

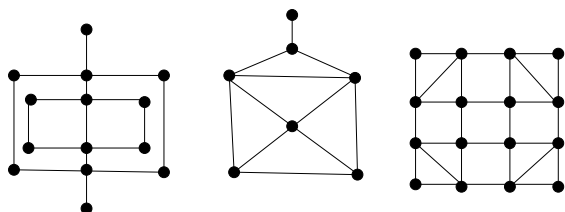
Bevezetés a számításelméletbe II.

2007. FEBRUÁR 14.

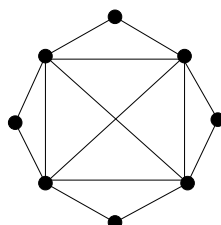
1. gyakorlat: Euler- és Hamilton bejárások

Információk: <http://www.cs.bme.hu/~tothagi>

1. Elkészíthetők-e a ceruza felemelése nélkül az alábbi ábrák úgy, hogy minden vonalon pontosan egyszer haladunk végig?

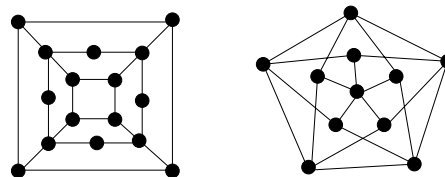


2. Hányszor kell minimálisan felemelni a ceruzát az alábbi gráf lerajzolása során?



3. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden pontjának a foka 4, akkor élei színezhethők piros és kék színekkel úgy, hogy minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék!
4. Mutassuk meg, hogy ha G -ben van Euler-kör, akkor minden vágásában páros sok él van! Igaz-e ez visszafelé, ha tudjuk, hogy a gráf összefüggő?
5. Van-e abban a gráfban Euler-út, melynek fokszámai a következők: 4,4,4,4,3,3,2,2,2?
6. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \dots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G -ben, ha $|i - j| \leq 2$.
- (a) Tartalmaz-e G Euler-kört, illetve utat?
- (b) Hamilton-kört, illetve utat?

7. Van-e a következő gráfokban Hamilton-kör, illetve út?



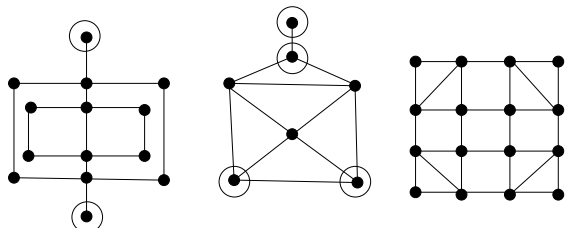
8. Be lehet-e járni lóval egy 4×4 -es sakktáblát?
9. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?
10. Legfeljebb hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek nincs Hamilton-köre?
11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráfnak n csúcsa és $\binom{n-1}{2} + 1$ éle van, akkor még nem biztos, hogy tartalmaz Hamilton-kört, de ha ennél 1 éllel több, akkor már biztosan lesz benne.
12. Mutassuk meg, hogy $n \geq 5$ -re igaz az alábbi két állítás!
- (a) Létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy G is és $\overline{G}$ is tartalmaz Hamilton-kört.
- (b) Létezik olyan n csúcsú gráf, hogy sem G , sem $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört.
13. Lássuk be, hogy egy $2n - 1$ pontú gráfban, ahol minden csúcs foka legalább $n - 1$ létezik Hamilton-út!
14. Egy hotelba egy 100 fős társaság érkezik, akik közül kezdetben bármely két ember jóban van egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal körül ül le mindenki. Sajnos egy vacsora alkalmával az egymás mellé került emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy mindenki a szomszédjaival jóban legyen. Ha ez lehetetlen, akkor az összes résztvevő még aznap este haza megy. Bizonyítsuk be, hogy legalább 25 éjszakát a hotelban tölt a társaság!

Bevezetés a számításelméletbe II.

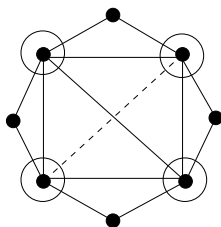
MEGOLDÁS

1. gyakorlat: Euler- és Hamilton bejárások

1. Akkor és csakis akkor létezik Euler-út az adott gráfokban, ha a páratlan fokú pontok száma 0 vagy 2. Ez az első és a 3. gráfra teljesül. (A harmadikban Euler-kör is van, mert minden pont foka páros.)



2. Minimálisan 1-szer kell felemelni a ceruzát, mert 4 db páratlan fokú pontja van. (Ha vennénk egy olyan élet, amelyik két páratlan fokú pontot köt össze, akkor ezt az élet elhagyva a gráfban már lenne Euler-út. Tehát a maradék gráfot le tudjuk rajzolni ceruza-felemelés nélkül.)



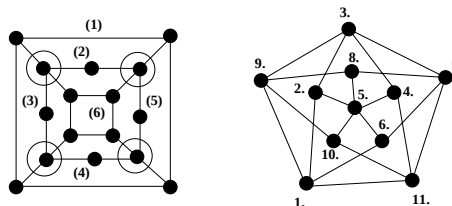
3. A gráf minden pontja páros fokú, tehát van benne Euler-kör. Ráadásul ez az Euler-kör páros hosszú, mert az élek száma $e = \frac{4 \cdot n}{2}$ páros. Ha az Euler-körön végigmenve felváltva színezzük ki az éleket, akkor ez egy a feladat által kért jó színezést eredményez.
4. Minden zárt sétát minden vágás páros sok élből metsz. (Ezt bizonyító vicc: Arisztid: -Én tegnap 4-szer is átmentem a Dunán. Tasziló: -Az semmi, én 9-szer. Arisztid: - Akkor tegnap sem aludtál otthon!?) Az Euler-kört is páros sok élből metszi minden vágás. Az Euler-kör minden élen pontosan 1-szer halad át, ebből adódik, hogy az összes él közül minden vágásba páros sok él kerül bele. A másik irány: Vegyük a pontokat izoláló vágásokat (azokat az éleket, melyek egy pontból indulnak ki). Ezek páros sok élet tartalmaznak a feltétel szerint, vagyis minden pont foka páros, amiből adódik, hogy létezik Euler-kör.

5. A foksámai alapján lehet, azonban kérdéses, hogy összefüggő-e. Azonban ezekkel a foksámokkal lehet ez is, az is. Például ha veszünk egy K_2 -t meg egy K_4 -et, akkor

- (a) A páratlan fokú pontok száma tehát 2, ezért Euler-utat tartalmaz, de Euler-kört már nem.

- (b) Hamilton-útra példa: 1, 2, 3, ..., 99, 100
Hamilton-körre példa:
1, 2, 4, 6, ..., 98, 100, 99, 97, ..., 3, 1

7. Az első gráfban nincs Hamilton-kör (és út sem), mert elvéve 4 pontot a gráf 6 komponensre esik szét, tehát sérül a Hamilton-kör (és út) létezésének szükséges feltétele. A második gráfban Hamilton kör is van (így természetesen út is):

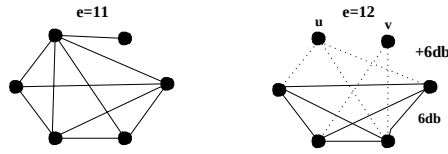


8. Nem lehet. Vegyük azt a gráfot, melynek pontjai a sakktábla mezői és két pont között fut él, ha az egyik mezőről lóval át tudok lépni a másikra. Pontosán akkor járható be a sakktábla lóval, ha ebben a gráfban létezik Hamilton-út. Az pedig nem létezik, mert a középső 4 mezőnek megfelelő pontot elvéve, a gráf 6 komponensre esik szét:

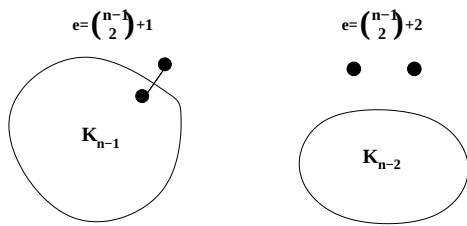
1	5	6	4
6			5
5			6
2	6	5	3

9. Legalább 6, mert egy 6 hosszú kört keresünk.
10. Legfeljebb 11. Ennyi lehet, mert egy teljes 5 pontú gráfhoz hozzávéve egy élet még nem lesz Hamilton-kör a gráfban. 12 él esetén viszont már biztosan lesz! Ehhez azt fogjuk belátni, hogy teljesül az Ore-feltétel, tehát bármely két pontot véve, azok vagy össze vannak kötve, vagy a foksámaik összege legalább 6. Vegyünk tehát két tetszőleges pontot, u -t és v -t. Ezeken kívül legfeljebb 6 élet tudunk behúzni a gráfban. A többi 6 él behúzásával egyenként növekszik u vagy v foksáma, tehát

végül a két pont fokszámának összege legalább 6 lesz.



11. A gondolatmenet megegyezik az előző feladattal. A teljes $n - 1$ -pontú gráfhoz 1 élrel hozzávéve még nem keletkezik Hamilton-kör. Ennél több élrel ismét az Ore-feltétel teljesülését fogjuk igazolni. Az élek száma tehát ebben az esetben $e = \binom{n-1}{2} + 2 = \binom{n-2}{2} + n$. Tetszőleges két pontot véve a többi pont között legfeljebb $\binom{n-2}{2}$ él lehet. A maradék n él hozzávétele viszont egyenként növeli valamelyik pont fokszámát az adott kettő közül, ezért végül a fokszámaik összege legalább n lesz.



12. Mutassuk meg, hogy $n \geq 5$ -re igaz az alábbi két állítás!

- (a) $n = 5$ -re az öt hosszú kör jó, mert ennek komplementere szintén egy 5-hosszú kör. Nagyobb n -ekre is jó az n -hosszú kör, ugyanis a komplementer gráfban teljesül a Dirac feltétel (mert minden pont foka: $d(i) = (n-1)-2 = n-3 \geq \frac{n}{2}$), ezért a komplementer gráfban is lesz Hamilton-kör.
- (b) Az előző feladatban szereplő első gráf egy jó példa, ugyanis abban nincs Hamilton-kör, a komplementere viszont egy csillag-gráf, amiben szintén nem lehet Hamilton-kör.

13. Vegyünk hozzá a gráfhoz egy pontot, és kössük össze a gráf összes csúcsával. Az így kapott gráfban minden pont foka legalább n (az új pontnak $2n - 1$, a régieknek pontosan n a foka). Ebben az új gráfban tehát található Hamilton-kör. Ez után már egyszerű meggondolni, hogy ha elhagyjuk a hozzáadott pontot, akkor a maradék (eredeti) gráfban egy Hamilton út biztosan fog maradni.

14. Konstruáljunk egy gráfot a feladathoz a következőképpen: a gráf pontjai legyenek az emberek, és két ember pontosan akkor legyen összekötve, ha jóban vannak egymással. Ebben a gráfban egy Hamilton-kör pontosan megfelel egy jó leültetésnek az asztal körül. Azt kell csak belátnunk, hogy 25 estén keresztül akárhogy is változik a gráf élek törlésével (egy élet pontosan akkor törölünk, ha két ember összeveszik egymással) mindig találhatunk benne Hamilton-kört. Ennek belátására a Dirac-feltétel teljesülését fogjuk igazolni. Az első este még mindenki jóban van mindenkivel, tehát a pontok fokszáma 99. Mindenki minden este pontosan 2 emberrel veszik össze, tehát mindenkinek 2-vel csökken a fokszáma egy este után. 24 este után minden pont fokszáma 51 lesz, tehát még teljesül a Dirac-feltétel ($51 \geq \frac{100}{2}$). Ezért a 25. estére is biztosan lesz Hamilton-kör a gráfban, vagyis találhatunk egy jó ültetést.

