Gyakorló feladatok zárthelyi dolgozatra készüléshez

1. Egyszer dobunk egy szabályos kockával. Jelölje E azt az eseményt, hogy prímszámot dobunk, P azt, hogy párosat dobunk, N pedig azt, hogy legfeljebb 4-et (azaz 4-et vagy kevesebbet) dobunk. Legyen továbbá A_i az az esemény, hogy a dobás eredménye i ($i = 1, \dots, 5$), és jelölje még B azt, hogy 3-nál nagyobbat dobunk. Fejezzük ki az A_i és a B eseményeket az E, P és N események ill. a halmazműveletek segítségével.

2. Az A, B és C eseményekről tudjuk, hogy legalább az egyikük mindig bekövetkezik, továbbá A és B függetlenek, B és C pedig egymást kizáróak. Határozzuk meg a fenti események valószínűségét, ha $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(C \mid A \cup C) = \frac{3}{4}$, valamint $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{12}$ is teljesül.

3. Egy tesztelés alatt lévő gyártóeszközről kiderül, hogy a vizsgált gyártmány 0,15 valószínűséggel anyaghibás, 0,3 valószínűséggel mérethibás, és 0,2 valószínűséggel felületi hibás. A hibák páronként függetlenek, de együttesen nem: 0,02 valószínűséggel egyszerre következik be mindhárom hibatípus. Mennyi a valószínűsége, hogy egy termék hibátlan?

4. Egy vizsgán a vizsgázók 75%-a A szakos, 15%-a B szakos, és 10%-a C szakos. Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy egy hallgató ötöst kap, az A szakosok esetében 0,4, a B szakosoknál 0,7, és a C szakosoknál 0,6. Ha egy személyről tudjuk, hogy ötösre vizsgázott, akkor milyen valószínűséggel lehet
   a) A, b) B, c) C szakos?

5. Egy programozó munkaidejének $\frac{1}{3}$-át kollégákkal való egyeztetéssel, $\frac{3}{5}$-ét az új kódok írásával, a fennmaradó időt régi kódokban való hibakereséssel tölti. Új kódok írása közben 50% valószínűséggel, a régi kódokkal való foglalkozás közben pedig 25% valószínűséggel hallgat zenét. Egyeztetés közben természetesen nem hallgat zenét. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy ehhez a programozóhoz véletlenszerűen bekopogva nem hallja meg a kopogást, mivel épp zenét hallgat. (A programozót csak munkaidőben próbáljuk felkeresni, és tudjuk, hogy zenehallgatás közben sosem hallja meg a kopogást.)

6. Egy urnában van egy piros és egy kék golyó. Kétszer húzunk, és minden húzás után visszarakjuk a kihúzott golyót és még egy vele megegyező színű golyót. Mi a valószínűsége, hogy két húzás után két piros és két kék golyó lesz az urnában?

7. Béla minden héten ugyanabból a két különböző típusú sorsjegyből vesz 1-1 darabot, tehát minden héten mindkét típusból vásárol pontosan egyet, majd a vásárlás után lekaparja őket. Ezekkel a sorsjegyekkel egymástól függetlenül rendre 1/8 ill. 1/10 valószínűséggel lehet nyerni. Béla saját pénzügyi keretét felmérve úgy dönt, hogy 5 hétig fog játszani. Mi a valószínűsége, hogy legalább az egyik héten nyer valamelyik sorsjeggyel? Mennyi a nyerő sorsjegyek számának várható értéke és szórása?

8. Egy kosárba próbálunk bedobni egy papírgalacsint. A találat valószínűsége minden próbálkozásnál 0,2 (a többi próbálkozástól függetlenül). Mennyi a szükséges próbálkozások várható értéke és szórása?

9. Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, ami a 4, 5, 6 értékeket veszi fel, sorrendben $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{6}$ valószínűségekkel. Továbbá, legyen $Y \sim B(n; p)$, ahol p annak a valószínűsége, hogy X kisebb, mint $\mathbb{E}(X)$. Tudjuk továbbá, hogy $\mathbb{E}(X + Y)$ tizenháromszor akkora, mint $\mathbb{E}(X - Y)$. Határozzuk meg n értékét.

10. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat, melyben két érték ismeretlen, ezeket p és q jelöli. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(XY \geq 0) = 19/24$.

Y \ X	0	1	2
-1	$\frac{1}{6}$	p	$\frac{1}{12}$
1	q	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$