergens (majoráns kritérium)

Ha $\sum^\infty a_n$ divergens, akkor $\dfrac{1}{c_2} a_n < b_n$ miatt $\sum^\infty b_n$ is divergens (minoráns kritérium)

Ha $\sum^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $a_n < c_2 b_n$ miatt $\sum^{\infty} a_n$ is konvergens (majoráns kritérium)
Ha $\sum^{\infty} b_n$ divergens, akkor $c_1 b_n < a_n$ miatt $\sum^{\infty} a_n$ is divergens (minoráns kritérium)

■

Pl. $\sum^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 2\sqrt{n} + 8} = \sum^{\infty} a_n$

$$a_n \sim \frac{1}{3n^2} = b_n \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n \text{ konvergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Pl. $\sum^{\infty} \frac{1}{7n + \sqrt[3]{n} - 1} = \sum^{\infty} a_n$

$$a_n \sim \frac{1}{7n} = b_n \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n \text{ divergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

Pl. $\sum^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \sum^{\infty} a_n$

$$a_n \sim \frac{1}{n} = b_n \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n \text{ divergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

Pl. $\sum^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = \sum^{\infty} a_n$

$$a_n = 2\sin^2 \frac{1}{2n} \sim 2\frac{1}{4n^2} = \frac{1}{2n^2} = b_n \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n \text{ konvergens} \Longrightarrow \sum^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Feladatok:
Konvergensek-e az alábbi sorok?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right)$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{2}{n} - \cos \frac{3}{n}\right)$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$

(D) $\boxed{\begin{array}{c} a_n = o(b_n) \;\; (\text{„kis ordó } b_n\text{”}), \text{ ha } \forall\, c > 0\text{-ra} \\ |a_n| \le c|b_n| \quad n > N\text{-re} \end{array}}$

Más jelölés is használatos:

$$a_n \ll b_n, \text{ ha } a_n = o(b_n)$$

(Nagyságrendileg kisebb vagy lényegesen kisebb.)

A definíció következménye, hogy $b_n \neq 0$ esetén $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| \le c, \quad n > N \quad \forall\, c > 0$-ra. Ebből persze már következik, hogy ekkor $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N_0(\varepsilon)$, hogy $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$, ha $n > N_0(\varepsilon)$.

Nyilvánvalóan igaz az alábbi állítás is:

(T) $\boxed{a_n = o(b_n), \quad b_n \neq 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0}$

(Pl.) Mit jelent $a_n = o(1)$?

Mivel $\forall\, c > 0$-ra $|a_n| \le c$, ha $n > N$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(M) A következő állítás is könnyen bizonyítható lenne:

$$a_n \sim b_n \iff a_n = b_n(1 + o(1)).$$

(Pl.) $n! = o(n^n)$, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

1. megoldás:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} < \frac{1}{n} \qquad + \text{ rendőrelv}$$

2. megoldás:

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n} \to 0$$

Vége!