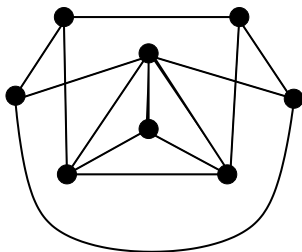
Bevezetés a számításelméletbe II.

2007. FEBRUÁR 21.

2. gyakorlat: Színezések

Információk: <http://www.cs.bme.hu/~tothagi>

15. Hány szín szükséges az alábbi gráf pontjainak kiszínezéséhez?



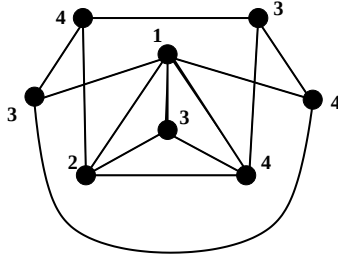
16. Legyen $V(G) = \{v_1, \dots, v_{100}\}$, ahol v_i és v_j között akkor és csak akkor megy él, ha $7 \geq |i - j|$. Mennyi G kromatikus száma?
17. A sakktábla mezői alkossák most a gráfunk pontjait. Köztük él pontosan akkor menjen, ha az egyik mezőről a másikra bátyával el tudunk lépni. Hány színnel színezhető ez a gráf?
18. G csúcsai legyenek az természetes számok, és legyen az n és m csúcs összekötve pontosan akkor, ha $n + m$ páratlan. Határozzuk meg $\chi(G)$ -t!
19. Mutassunk egy olyan gráfot, melyben nincs teljes 4 pontú részgráf, de nem színezhető ki 3 színnel.
20. Legyen G és H két különböző gráf (diszjunkt pontthalmazokkal). Készítsünk belőlük egyetlen F gráfot úgy, hogy G minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(F) = \chi(G) + \chi(H)$.
21. Bizonyítsuk be, hogy minden gráfnak sorbarendeázhető úgy a csúcsai, hogy ha ebben a sorrendben színezzük a gráfot mohó algoritmussal, akkor $\chi(G)$ színt használunk.
22. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$
23. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq |V(G)|$
24. Ha tudjuk, hogy két színnel színezhető az n csúcsú G gráf, akkor mennyi lehet legfeljebb az élek száma?
25. Tegyük fel, hogy a G gráfot megszíneztük $\chi(G)$ színnel; legyen ezek közül a színek közül kettő a piros és a kék. Bizonyítsd be, hogy ekkor található a gráfban két szomszédos csúcs, amelyek közül az egyik piros, a másik kék.
26. Lássuk be, hogy $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$!
27. A G egyszerű gráfban 2006 darab kivételes ponttól eltekintve minden pont foka legfeljebb 2005. Bizonyítsd be, hogy $\chi(G) \leq 2006$.
28. Határozzuk meg az összes olyan 10 csúcsú egyszerű G gráfot, amelyre $\chi(G) = 2$, de bárhogy húzunk be G -be egy új élet (két nem-szomszédos csúcsa közé), a kapott G' gráfra $\chi(G') > 2$!
29. Egy G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ halmaz. Egy $x \in V(G)$ csúcs akkor legyen szomszédos az $y \in V(G)$ csúccsal, ha $x \neq y$ és $100 \leq x \cdot y \leq 400$. Határozzuk meg $\chi(G)$ értékét!
30. Legyen G olyan gráf, melyre $\chi(G) = k$. Bizonyítsuk be, hogy G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon! (Az élek irányítása azt jelenti, hogy minden él egyik végére egy nyilat teszünk. Irányított út azt jelenti, hogy úgy teszünk meg egy utat a gráfban, hogy a nyilakkal szemben nem haladhatunk.)
31. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek pontjai számozhatóak úgy, hogy minden pont legfeljebb kettő nála nagyobb sorszámúval szomszédos. Igazoljuk, hogy $\chi(G) \leq 3$.
32. Adott a síkban néhány egyenes úgy, hogy semelyik három nem megy át egy ponton. Legyen G az ezek által meghatározott gráf: G csúcsai az egyenesek metszéspontjai, két csúcs pedig akkor szomszédos, ha ez egyik egyenesen szomszédos metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$!

Bevezetés a számításelméletbe II.

MEGOLDÁSOK

4. gyakorlat: Színezések

15. A színezéshez 4 szín szükséges és elégséges is. Ugyanis van a gráfban egy teljes 4 pontú gráf, tehát a klikkszám, és így a kromatikus szám is legalább 4. Egy 4 színnel történő jó színezést pedig lehet találni:



Megjegyzés1: a fentieket tömören a $4 \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq |SZ_j| = 4$ egyenlőtlenséggel fejezhetjük ki, ahol $|SZ_j|$ egy jó színezés színszámát jelöli. A későbbiekben ezt a jelölést fogjuk használni.

Megjegyzés2: a gráfot le lehet rajzolni élkeresztvezetés nélkül is, tehát a gráf síkbarajzolható, így a 4-szín tétel alapján a kromatikus számra felső korlátként adódik a 4. (Ágyúval verébre).

16. Vegyük észre, hogy például a $v_1, v_2, \dots, v_8$ pontok egy teljes 8-pontú részgráfot adnak. Már csak egy 8 színnel történő jó színezést kell találnunk. Színezzünk ki minden pontot azzal a számú színnel, ahány maradékot ad az indexe 8-cal osztva. (Tehát kiszínezzük az első 8 pontot 8 színnel majd a 9.-ket az 1. színével, a 10.-ket a 2. színével és így tovább...) Könnyű látni, hogy ez egy jó színezés.
17. Megint találhatunk egy 8-pontú teljes gráfot, például a sakktábla egy sorának megfelelő pontokat. A 8 színnel történő jó színezésként pedig például úgy adhatjuk meg az i -edik sor j -edik sorában levő mező színét, hogy az legyen az $i + j$ nyolccal való osztásának maradéka. (Vagyis egy sort kiszínezzünk 8 színnel, és mindig eggyel elcsúsztatva színezzük ki a többi sort.)

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

18. A kapott gráf páros, hiszen a páratlan pontok között és a páros pontok között sem megy él, hiszen ezek összege páros. Egy gráf viszont akkor és csak akkor páros, ha a kromatikus száma 2.
19. Vegyünk egy C_5 -öt és egy hatodik pontot, amit összekötünk a C_5 minden pontjával. Ebben a gráfban nyilván nincs K_4 , és 3 szín nem elég kiszínezni, hiszen a C_5 -höz kell 3 szín és egy további a hatodik csúcsához.

20. Azt kell észrevenni, hogy F -ben a két részgráf pontjai nem kaphatnak azonos színt, mert minden G -beli pont össze van kötve minden H -beli ponttal. Ezért $\chi(G) + \chi(H)$ -nél kevesebb szín nem lehet elég a színezésre, mert ellenkező esetben valamelyik részt ki tudnánk színezni a kromatikus számánál kevesebb színnel is. Ennyi szín viszont elég, hiszen az eredeti színezések (ha különbözőre számozzuk a két részgráf színosztályait), akkor egy jó színezést adnak.
21. Vegyük a gráf egy jó színezését, aszínék alapján készítsük el a sorba rendezést, hogy a csúcsokat színük szerint soroljuk fel, és ekkor a Mohó színezés jó színezést ad vissza.
22. Legyenek $C_1, C_2, \dots, C_{\chi(G)}$ a gráf egyik legjobb színezésével kapott színosztályok. Ekkor nyilvánvaló, hogy $|C_i| \leq \alpha(G)$, mivel minden színosztály független pontokból áll, és mivel a színezés a gráf ponthalmazának egy partíciója, ezért: $|V(G)| = |C_1| + |C_2| + \dots + |C_{\chi(G)}| \leq \alpha(G) \cdot \chi(G)$ adódik.
23. Az állítás az előző feladat eredményéből és a $\chi(\overline{G}) \geq \omega(\overline{G}) = \alpha(G)$ ismert összefüggésből adódik.
24. Ha G két színnel színezhető, akkor G páros gráf, m és $n - m$ méretű pontosztályokkal, ekkor legfeljebb $m(n - m)$ éle lehet, számtani és mértani közepekről tudjuk, hogy:

$$m(n - m) = \left(\sqrt{m(n - m)} \right)^2 \leq \left(\frac{m + n - m}{2} \right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

Ez el is éretik, ha a pontokat minnél inkább két egyenlő részre bontjuk.

25. Indirekten módon vizsgáljuk meg, mi lenne ha nem lenne semelyik kék és piros között él. ekkor megtehetnénk, hogy minden piros pontot egymás után kékre fessünk át. Ekkor azonban eggyel csökkenne a felhasznált színek száma, ami ellentmondás, hiszen $\chi(G)$ színt használtunk fel eredetileg.
26. Bontsuk fel ismét G pontjainak halmazát színosztályokra a legjobb színezés szerint! Ekkor két színosztály között legalább egy élnek futnia kell, mert ellenkező esetben a két színosztály pontjai függetlenek lennének, és összevonhatnánk őket egy színosztályba. Ha viszont minden színosztály között megy legalább egy él, akkor ez $\chi(G)$ db színosztályra legalább $\binom{\chi(G)}{2}$ élet jelent.
27. Mutatunk egy színezést ami 2006 színt használ fel. Vegyük a 2006 darab kivételes pontot és színezzük ki 2006 különböző színnel. A maardék csúcsokat pedig Mohó módszerrel színezzük, ekkor nekik már elég lesz 2005+1 szín, tehát ki tudjuk színezni 2006 színnel.
28. G páros gráf, de bárhogy húzzunk be plusz élet, már nem lesz páros gráf, tehát G teljes páros gráf. Hány különböző 10 pontú teljes páros gráf van?

A nem nagyobbik osztály mérete 1,2,3,4,5 lehet, tehát 5 ilyen gráf van izomorfia erejéig.

29. Vegyük észre $10, 11, \dots, 20$ teljes részgráfot alkot, míg ellenben az $1, 2, \dots, 10$ illetve a $20, 22, \dots, 100$ pontok két független pontthalmazt. Tehát a $\omega(G) \geq 11$, ekkor ha mutatok egy 11 színt használó színezést, akkor beláttam, hogy $\chi(G) = 11$. Tehát színezzük ki 11 különböző színnel a $10, \dots, 20$ pontokat, majd mivel $1, 2, \dots, 9$ se egymással, se a 10-zel nincs összekötve adjuk nekik a 10-es színét, hasonlóan a $21, \dots, 100$ pontok megkaphatják a 20-as színét.
30. Vegyük a gráf egy olyan $\chi(G)$ színnel történő jó színezését, ahol a színeket számok reprezentálják. Ezek után minden élet irányítsunk a nagyobb "szín" felé. Ez jó lesz, hiszen egy irányított út egy színosztályból csak egy csúcsot tartalmazhat.
31. Mohó színezést alkalmazunk. A csúcsok fordított számozásával. Ez azért jó, mert így a színezés folyamán az aktuális csúcshoz legfeljebb két színezett csúcs kapcsolódik, így $\chi_i(G) \leq 3$
32. Az előző feladatot alkalmazva, csak gyártanunk kell egy jó sorrendet. Ehhez vegyünk fel egy új egyenest úgy, hogy semelyik másikkal ne legyen párhuzamos. Ezt tegyük le úgy, hogy minden pont a bal oldalára essen, és szép fokozatos toljuk el, hogy minden pont a jobb oldalára kerüljön. A pontok sorszáma legyen az, ahányadiknak került át az egyenes jobb oldalára. Ez nyilván jó számozás lesz.

