Komplex számok (elméleti rész)

Bevezetés

A komplex számok: $\mathbb{C} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ rendezett valós számpárok halmaza.

Műveletek:

\+ Összeadás: kommutatív, asszociatív

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$\exists(0,0):\forall(a,b):(a,b)+(0,0)=(a,b)$

$\exists(-a,-b):(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$

* Szorzás: kommutatív, asszociatív

$(a,b)*(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$

$\exists(1,0):\forall(a,b):(1,0)*(a,b)=(a,b)$

$\exists(c,d)\neq(0,0):(a,b)*(c,d)=(1,0)$

$$(c,d)=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

A kiemelt számpárok tehát: (0,0); (1,0); valamint a (0,1): $(0,1)*(0,1)=(-1,0)$

Egy komplex szám alakja a fenti értelmezés szerint: $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$, ahol (1,0) a reális, vagy valós rész, jelölése: 1; és (0,1) az imaginárius, vagy képzetes rész, jelölése i vagy j.

A kiemelt számpárok értelmezése alapján tehát $\mathrm{i}=-1$.

A komplex számok kanonikus alakja: $z=a+\mathrm{i}b$, ahol a a reális, b a képzetes része z-nek.

Tételek, azonosságok, a komplex szám további alakjai

i hatványai:

$$\mathrm{i}^n=\begin{cases}1, \text{ ha } n=4k\\ -1, \text{ ha } n=4k+2\\ \mathrm{i}, \text{ ha } n=4k+1\\ -\mathrm{i}, \text{ ha } n=4k+3\end{cases}$$

A konjugált és összefüggései:

$\exists\overline{z}=a-\mathrm{i}b$, ez z konjugáltja. Tételek ($z=a+\mathrm{i}b$; $\overline{z}=a-\mathrm{i}b$):

$z+\overline{z}=2a$

$z-\overline{z}=2\mathrm{i}b$

$z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$; $z\cdot\overline{z}=0 \Leftrightarrow z=0$

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{z_2}$$

A komplex szám trigonometrikus alakja:
A komplex számot ábrázolhatjuk derékszögű koordinátarendszerben az x tengelyre a szám valós, az y tengelyre a szám képzetes részét vetítve. Így minden komplex szám meghatároz egy pontot a koordinátarendszer síkjában.

Az origo és a pont távolsága: $\overline{OP} = |z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.

$\overline{OP}$ és az x tengely által bezárt szög z arcusa, vagy argumentuma, jele: $\arg(z) = \varphi$.

$\tan\varphi = \frac{b}{a}$; $a \neq 0$; $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, ez a szám trigonometrikus alakja.

Az exponenciális alak és összefüggései:
$z = re^{\mathrm{i}\varphi}$, ez a szám exponenciális alakja.
Tételek $\left(z = re^{\mathrm{i}\varphi};\ z_1 = r_1e^{\mathrm{i}\varphi_1};\ z_2 = r_2e^{\mathrm{i}\varphi_2}\right)$:

$$\left.\begin{array}{c} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 = z_2$$

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi \end{cases}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = r^n e^{\mathrm{i}\varphi n}$$

$$\sqrt[n]{z} = \varphi e^{\mathrm{i}\psi}$$

$$\left.\begin{array}{c} \varphi^n = r \\ n\psi = \varphi + 2k\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \sqrt[n]{r} \\ \varphi^n e^{\mathrm{i}n\psi} = re^{\mathrm{i}\varphi} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, \text{ ahol } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$