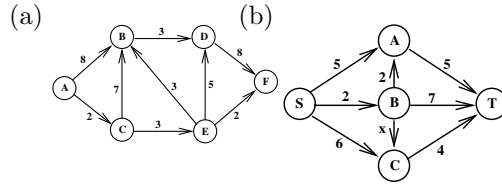
Bevezetés a számításelméletbe II.

2007. FEBRUÁR 28.

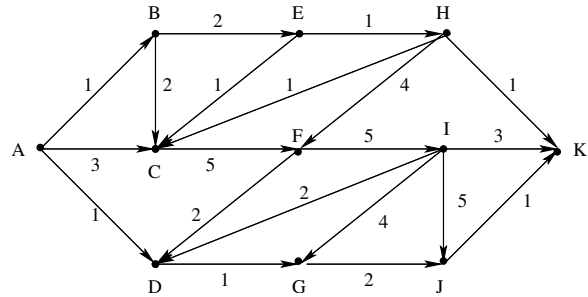
3. gyakorlat: Élszínezés, perfekt gráfok, PERT-módszer

33. Mennyi a Petersen-gráf élkromatikus száma (χ_e)?
34. A G páros, egyszerű gráfban minden pont foka r ($r \geq 2$). Osszuk fel G egy tetszőleges élét egy ponttal. Mennyi a keletkezett G' gráf $\chi_e(G')$ élkromatikus száma?
35. Egy körmérkőzéses bajnokságot hány forduló alatt tudunk lejátszani, ha
- páros számú játékos
 - páratlan számú játékos van a bajnokságban?
36. Mennyi $\chi_e(K_{2n} - \{n \text{ darab független él}\})$?
37. Mely n -ekre lesz $L(K_n)$, az n -szögpontú teljes gráf élgráfja perfekt?
38. Lássuk be, hogy egy páratlan kör komplementere nem perfekt!
39. Bizonyítsuk be, hogy egy páros gráf komplementere perfekt!
40. A G gráf csúcsai legyenek a 8×8 -as sakktábla mezői, és két mező akkor legyen szomszédos G -ben, ha egy lóugrásnyira vannak egymástól.
- Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$ -t!
 - Bizonyítsuk be, hogy G perfekt!
41. Legyen G összehasonlítási gráf (két csúcs pontosan akkor van összekötve benne, ha egy rendezés szerint az egyik nagyobb, mint a másik), és legyenek az élei úgy irányítva, hogy a rendezés szerint mindig a nagyobb felé mutassanak. Minden csúcs mellé írjuk oda a belőle induló leghosszabb irányított út csúcsainak számát.
- Bizonyítsuk be, hogy szomszédos csúcsok mellé nem írtuk ugyanazt a számot!
 - Bizonyítsuk be, hogy G perfekt!
42. Bizonyítsuk be, hogy egy intervallum gráf komplementere összehasonlítási gráf!
43. Jelölje D_9 azt a 18 élű gráfot, amit úgy kaphatunk egy 9 hosszúságú körből, hogy a körben másodsomszédos pontokat is összekötjük. Állapítsuk meg, hogy D_9 perfekt gráf-e!
44. Legyenek egy G gráf csúcsai azok a 10^{100} -nál nem nagyobb pozitív egész számok, amelyeknek van 20-nál kisebb prímosztója. G két csúcsa pontosan akkor alkot élet, ha a megfelelő pozitív egészek relatív prímek. Állapítsuk meg G kromatikus számának értékét! Igaz-e hogy perfekt-e?

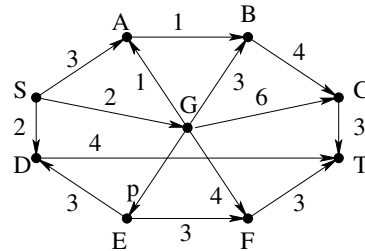
45. Határozzuk meg a mellékelt PERT-diagrammokhoz tartozó össz-időt és kritikus tevékenységeket. (A második példában az x változó függvényében.)



46. Állapítsuk meg a feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges idő hosszát az alábbi PERT diagramon:



47. Állapítsuk meg, hogy a p paraméter függvényében mennyi a feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges idő az alábbi PERT diagram által leírt munkafolyamatnál! Melyek a kritikus tevékenységek?



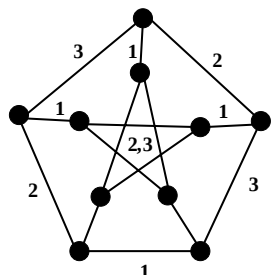
48. A G irányított gráf csúcsai legyenek egy n elemű halmaz összes részhalmazai. Az A részhalmazból akkor vezessen egy irányított él a B részhalmazba, ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$. Az A -ból B -be vezető élhez rendeljük hozzá az $|A| + |B|$ értéket. Határozzuk meg az így kapott PERT feladatban a szükséges időt és kritikus tevékenységeket!
49. Mutassuk meg, hogy egy hurokmentes irányított gráf élhalmaza felbontható két diszjunkt részhalmazra úgy, hogy egyik sem tartalmaz irányított kört!
50. A G irányított gráfból legfölből k él kitörölésével elérhető, hogy a maradék gráfban ne legyen irányított kör. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G -ben legfölből k él irányításának megfordításával is elérhető, hogy a kapott gráfban ne legyen irányított kör.

Bevezetés a számításméletbe II.

MEGOLDÁSOK

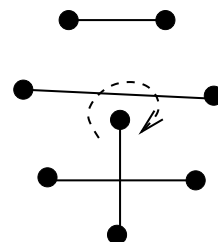
5. gyakorlat: Élszínezés, perfekt gráfok

33. A Petersen-gráf élkromatikus számára nézve a Vizing-tétel alapján elmondhatjuk, hogy $3 = \Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1 = 4$. Tehát, ha belátjuk, hogy 3 színnel nem lehet színezni az éleket, akkor adódik, hogy $\chi_e(G) = 4$. Indirekt módon tegyük fel, hogy mégis tudtunk 3 színnel színezni. Ekkor a külső 5-hosszú körön a 3 színből kettőt kétszer kell használnunk és a harmadik színt egyszer. Nevezzük el 1-esnek azt a színt, amivel csak 1 élet színeztünk ki a külső körön. Ekkor az éllel nem érintkező 3 küllő színe is 1-es kell legyen. Ez a három küllő viszont érintkezik a belső csillag mind az öt éléhez, vagyis a belső csillagban az 1-es színt már nem használhatjuk. Két színnel pedig nem tudunk kiszínezni egy 5-hosszú kört.



34. Belátjuk, hogy $\chi_e(G) = r + 1$, mert nem lehet kiszínezni a gráf éleit r db színnel. A pontok száma eredetileg páros volt, ezért $|V(G)| = 2n + 1$ páratlan lesz. A független élék maximális száma a gráfban $\nu(G) \leq n$ lehet, és mivel az egy színosztályba tartozó élék is függetlenek, ezért a színosztályok mérete is legfeljebb n . Mivel a színosztályokra bontás az élék egy partíciója, így az élék száma a színosztályok méreteinek összegével egyenlő: $n \cdot r + 1 = |E(G)| = |C_1| + |C_2| + \dots + |C_{\chi_e(G)}|$. A $|C_i| \leq n$ összefüggésből adódik, hogy az összeg legalább $r + 1$ tagból áll, vagyis $\chi_e(G) \geq r + 1$.
35. A feladat azt jelenti, hogy legalább hány független osztályra van szükség az élék partíciójához, vagyis mekkora az él kromatikus szám. Vizing tétel miatt ez csak $n - 1$, vagy n lehet. Ha n páros, akkor elég $n - 1$, és ezt a következő feladat megoldásában be is látjuk. Ha n páratlan, akkor nem elég $n - 1$. Hiszen egy szín osztály legfeljebb $\frac{n-1}{2}$ él kerülhet, és mivel pontosan $n \frac{n-1}{2}$ éle van a gráfnak, ezért kell legalább n színosztály.

36. Először azt látjuk be, hogy $\chi_e(K_{2n}) = 2n - 1$. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy egy bajnokságban, ahol páros darab csapat szerepel, tudunk olyan $2n - 1$ fordulós sorsolást készíteni, hogy mindegyik fordulóban játszon minden csapat, és végül mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszon. Egy ilyen sorsolást a legegyszerűbben a következő ábra segítségével adhatunk meg:



Vagyis egy $2n - 1$ csúcsú szabályos sokszög csúcsaiba és középpontjába helyezzük a pontjainkat. Vízszintesen párosítjuk a sokszög csúcsait, és az egy kimaradt pontot összehúzzuk a középső ponttal. Ezt a teljes párosítást ha elforgatjuk mindig eggyel, akkor $2n - 1$ darab diszjunkt teljes párosítást kapunk.

A feladat megoldása innen már egyszerű. Ha egy teljes párosítást vettünk el a teljes gráfból (vagyis egy forduló lejátszottunk a bajnokságban), akkor a maradék gráfban még $2n - 2$ diszjunkt teljes párosítást találhatunk, vagyis K_{2n} élhalmaza $2n - 2 = \Delta(G)$ színnel színezhető.

37. Az előző feladat pontosan azt mondja, hogy ha n páros, akkor $\omega(L(K_n)) = \Delta(K_n) = \chi_e(K_n) = \chi(L(K_n))$, tehát az alapgráfra teljesül az egyenlőség. Perfekt mégse lehet a gráf, ugyanis feszített részgráfként tartalmaz egy páratlan csúcsból álló teljes gráfot ($G' := K_{2n+1}$), erről pedig belátjuk, hogy $\chi_e(G') > \Delta(G') = 2k$. Ugyanis a független élék maximális száma $\nu(G') \leq k$ vagyis egy független élhalmazban, így egy színosztályban is legfeljebb k db él szerepelhet. Ezért, mivel a színezés egy partíciója az élhalmaznak adódik, hogy $\frac{(2k+1)2k}{2} = |E(G)| = |C_1| + |C_2| + \dots + |C_{\chi_e(G')}|$, ahol $|C_i| \leq k$. Ebből pedig következik, hogy a fenti összeg legalább $2k + 1$ tagú kell legyen (és ennyi szín elég is), vagyis $\chi_e(K_{2k+1}) = 2k + 1$.
38. Ha $\overline{G} = C_{2k+1}$, akkor $\alpha(\overline{G}) = \omega(G) = k$, mert egy független pontthalmazba nem kerülhetnek be a kör szomszédos pontjai. Viszont $\alpha(G) = 2$, mert csak két egymást követő körbeli pont lehet független a kör komplementerében. Ez azt eredményezi, hogy $|C_i| \leq$

2 minden színosztályra. Ekkor viszont a gráf pontjainak száma: $2k + 1 = |V(G)| = |C_1| + |C_2| + \dots + |C_{\chi(G)}|$ amiből adódik, hogy $\chi(G) \geq k + 1$. Ezért a gráf nem lehet perfect.

39. Először is meg kell jegyeznünk, hogy minden részgráf is egy páros gráf komplementere, ezért az egyenlőséget csak egy ilyen G gráfra kell igazolni. Megmutatjuk, hogy ha $\nu(\overline{G})$ az eredeti páros gráfban a független élek maximális száma (vagyis egy maximális párosítás), akkor G -ben $\omega(G) = \chi(G) = |V(G)| - \nu(\overline{G})$. König és Gallai tételeiből ugyanis következik, hogy $\omega(G) = \alpha(\overline{G}) = |V(G)| - \nu(\overline{G})$. Ha pedig egy maximális teljes párosítás végpontjait azonosra színezzük G -ben, a többi pontot pedig különbözőre, akkor adtunk egy $|V(G)| - \nu(\overline{G})$ szint használó jó színezést, amiből már következik az egyenlőség.

40. Azt kell észrevenni, hogy egy ló a sakktáblán egy fehér mezőről csak egy fekete mezőre léphet.

(a) Tehát $\chi(G) = 2$, a mezők jó színezése pedig az eredeti fekete-fehér színezés.

(b) Tudjuk, hogy $\chi(G) = 2 \iff G$ páros, és minden páros gráf perfect.

41. Ha egy összehasonlítási gráfnál elvégezzük a pontok előírt beszámozását, akkor

(a) A szomszédos csúcsok mellé nem írhattuk ugyanazt a számot mert, ha mondjuk mindkettőjükhöz k -t írtunk volna, akkor mindkét pontból a belőle kiinduló leghosszabb irányított út k hosszú kellene legyen, de ekkor a kisebb pontból a nagyobb pontba menve, és innen az ő leghosszabb irányított útját használva a kisebb pontból találhatnánk egy $k + 1$ -hosszú irányított utat is. Észre kell venni, hogy ez a számozás egyben egy jó színezése is a gráfnak.

(b) Az összehasonlítási gráf leghosszabb irányított láncában szereplő pontok adják a gráf maximális klikkjét. A számozás viszont biztosítja, hogy ezen lánc hosszánál nagyobb számot egyik pont mellé sem írtunk, vagyis a gráf kromatikus száma is pontosan ennyi. Minden ilyen gráfnak a feszített részgráfja is ugyanilyen tulajdonságú, ezért a gráf perfect.

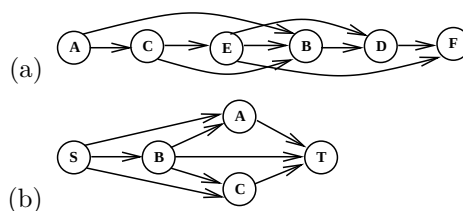
42. Két diszjunkt intervallumnak megfelelő pont közül legyen a nagyobb az, amelyik előlrébb szerepelt az egyenesen. Ezzel megadtuk az intervallum gráf komplementerében szereplő pon-

tok egy részben rendezését, ami egy összehasonlítási gráfot jelent.

43. Ebben a gráfban könnyen találhatunk egy feszített C_5 -öt, tehát nem perfect.

44. A 20-nál kisebb prímek nyilván teljes részgráfot alkotnak, 8 ilyen prím van, tehát $\chi(G) \geq 8$. De ennyivel ki is lehet színezni. Először színezzük ki ezt a 8 csúcst, és utána minden számot a legkisebb primosztolyának a színével. Tehát $\chi(G) = 8$. Azonban nem lesz perfect, mert van benne C_5 : 6,14,15,35,77.

45. A feladatok topológikus rendezése a következő:



A tevékenységek kezdési ideje, és a kritikus utak a következőképpen adódnak:

- (a) A kezdési idők:

$$S : 0; C : S + 2 = 2; E : C + 3 = 5;$$

$$B : \max\{S + 8, \underline{C} + 7, E + 3\} = 9;$$

$$D : \max\{E + 3, \underline{B} + 3\} = 12;$$

$$F : \max\{E + 2, \underline{B} + 8\} = 20.$$

A szükséges idő tehát 20, a kritikus út pedig: A,C,B,D,F

- (b) A kezdési idők x függvényében:

$$S : 0; B : S + 2 = 2;$$

$$A : \max\{\underline{S} + 5, B + 2\} = 5;$$

$$C : \max\{S + 6, B + x\} = \max\{6, 2 + x\};$$

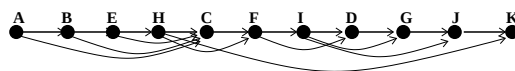
$$T : \max\{A + 5, B + 7, C + 4\} = \max\{10, 9, \max\{10, 6 + x\}\}$$

Ha tehát $x < 4$, akkor $T : 10$, és a kritikus utak: S,A,T; S,C,T.

Ha $x > 4$, akkor $T : 6 + x$, és a kritikus út: S,B,C,T.

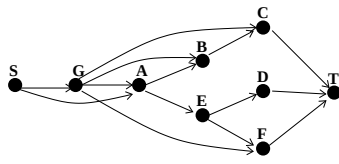
Ha $x = 4$, akkor $T : 10$, és fenti kritikus utak itt is kritikusak lesznek.

46. A gráf topológikus rendezése a következő:



Ez alapján a következő kezdési idők adódnak:
 $A : 0; B : A + 1 = 1; E : B + 2 = 3; H : E + 1 = 4;$
 $C : \max\{\underline{H + 1}, E + 1, B + 2, A + 3\} = 5;$
 $F : \max\{\underline{C + 5}, H + 4\} = 10;$
 $I : F + 5 = 15;$
 $D : \max\{\underline{I + 1}, F + 2, A + 1\} = 16;$
 $G : \max\{\underline{I + 4}, D + 1\} = 19;$
 $J : \max\{\underline{G + 2}, I + 5\} = 21;$
 $K : \max\{\underline{J + 1}, H + 1\} = 22$
 Tehát a szükséges idő 22, a kritikus út pedig:
 A,B,E,H,C,F,I,G,J,K.

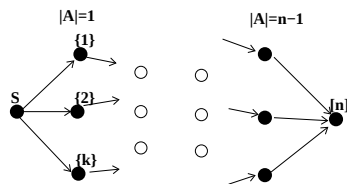
47. A topológikus rendezés:



A kezdési idők a p függvényében a következők:
 $S : 0;$
 $G : S + 2 = 2;$
 $A : \max\{\underline{G + 1}, S + 3\} = 3;$
 $B : \max\{\underline{G + 3}, A + 1\} = 5;$
 $E = G + p = 2 + p;$
 $C : \max\{\underline{G + 6}, \underline{B + 4}\} = 9;$
 $D : \max\{\underline{E + 3}, S + 2\} = p + 5;$
 $F : \max\{\underline{G + 4}, E + 3\} = \max\{6, p + 5\};$
 $T : \max\{C + 3, D + 4, F + 3\} = \max\{12, 9 + p, \max\{9, p + 8\}\} = \max\{12, 9 + p\}$

Ha tehát $p < 3$, akkor $T : 12$, a kritikus út pedig: S,G,B,C,T
 Ha $p > 3$, akkor $T : 9 + p$, a kritikus út: S,G,E,D,T
 Ha $p = 5$, akkor $T : 12$ és mindkét fenti út kritikus.

48. A topológikus rendezés a halmazok elemszáma szerint történik, tehát egy szintre az azonos elemszámú halmazok kerülnek:



A szimmetria miatt minden pont kezdési ideje egy szinten meg kell egyezzen, és könnyen belátható, hogy minden tevékenység kezdési idejét az őt megelőző szint pontjai befolyásolják. A kritikus utak ezért az n hosszú irányított utak lesznek, (melyek azon halmazsorozatoknak felelnek meg, ahol mindig eggyel növekszik a halmazok elemszáma). Így $T : 1 + (1 + 2) + (2 + 3) + (3 + 4) + \dots + (n - 1)n = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) - n = n(n + 1) - n = n^2$

49. Az n csúcsú teljes gráf éleinek számának kétszerese $= 2\binom{n}{2} = n(n - 1)$. A legtöbb élet tartalmazó gráf, melyben nincs háromszög a Turán tétel alapján egy olyan teljes páros gráf, amelyben a két halmaz számosságának különbsége nem nagyobb 1-nél. Egy ilyen gráf vagy m^2 , vagy $m(m - 1)$ élet tartalmaz, ahol m a nagyobbik halmaz számossága. A fenti képlettel összehasonlítva láthatjuk, hogy a legkisebb pontszámú ilyen gráf $n = m$ -re adódik, tehát egy olyan teljes páros gráfon lesz minimális a pontok száma, melynek pontszáma $m + (m - 1) = 2m - 1$.

50. Vegyük a gráf egy olyan reprezentálását, amiben a pontokat egy egyenesre pakoltuk fel. A két élhalmaz legyen a balról jobbra menő élek, illetve a jobbról balra menők.

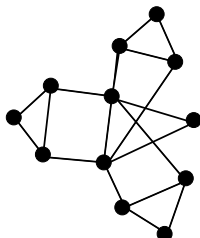
51. Hagyjuk el ezt a legfölgjebb k élet. A maradék gráfban nincs kör, tehát szintekre bontható. Az elhagyott k élet most a szinteknek megfelelően rakjuk vissza, így nem lesz kör és legfölgjebb k élt kellett megfordítani.

Bevezetés a számításméletbe II.

2007. MÁRCIUS 7.

4. gyakorlat: Párosítások, König és Gallai tételei

51. Van-e teljes párosítás az alábbi gráfban?



52. Bizonyítsd be, hogy egy reguláris páros gráfban mindig létezik teljes párosítás!

53. Lássuk be, hogy egy reguláris páros gráf élhalmaza partícionálható teljes párosításokra! (Tehát az élek kiszínezhetőek r db színnel úgy, hogy mindegyik egyszínű élhalmaz egy teljes párosítást adjon.)

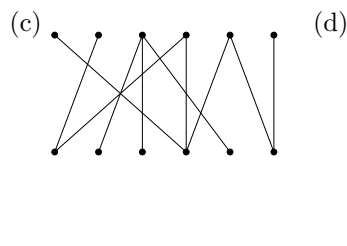
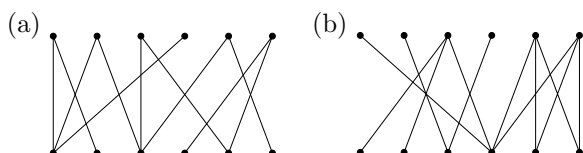
54. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab A). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)

55. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan k darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!

56. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolóak ismerik egymást!

57. Egy ünnep alkalmával török szultán udvarában a férfiak két-két háremhölgyet választanak. Minden férfinak legalább 2 háremhölgy tetszik. Mi a feltétele annak, hogy minden férfi neki tetsző két háremhölgyvel tölthesse az éjszakát?

58. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



59. Határozzuk meg az alábbi gráfokra $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\tau(G)$ értékeit?

(a) $K_{3,3}$,

(b) K_5

(c) $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2004}\}$ és $(v_i, v_j) \in E(G)$, ha $i + j$ hárommal osztva 1 maradékot ad.

(d) Petersen-gráf

60. Legyen $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_{74}\}$. A v_i és v_j ($i \neq j$) csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az $\alpha(H)$ – független pontok maximális, $\nu(H)$ – független élek maximális, $\rho(H)$ – a lefogó élek minimális, $\tau(H)$ – lefogó pontok minimális számát!

61. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n - 1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?

62. Lássuk be, hogy egy n pontú egyszerű G gráfban $\tau(G) = n - 1$ akkor és csak akkor, ha $G = K_n$

63. Igazoljuk, hogy minden egyszerű G gráfban $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ és létezik olyan gráf is, melyre az egyenlőség teljesül.

64. Jelölje $\Delta(G)$ a G gráf maximális foksámát, $\tau(G)$ pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$.

65. Jelölje $\omega(G)$ a G gráf egyik maximális klikkjének méretét. Mutassuk meg, hogy: $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$

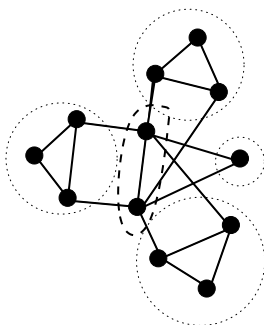
66. Igazoljuk, hogy tetszőleges n csúcsú G egyszerű gráfra fennáll, hogy $\alpha(G) \geq n - 2\nu(G)$.

Bevezetés a számításméletbe II.

MEGOLDÁSOK

3. gyakorlat: Független és lefogó pontok, élek

51. Nincs benne teljes párosítás, mert sérül a Tutte-feltétel: a két középső pontot elhagyva a gráf 3 háromszögre és egy izolált pontra, (vagyis 4 páratlan komponensre) esik szét.



52. Mutassuk meg, hogy egy r -reguláris páros gráfban minden X halmazra teljesül a Hall-feltétel. Ha ezt belátjuk, akkor a Frobenius-tétel miatt létezik teljes párosítás a gráfban, mert a két halmaz elemszáma triviálisan megegyezik. Vegyünk egy tetszőleges X halmazt, legyen ennek elemszáma k . Az X halmaz szomszédainak, $N(X)$ -nek az elemszáma pedig l . Ekkor, mivel minden pont foka r , adódik, hogy:

$$k \cdot r = X\text{-ből kimenő élek száma} \leq N(X)\text{-be bemenő élek száma} = l \cdot r$$

Melyből adódik a $k \leq l$ egyenlőtlenség, tehát teljesül a Hall-feltétel.

53. Az előző feladattól megtudtuk, hogy minden r -reguláris páros gráfban található egy teljes párosítás. Színezzük ezt ki 1-es számú színnel, majd hagyjuk el a gráfból. A maradék gráf $(r-1)$ -reguláris lesz, mert minden pont foka pontosan 1-el csökkent. Ebben is találhatóunk tehát egy teljes párosítást, amit színezzük ki a 2-es számú színnel. Így folytatva az algoritmust, az összes élet ki tudjuk színezni r db színnel úgy, hogy minden színosztály pont egy teljes párosítást adjon.

54. Tekintsük azt a páros gráfot, amiben az egyik ponthalmazt a laptípusok, a másik ponthalmazt a csomagok alkotják. két pont között annyi él menjen, ahányolyan típusú kártya van abban a csomagban. Ekkor egy reguláris páros gráfot kapunk. Az előző feladatban már beláttuk, hogy ekkor van teljes párosítás, és nekünk pont arra van szükségünk. Fontos megjegyezni, hogy itt előfordulhatnak többszörös élek, azonban az előbb se használtuk ki az egyszerűséget.

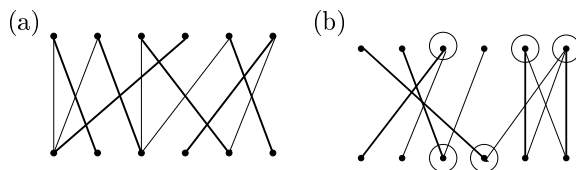
55. Rendeljük azt a $2n$ csúcsú páros gráfot a mátrixhoz, melynek csúcsai a mátrix sorai, illetve oszlopai, és két pont között pontosan akkor fusson él, ha megfelelő sor és oszlop metszetében 1-es

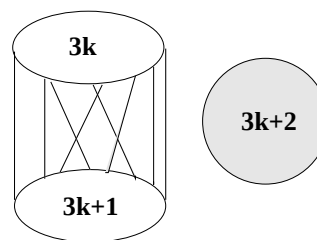
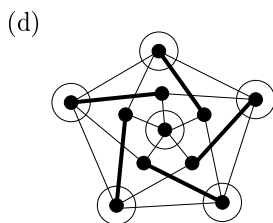
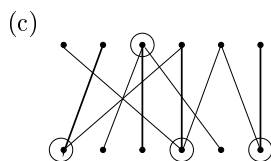
található. Így minden pont foka a gráfban pontosan k lesz, tehát a 9. feladat nyomán ebben is találhatóunk egy teljes párosítást, ami viszont a mátrixra nézve azt jelenti, hogy találtunk n db 1-es úg, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy 1-es szerepeljen.

56. Megmutatjuk, hogy teljesül a Hall-feltétel minden X lány-halmazra. Ha X elemszáma kisebb, vagy egyenlő, mint 13, akkor triviálisan több lesz az $N(X)$ elemszáma 13-nál, hiszen már egy lány is legalább 13 fiút ismer. Ha viszont az X elemszáma legalább 13, akkor ők már az összes fiút ismerni fogják, mert ha nem így lenne, akkor találnánk egy olyan fiút, aki nincs ismeretségben az X halmazzal, így legfeljebb csak 12 lányt ismerhet, hiszen a lányok száma 25 volt.

57. Megmutatjuk, hogy akkor és csakis akkor találhatóunk minden férfinak két neki tetsző háremhölgyet, ha teljesül, hogy bármilyen X fiú halmaznak tetsző hölgyek száma, $|N(X)| \geq 2|X|$. Vissza-vezetjük a feladatot a Hall-feltételre. Legyen minden férfinak egy ikertestvére, akiknek pontosan ugyanazok a lányok tetszenek. (Vagyis a gráfban minden férfi-pontot duplázunk meg, és kössük össze ugyanazzal a pontokkal, mint amikkel az eredeti pont össze volt kötve.) Az új feladatban pontosan akkor tudunk találni egy olyan párosítást, amiben minden férfinak jut neki tetsző háremhölgy, ha az eredeti feladatban minden férfi kettőt is tud találni.

58. Megint a $|F_e| \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq |L_p|$ egyenlőtlenséget használjuk az a, b, c, páros gráfoknál. Ebből $\nu(G)$ -re sorrendben 6,5,4 adódik. A többi paraméter pedig már egyszerűen számolható, hiszen a gráfok párosak voltak.



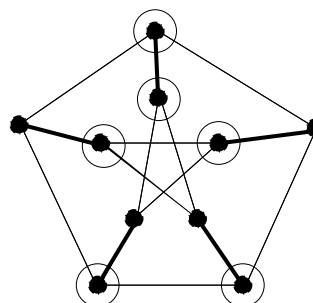


A d) feladat picit nehezebb. Először határozzuk meg $\nu(G)$ -t! Ez kisebb, vagy egyenlő kell legyen 5-nél, hiszen 11 pont felének alsó-egészrészénél sohasem lehet több független élet találni. Viszont 5 független él van a gráfban, ezért $\nu(G) = 5$. Ebből adódik, hogy $\rho(G) = 6$.

Most lássuk be, hogy $\tau(G) = 6$! Ehhez egyrészt meg kell mutatnunk, hogy ennél kevesebb nem lehet, másrészt mutatnunk kell egy 6 pontból álló lefogó ponthalmazt. A gráf középső csillagának éleit le kell fogni. Ha ezt a csillag közepéből akarjuk lefogni, akkor az imént bejelölt 5 független él lefogásához biztosan kell még legalább 5 pont. Ha viszont a csillag-élek végpontjait vennénk, akkor a külső ötszög egyetlen éle sem lenne még lefogva. Ezért 6 pont legalább kell az élek lefogásához. Az ábrán bekarikázott 6 pont viszont mutatja az elégségességet.

független élhalmaz az első két halmaz egy teljes párosítása, és egy teljes párosítás a harmadik halmaz teljes grájában (ez tehát egy teljes párosítás G -ben, ennél több független él nem lehet.) Ezért $\nu(G) = \rho(G) = 1002$.

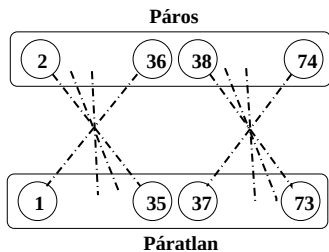
- (d) A Petersen-gráfban létezik egy teljes párosítás, így $\nu(G) = \rho(G) = 5$. Ha a külső és a belső 5-hosszú kört vesszük, akkor ezek lefogásához legalább 3-3 pontra szükségünk van. 6 pont viszont elég is, ezért $\tau(G) = 6$ és $\alpha(G) = 4$.



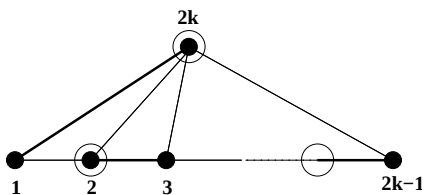
59. (a) Egy teljes páros gráfnál a független pontok maximális száma mindig a nagyobbik halmaz elemszáma, ebben az esetben $\nu(G) = 3$. Innen már adódik, hogy a többi érték is 3.
- (b) A teljes gráfokban legfeljebb 1 pont lehet független, így $\alpha(G) = 1$ és $\tau(G) = 4$. 5 pont esetén $\nu \leq 2$, és két független élet tudunk is találni, így $\nu(G) = 2$ és $\tau(G) = 3$.
- (c) Ebben a feladatban három részre tudjuk osztani a pontok halmazát aszerint, hogy az indexük mennyit ad maradékosztva. A $3k$ és $3k+1$ alakú indexszel rendelkező pontok egy teljes páros gráfot adnak, (vagyis a két elemhalmaz között az összes él be lesz húzva, a halmazokon belül pedig egy sem). A $3k+2$ alakú indexszel rendelkező pontok pedig egy teljes gráfot adnak, hiszen bármely két ilyen alakú szám összege $3k+1$ alakú. Ez a halmaz viszont már nem köti össze a halmazok között, így a halmazok között legfeljebb 1 pontot vehetünk hozzá a harmadik halmazból. Ebből $\tau(G) = 1335$ adódik. Egy maximális elemszámú

60. $74 = 2 \cdot 37$, ezért két páratlan indexű és két páros indexű pont nem lehet összekötve a gráfban, hiszen indexeik összege páros volna, ami nem relatív prim a 74-hez. Tehát a kapott gráf páros, az egyik halmazát a páratlan indexű pontok, a másik halmazát a páros indexű pontok alkotják. A teljes páros gráfból viszont még hiányzik néhány él, pontosan azok, melynek végpontjainak indexének összege osztható 37-el, (tehát vagy 37, vagy 111, hiszen a 74 összegűeket már elhagytuk). Ez az elhagyott élhalmaz pontosan egy teljes párosítás volt a gráfban, így ami maradt az egy reguláris páros gráf. Ebben viszont a 2. feladatsor 9. feladata értelmében létezik egy teljes párosítás, vagyis

$\nu(G) = 37$. Mivel a gráf páros, adódik, hogy az összes többi érték is 37 lesz.



61. A $|F_e| \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq |L_p|$ egyenlőtlenségből, és az $n = |F_e| = |L_p| = n$ egyenlőségből mutatjuk meg, hogy mindegyik paraméter értéke n lesz. Tehát találnunk kell egy n élből álló független élhalmazt (vagyis egy teljes párosítást) és egy n pontú lefogó halmazt. A Hamilton-kör minden második éle jó lesz teljes párosításnak, lefogó pont-halmaznak pedig c pontból indulva a Hamilton-kör minden második pontja fog megfelelni.



62. Egy teljes gráfban a lefogó pontok száma $n-1$ kell legyen, hiszen ennél kevesebb pont esetén maradna olyan él, amelyik egyik végpontja sincs benne a lefogó élhalmazban. Ha viszont létezik két olyan u és v pont, melyek nincsenek összekötve a gráfban, akkor a többi $n-2$ pont már egy lefogó pont-halmaz lehetne.
63. Legyen $F_{e\max}$ egy olyan független élhalmaz, amelyhez már nem tudunk úgy hozzávenni élet a gráf éleiből, hogy az élhalmaz független maradjon. (Egy ilyen halmazt nevezünk tartalmazásra nézve maximális halmaznak. Világos, hogy ennek elemszáma lehet kisebb mint az elemszámra nézve maximális független élhalmazé, vagyis $|F_{e\max}| \leq \nu(G)$.) Megmutatjuk, hogy ha egy ilyen $F_{e\max}$ élhalmaz végpontjait vesszük, akkor ezek a pontok egy lefogó pont-halmazt adnak. Ugyanis, ha maradt volna olyan él, melyet ezek a végpontok nem fognak le, akkor ezt az élet hozzá tudtuk volna venni $F_{e\max}$ -hoz is. Ebből adódik, hogy:

$\tau(G) \leq 2|F_{e\max}| \leq 2\nu(G)$. A legegyszerűbb példa az egyenlőség teljesülésére egy háromszög.

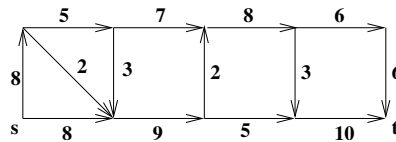
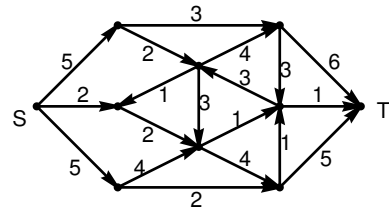
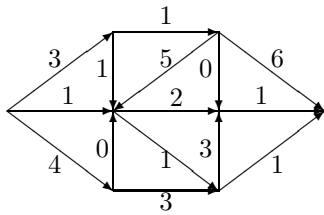
64. Legyen $v_1, v_2, \dots, v_{\tau(G)}$ a minimális számú lefogó pontok halmaza, és $d(v)$ egy v pont fokszáma. Definíció szerint $d(v_i) \leq \Delta(G)$, és mivel a gráf minden élének legalább az egyik végén található lefogó pont, így adódik, hogy $|E(G)| \leq d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_{\tau(G)}) \leq \Delta(G) \cdot \tau(G)$.
65. Minden G gráfra igaz, hogy véve egy tetszőleges F_p független pont-halmazt és egy tetszőleges T teljes részgráfot, ezek metszete legfeljebb egy pont lehet. Ebből az következik, hogy a maximális független pont-halmaz és a maximális klikk is legfeljebb egy közös pontot tartalmazhat, tehát igaz az egyenlőtlenség.
66. Teljesen hasonlóan a 63as feladathoz, csak azt kell felismernünk, hogy $\alpha(G) = n - \tau(G)$.

Bevezetés a számításelméletbe II.

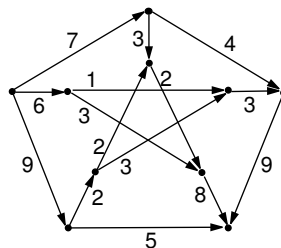
2007. MÁRCIUS 14.

5. gyakorlat: Folyamok

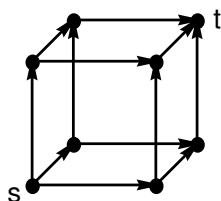
67. Egy vállalatnál hét pályázó jelentkezett hat üres munkahelyre (számozzuk ezeket 1-től 6-ig), egy ember több helyre is: Aladár az 1-es; Béla az 1, 3-as; Csaba a 2, 4, 6-os; Dani a 2, 5-ös; Erzsi a 3, 4, 5, 6-os; Feri az 1, 3-as; Géza a 3-as munkahelyre.
- (a) Döntsd el, hogy betölthető-e mind a hat munkahely (egy ember csak egy helyre kerülhet)! Ha nem, akkor hány tölthető be?
- (b) Változtat-e valamin, ha Feri meggondolja magát és a 2-es munkahelyet is hajlandó elfogadni?
68. Egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n . Bizonyítsuk be, hogy ekkor van benne teljes párosítás!
69. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt. El kellene osztani közöttük $2n$ különböző fajta csokit úgy, hogy mindenki egyet-egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokik közül. Továbbá minden emberre teljesül, hogy ha ő valamelyik fajta csokit nem szereti, akkor a házastársa ezt a fajtát biztosan szeretni fogja. Bizonyítsd be, hogy a csokik szétoszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret!
70. Számítsuk ki a maximális folyam értékét és bizonyítsuk be, hogy az tényleg maximális!



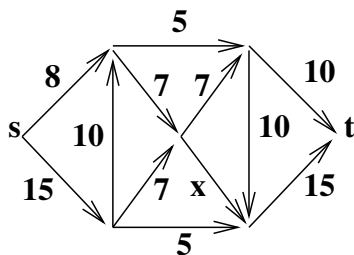
71. Határozzuk meg a maximális folyam értékét az alábbi gráfokban és bizonyítsuk is be, hogy ez maximális.



72. Az alábbi gráf élei közül írjunk hatra 1 és hatra 2 kapacitást úgy, hogy a maximális folyam a lehető legnagyobb illetve a lehető legkisebb legyen.



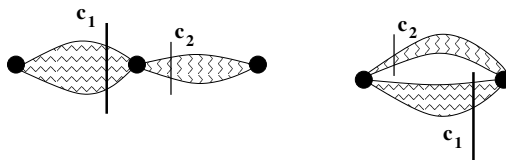
73. Keressünk maximális folyamot x függvényében!



74. Igazak-e az alábbi állítások? Nemleges válasz esetén mutassunk ellenpéldát, igenlő válasz esetén pedig igazoljuk az állítást!

- (a) Egy folyam élein a kapacitások *egész* számok. Létezik-e olyan maximális folyam, aminek minden élén *egész* a folyam értéke?
- (b) ugyanaz a feladat, csak most nem *egész*, hanem *páros*
- (c) ugyanaz a feladat *páratlan* esetre

75. Adott két hálózati folyam, melyekben a minimális vágás értéke c_1 illetve c_2 . Mekkora lesz a maximális folyam értéke abban a hálózatban, amit a két folyam soros illetve párhuzamos egymáshoz kapcsolásával kapunk?



76. A G irányított gráf csúcsai legyenek az $1, 2, \dots, 2k$ egész számok. Az a számból b -be vezessen irányított él, ha $b > a$. Az a -ból b -be vezető él kapacitása legyen 1, ha a páratlan és legyen 2, ha a páros. Mennyi az így kapott hálózatban az 1-ből $2k$ -ba vezető maximális folyam értéke?

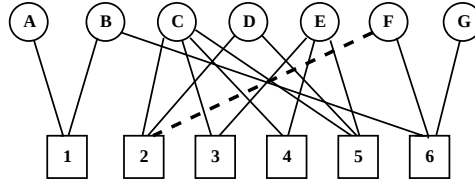
77. Egy irányított gráfban nincs (irányított) kör $\implies$ van forrás és nyelő a gráfban. Igaz-e az állítás? És a megfordítása?

Bevezetés a számításelméletbe II.

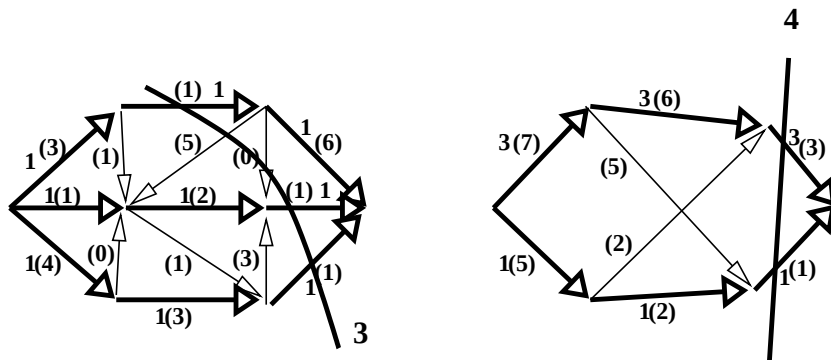
2004. MÁRCIUS 25-26.

7. gyakorlat: Folyamok

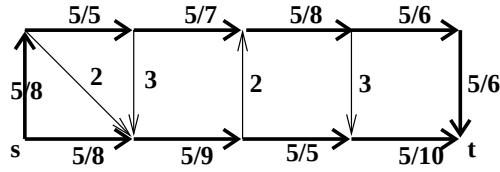
67. Az első esetben nem létezhet olyan párosítás, amivel mind a 6 hely betölthető lenne, mert a $\{2, 3, 4, 5\}$ munkákhoz csak 3db jelentkező van, tehát sérül a Hall-feltétel. Öt álláshely viszont betölthető. Ha Feri mégis elvállalja a 2. munkát, akkor változik a helyzet, és található minden munkához jó párosítás, például: A-1, F-2, C-3, E-4, D-5, G-6.



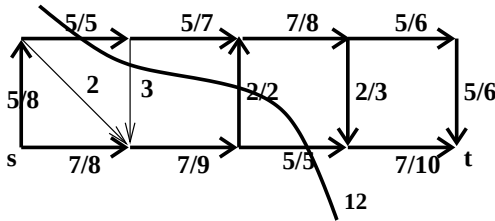
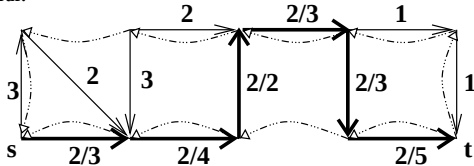
68. Ha egy $2n$ pontú gráfban a minimális fokszám legalább n , akkor teljesül a Dirac-feltétel, ezért létezik Hamilton-kör a gráfban, így találhatunk teljes párosítást is benne.
69. A feladat megfogalmazható egy páros gráfban teljes párosítást kereső problémaként, a két osztály a csokik, meg az emberek, és akkor huzzunk be egy élet, ha a megfelelő ember szereti azt a fajta csokit. Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy sérül a Hall feltétel, tehát van valahogy x ember, hogy összesen legfeljebb $x - 1$ féle csokit kedvelnek. Egy ember legálább n féle csokit szeret, tehát x szükségképpen legalább $n + 1$, azonban $n + 1$ ember között a skatulya elv miatt biztos lesz egy házaspár, azonban a pár együtt már szeret $2n$ féle csokit. Tehát nem létezhet ilyen x , vagyis van teljes párosítás.
70. Az ábrán jelölünk egy maximális folyamot és egy minimális vágást, melyek értéke megegyezik:



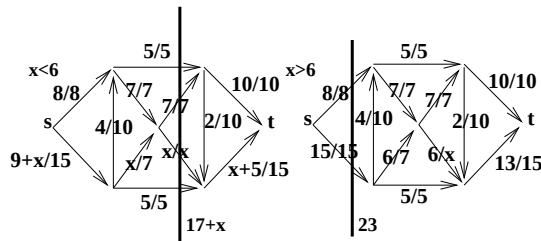
A maximális folyamhoz a javító gráf felrajzolása után két lépésben jutunk el:



Javító graf:



71. Teljesen hasonlóan a fentiekhez, a maximális folyam és a minimális vágás értéke 17.
72. Legalább 3, mert van 3 éldiszjunkt út a forrástól a nyelőig, és a forrás illetve a nyelő éleihez rakva az egyeseket, középre a ketteseket, akkor a folyam értéke pont három lesz. És legfeljebb 6, mert a forrásnál meghuzott vágásban 3 él van, és ezek összkapacitása legfeljebb 6, erre pedig a konstrukció pont az előző fordítottja, tehát középen az egyesek és a szélén a kettesek.
73. Érdemes megvizsgálni a feladatokat $x = \epsilon$ kis számra és $x =$ végtelenre. Az első esetben a paraméteres kapacitású él benne lesz a vágásban, a második esetben biztosan nem. A váltás $x = 6$ -nál következik be.

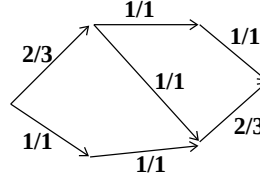


74. Az igazolások és ellenpéldák a következők:

- (a) Az Edmonds-Karp javító-utas algoritmus biztosítja azt, hogy minden javítás után egész értékkel nő (vagy csökken) egy élen átmenő folyam értéke. Ezért az algoritmus végén is egészek lesznek a folyamértékek az éleken.

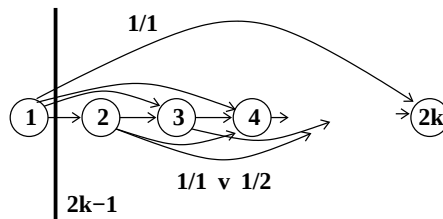
(b) Ez is igaz, mert a ha a folyamértékek az éleken párosak, akkor a javító gráfban is minden kapacitás páros marad, ezért mindig páros számmal növekszik (vagy csökken) minden élen a folyam értéke egy javítás során.

(c) Ez már nem igaz. Egy ellenpélda rá a következő hálózat:



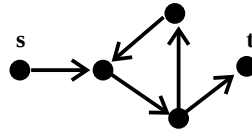
75. Soros kapcsolás esetén a kisebbik vágás, minimális vágás, ezért $c = \min\{c_1, c_2\}$. Párhuzamos kapcsolás esetén minimális vágás a két vágás uniója, melynek értéke: $c = c_1 + c_2$. (Gondoljuk meg, hogy ekkora értékű folyamok miért léteznek?!)

76. Az első pontból kiinduló élek egy minimális vágást adnak, mert létezik azonos nagyságú, $2k - 1$ értékű folyam is:



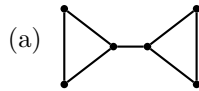
77. Ha elindulunk egy pontból előre felé irányított éleken, akkor előbb vagy utóbb elérünk egy nyelőbe, mivel egy korábbi pontba sohasem léphetünk vissza, mert keletkezne irányított kör. (Ugyanez a gondolatmenet visszafelé biztosítja a forrás létezését.)

A másik állítás nem igaz, erre egy ellenpélda a következő gráf:



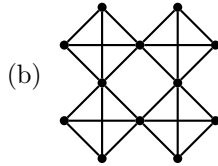
Bevezetés a számításelméletbe II.
 2007. MÁRCIUS 21.
 6. gyakorlat: Összefüggőség, Menger-tételek

78. Hányszorosan pont- illetve élösszefüggőek az alábbi gráfok:



(c) Petersen-gráf

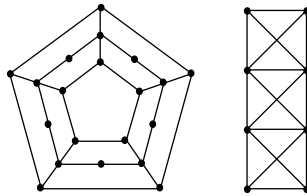
(d) végtelen négyzetrács



(e) n hosszú kör

(f) $K_{n,n}$

79. Hányszorosan összefüggőek az alábbi gráfok?



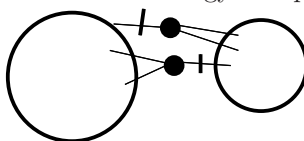
80. Mutassuk meg, hogy a k -szoros pontösszefüggésből következik a k -szoros élösszefüggés, de ugyanez visszafelé már nem teljesül!
81. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszorosan összefüggő gráfban van páros hosszúságú kör!
82. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris gráf pont- és élösszefüggőségi száma megegyezik! Mi van, ha a gráf 3- vagy 4-reguláris?
83. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$ pontú G gráf n -szeresen élösszefüggő, akkor kétszeresen pontösszefüggő is!
84. Legyen A és B a G gráf csúcsai halmazának két diszjunkt, egyenként legalább k elemű részhalmaza. Tegyük fel, hogy bárhogyan hagyunk el G -ből k -nál kevesebb pontot, a maradék gráfban van olyan út, amely A és B -beli pontokat köt össze. Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik G -ben k darab (teljes egészében) pontdiszjunkt út úgy, hogy mindegyik A és B -beli pontokat köt össze!
85. Egy $n \times n$ -es négyzetrács n^2 darab csúcsából m -et pirosra festettünk. Szeretnénk minden piros csúcsot vonallal összekötni a rács szélének valamelyik pontjával úgy, hogy a vonalak csak a rács élein haladjanak és semelyik kettő ne messe egymást. Adj (hatékony) algoritmust, amely eldönti, hogy ez lehetséges-e!
86. A $G(V, E)$ összefüggő gráfban minden $v \in V$ ponthoz és $e \in E$ élhez van olyan kör, amely v -n is és e -n is átmegy. Mutassuk meg, hogy a G gráf kétszeresen összefüggő!
87. Legyenek A, B és C diszjunkt, r elemű halmazok. Készítsünk egy G gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen $A \cup B \cup C$ és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha nem ugyanabba a halmazba esnek. Határozzuk meg azt a maximális k számot, amelyre a G gráf k -szorosan összefüggő.
88. Legyen $k \leq n - 1$. Bizonyítsd be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n+k-2}{2}$, akkor a gráf k -szorosan összefüggő!
89. Legyen G reguláris páros gráf, amelyről tudjuk, hogy összefüggő és legalább három csúcsa van. Mutassuk meg, hogy ekkor G 2-szeresen is összefüggő.
90. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy egyszerű síkgráf, akkor nem lehet hatszorosan pontösszefüggő!

Bevezetés a számításelméletbe II.

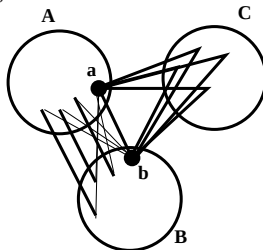
MEGOLDÁSOK

8. gyakorlat: Összefüggőség

78. A gráfok pont- illetve élösszefüggőségi számai a következők:
- (a) 1,1 Mert összefüggő, de egy pont vagy egy él elvételével már két komponensre esik szét.
 - (b) 2,3 Két pont elvételével már szétesik komponensekre, viszont tetszőlesen két pont között létezik legalább két pontdiszjunkt út, mert létezik Hamilton-kör a gráfban (a külső körív). Három él elvételével már izolálni lehet egy pontot, és tetszőleges két pont között létezik legalább 3 pontdiszjunkt út. Ebből kettő a külső köríven át vezet, és egy út a belső éleken keresztül is létezik minden pontból minden másik pontba.
 - (c) 3,3 A fokszám mindkét esetben felső korlátja az összefüggőségi számoknak. Két pont elvételével viszont a gráf még biztosan összefüggő marad (így két él elvételével is). Ugyanis, ha az elhagyott két pont külső (illetve a belső) körön volt, akkor a küllők által az összefüggőség triviálisan megmarad. Ha az egyik elhagyott pont a külső körben, a másik a belső körben volt, akkor a maradék két négy hosszú utat is biztosan összeköti legalább egy küllő-él, ezért a gráf összefüggő marad.
 - (d) 4,4 A fokszám felső korlát. 4 db pontdiszjunkt út (és ezért eéldiszjunkt út is) pedig triviálisan létezik tetszőleges két pont között a négyzetrácscon.
 - (e) 2,2 Ez triviális.
 - (f) n, n A fokszám felső korlát mindkét paraméterre. n -nél kevesebb pont elvételével viszont a gráf még összefüggő marad, mindenképpen marad egy-egy pont mindkét halmazban, amiken keresztül az összefüggőség biztosított.
79. Teljesen hasonló gondolat menettel dolgozunk, mint az előző feladat. Az első gráf 2,2, a második 2,3.
80. Ha k él elhagyásával szétesne a gráf komponensekre, akkor ugyanezen élek tetszőleges végpontjait elhagyva is szétesne a gráf. A másik irányra ellenpélda az 1.feladat (b) része.
81. 3-szoros összefüggőségből következik, hogy bármely 2 pont között van 3 pontdiszjunkt út. Vegyünk két pontot köztük a skatulya-elv miatt van két azonos paritású út. Ezek együtt egy páros hosszú kört alkotnak.
82. Két-reguláris gráf mindig diszjunkt körök uniója. Ha több kör van, akkor a gráf nem összefüggő, ha pedig csak egy n -hosszú kör, akkor 2,2 az összefüggőség.
- Ha minden pont foka három, akkor a pont- és élösszefüggőségi számok megegyeznek. Ugyanis ha az elhagyott pontok helyett mindig azt az élet hagyjuk el, amelyik egyedülként köti össze az elhagyandó pontot egy keletkező komponenssel, akkor ugyanennyi él elhagyásával szintén megszűnik a gráf összefüggősége. (lásd ábra!)
- 4-reguláris gráfokra az állítás már nem igaz. Az 1.feladat (b) gráfjának kibővítésével könnyen konstruálhatunk egy ellenpéldát.



83. A pontok minimális fokszáma mindig felső korlát az összefüggőségi számokra ezért, ha n -szeresen élösszefüggő egy gráf, akkor biztos, hogy minden pontjának foka legalább n . Ebből pedig a Dirac-tétel miatt következik a Hamilton kör létezése, ami viszont biztosítja a kétszeres összefüggőséget.
84. Vegyünk fel egy s , meg egy t pontot a gráfhoz, úgyhogy, s -et minden A -belivel kössünk össze, és t -t minden B -belivel. Ekkor a feltételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $s - t$ utakat lefogó pontok száma legalább k . Ez Menger tétele szerint azt jelenti, hogy van legalább k pontdiszjunkt $s - t$ út, ami az s, t pontok nélkül pont az kívánt állítással ekvivalens.
85. Készítsünk egy irányított gráfot. A pontok a rácspontok, és két pont között menjen mindkét irányba él, ha van köztük rácsl. Legyenek a piros pontok az A halmaz, a négyzet szélső pontjai a B halmaz. Vegyük fel az s, t pontokat, s -ből menjen az A halmaz pontjába él és t -be a B halmaz pontjaiból. Ekkor pontosan akkor van minden piros ponthoz megfelelő út, ha van m darab $s - t$ pontdiszjunkt irányított út. Ezt úgy tudjuk megvizsgálni, ha készítsünk egy folyamat a gráfhoz, a pontdiszjunkt utakat úgy tudjuk a folyamatban biztosítani, hogy minden s, t pont kapacitása legyen 1. Ekkor, ha van m méretű folyamat, pontosan akkor van pontdiszjunkt út a piros pontokból a szélre.
86. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges két pont között létezik két pontdiszjunkt út, amely ekvivalens azzal, hogy létezik egy, a két ponton átmenő kör. Válasszuk ki az egyik pontot, és egy élet, ami illeszkedik a másik pontra. Ezeken a feltevés szerint megy át kör, így a két ponton is megy át kör.
87. Két halmaz, vagyis $2r$ db pont elvételével a gráf izolált pontokra esik szét. $2r$ db pontdiszjunkt út viszont létezik tetszőlegesen kiválasztott két pont között. Ugyanis
 -ha a két pont egy halmazban volt, akkor a többi halmaz-beli pontokon keresztül vezet a két pont között $2r$ db kettő hosszú pontdiszjunkt út.
 -ha a két pont különböző komponensben volt, például $a \in A$ és $b \in B$, akkor C -n keresztül ismét vezet r db két hosszú pontdiszjunkt út. Az A és B halmaz között futó éleken keresztül pedig létezik újabb r db pontdiszjunkt út. Ezeket megkaphatjuk úgy, hogy keresünk egy teljes párosítást. A párosításban szereplő éleken át, három hosszú alternáló utakon így ismét létezni fog r db pontdiszjunkt út a és b között.



88. Ekkor skatulya-elv miatt bármely két szomszédos pontnak van legalább $k - 1$ közös szomszédja, illetve bármely két nem szomszédos pontnak van legalább k közös szomszédja. Tehát bármely két pont között van k pontdiszjunkt út.
89. Indirekten tegyük fel, hogy van olyan pont, amit elhagyva a gráf két részre esik. Tegyük fel, hogy a pont az A pontosztályból való. A két darab maradék továbbra is páros gráf. Az egyikben az A -hoz tartozó pontosztály (A') mérete legalább akorra mint ugyanabban a maradékban a másik pontosztály (B') mérete. Ekkor vizsgáljuk meg, hány él megy A' és B' között. Minden A' -beli pont foka r , és továbbá minden B' -beli fokalegfeljebb r , azonban legalább egyik pont foka kisebb, mint r , hiszen a kitörölt pontnak

kellett, hogy legyen szomszédja B' -ben. Ezért nem mehet annyi él B' -be, mint amennyi A' -ből kiindul. Itt az ellentmondás, tehát legalább 2-szeresen pontösszefüggő.

90. Ha G hatszorosan élösszefüggő, akkor minden pontjának foka legalább 6. Ekkor viszont egy, az élek számára vonatkozó tanult összefüggés miatt ellentmondásra jutunk: $3n \leq |E(G)| \leq 3n - 6$.

Bevezetés a számításelméletbe II.

2007. MÁRCIUS 28.

7. gyakorlat: Turán tételek, Számelmélet I.

91. Legyen G a 3 osztályú, 12 pontú Turán-gráf. Állapítsuk meg $\tau(G)$ értékét!
92. Egy 30 fős társaságban bármely 4 ember között van kettő, akik kezet fogtak egymással. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a társaság tagjai között legalább 135 kézfogás történt!
93. Egy 49 csúcsú gráfnak 1030 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a kromatikus száma legalább 8, és hogy pontosan 8 is lehet.
94. Minimálisan hány éle kell legyen egy 2000 csúcsú G gráfnak, ha $\alpha(G) = 5$ teljesül?
95. Legyen adott a térben 100 tetszőleges pont. Bizonyítsd be, hogy ezek közül kiválasztható, éppen egységnyi távolságra lévő pontpárok száma legfeljebb 3750!
96. Legyen $a = 50700$ és $b = 111384$. Végezzük el a két szám prímtényezősz felbontását, majd ezen kanonikus alakok segítségével számítsuk ki a legnagyobb közös osztót, a legkisebb közös többszöröst, és mondjuk meg azt is, hogy hány olyan szám van, amely osztója a és b közül legalább az egyiknek!
97. Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai "kétállásúak": ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárral játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k -adik feleség minden k -adik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?
98. A sah következő születésnapján a feleségek megint rosszkalkodnak. Most az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján kettőt fordít, stb., a k -adik feleség minden k -adik ajtó zárján k -t fordít, egészen a 100. feleségig. Most milyen sorszámú cellák lakói szabadulnak?
99. Legyen a és b két páratlan szám. Mennyi $(a^2 + b^2, 4)$?
100. Bizonyítsuk be, hogy a páratlan négyzetszámok nem csak néggyel, de nyolccal osztva is 1 maradékot adnak!
101. Melyek azok a p prímszámok, melyre
 - (a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím,
 - (b) $p^2 + 2$ is prím,
 - (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?
102. Bizonyítsd be, hogy a szomszédos *Fibonacci-számok* relatív prímek! De vajon mennyi a másodsomszédos Fibonacci-számok legnagyobb közös osztója?
103. Péter a XX. század második felében született, éppén nagyapja 53. születésnapján. Kettejük születési évszámai nem relatív prímek. Hány éves Péter?
104. Lássuk be, hogy öt egymás után következő természetes szám szorzata mindig osztható 120-szal!
105. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes szám egyértelműen felírható $n = k^2q$ alakban, ahol k természetes, q pedig négyzetmentes szám.
106. Bizonyítsd be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím!
107. Melyik az a legkisebb 3-mal nem osztható szám, melynek 15 osztója van?
108. Hány olyan háromjegyű szám van, melynek osztóinak száma osztható 11-gyel?
109. Melyek az $n^4 + 4$ alakú prímszámok?
110. Relatív prím-e a következő két szám: $2^{100} - 1$ és $3^{100} - 1$?

Bevezetés a számításelméletbe II.

2007. MÁRCIUS 28.

7. gyakorlat: Turán tételek, Számelmélet I.

91. Legyen G a 3 osztályú, 12 pontú Turán-gráf. Állapítsuk meg $\tau(G)$ értékét!
92. Egy 30 fős társaságban bármely 4 ember között van kettő, akik kezet fogtak egymással. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a társaság tagjai között legalább 135 kézfogás történt!
93. Egy 49 csúcsú gráfnak 1030 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a kromatikus száma legalább 8, és hogy pontosan 8 is lehet.
94. Minimálisan hány éle kell legyen egy 2000 csúcsú G gráfnak, ha $\alpha(G) = 5$ teljesül?
95. Legyen adott a térben 100 tetszőleges pont. Bizonyítsd be, hogy ezek közül kiválasztható, éppen egységnyi távolságra lévő pontpárok száma legfeljebb 3750!
96. Legyen $a = 50700$ és $b = 111384$. Végezzük el a két szám prímtényezősz felbontását, majd ezen kanonikus alakok segítségével számítsuk ki a legnagyobb közös osztót, a legkisebb közös többszöröst, és mondjuk meg azt is, hogy hány olyan szám van, amely osztója a és b közül legalább az egyiknek!
97. Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai "kétállásúak": ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárral játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k -adik feleség minden k -adik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?
98. A sah következő születésnapján a feleségek megint rosszkalkodnak. Most az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján kettőt fordít, stb., a k -adik feleség minden k -adik ajtó zárján k -t fordít, egészen a 100. feleségig. Most milyen sorszámú cellák lakói szabadulnak?
99. Legyen a és b két páratlan szám. Mennyi $(a^2 + b^2, 4)$?
100. Bizonyítsuk be, hogy a páratlan négyzetszámok nem csak néggyel, de nyolccal osztva is 1 maradékot adnak!
101. Melyek azok a p prímszámok, melyre
 - (a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím,
 - (b) $p^2 + 2$ is prím,
 - (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?
102. Bizonyítsd be, hogy a szomszédos *Fibonacci-számok* relatív prímek! De vajon mennyi a másodsomszédos Fibonacci-számok legnagyobb közös osztója?
103. Péter a XX. század második felében született, éppén nagyapja 53. születésnapján. Kettejük születési évszámai nem relatív prímek. Hány éves Péter?
104. Lássuk be, hogy öt egymás után következő természetes szám szorzata mindig osztható 120-szal!
105. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes szám egyértelműen felírható $n = k^2q$ alakban, ahol k természetes, q pedig négyzetmentes szám.
106. Bizonyítsd be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím!
107. Melyik az a legkisebb 3-mal nem osztható szám, melynek 15 osztója van?
108. Hány olyan háromjegyű szám van, melynek osztóinak száma osztható 11-gyel?
109. Melyek az $n^4 + 4$ alakú prímszámok?
110. Relatív prím-e a következő két szám: $2^{100} - 1$ és $3^{100} - 1$?

Bevezetés a számításelméletbe II.

2007. ÁPRILIS 4.

8. gyakorlat: Számelmélet I., Kongruencia

97. Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai "kétállásúak": ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárral játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k -adik feleség minden k -adik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?
98. A sah következő születésnapján a feleségek megint rosszalkodnak. Most az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján kettőt fordít, stb., a k -adik feleség minden k -adik ajtó zárján k -t fordít, egészen a 100. feleségig. Most milyen sorszámú cellák lakói szabadulnak?
99. Legyen a és b két páratlan szám. Mennyi $(a^2 + b^2, 4)$?
100. Bizonyítsuk be, hogy a páratlan négyzetszámok nem csak néggyel, de nyolccal osztva is 1 maradékot adnak!
101. Melyek azok a p prímszámok, melyre
- (a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím,
 - (b) $p^2 + 2$ is prím,
 - (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?
102. Bizonyítsd be, hogy a szomszédos *Fibonacci-számok* relatív prímek! De vajon mennyi a másodsomszédos Fibonacci-számok legnagyobb közös osztója?
103. Péter a XX. század második felében született, éppen nagyapja 53. születésnapján. Kettejük születési évszámai nem relatív prímek. Hány éves Péter?
104. Lássuk be, hogy öt egymás után következő természetes szám szorzata mindig osztható 120-szal!
105. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes szám egyértelműen felírható $n = k^2q$ alakban, ahol k természetes, q pedig négyzetmentes szám.
106. Bizonyítsd be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím!
107. Melyik az a legkisebb 3-mal nem osztható szám, melynek 15 osztója van?
108. Hány olyan háromjegyű szám van, melynek osztóinak száma osztható 11-gyel?
109. Melyek az $n^4 + 4$ alakú prímszámok?
110. Relatív prím-e a következő két szám: $2^{100} - 1$ és $3^{100} - 1$?
111. Bizonyítsuk be, hogy a páratlan négyzetszámok nem csak néggyel, de nyolccal osztva is 1 maradékot adnak!
112. Melyek azok a p prímszámok, melyre
- (a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím,
 - (b) $p^2 + 2$ is prím,
 - (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?
113. Bizonyítsd be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím!
114. Határozzuk meg a $3, 8, 17, -17, 120, 54, -40, 236, 227$ számok
- (a) legkisebb nem negatív maradékait,
 - (b) abszolútértékben legkisebb maradékait,
 - (c) közül melyek kongruensek egymással modulo 11!
115. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:
- (a) $11x \equiv 12 \pmod{18}$,
 - (b) $5x \equiv 5 \pmod{35}$,
 - (c) $6x \equiv 5 \pmod{35}$,
 - (d) $7x \equiv 5 \pmod{35}$,
 - (e) $6x + 1 \equiv 10 \pmod{15}$,
 - (f) $14x - 4 \equiv 80 \pmod{21}$.
116. Oldjuk meg minél egyszerűbben az alábbi kongruenciákat:
- (a) $202x \equiv 157 \pmod{203}$,
 - (b) $309x \equiv 451 \pmod{617}$,
 - (c) $5x \equiv 561 \pmod{1968}$,
 - (d) $105x \equiv 761 \pmod{809}$,
117. Milyen maradékot adhat egy egész szám 92-vel osztva, ha az 54-szerese 24 maradékot ad 92-vel osztva?
118. Egy x egész szám ugyanannyi maradékot ad 98-cal osztva, mint $68 - 23x$. Mi lehet ez a maradék?
119. Melyek megoldhatóak az alábbi szimultán kongruenciák közül? Oldjuk is meg őket!
- (a) $x \equiv 3 \pmod{5}$ (c) $3x \equiv 2 \pmod{4}$
 $x \equiv 4 \pmod{7}$ $2x \equiv 3 \pmod{5}$
 - (b) $x \equiv 3 \pmod{6}$ (d) $5x \equiv 3 \pmod{7}$
 $x \equiv 6 \pmod{8}$ $4x \equiv 5 \pmod{10}$

Bevezetés a számításelméletbe II.

2007. ÁPRILIS 11.

9. gyakorlat: Számelmélet, folytatás

97. Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai "kétállásúak": ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárral játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k -adik feleség minden k -adik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?
98. A sah következő születésnapján a feleségek megint rosszkodnak. Most az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján kettőt fordít, stb., a k -adik feleség minden k -adik ajtó zárján k -t fordít, egészen a 100. feleségig. Most milyen sorszámú cellák lakói szabadulnak?
101. Melyek azok a p prímszámok, melyre
- (a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím,
 - (b) $p^2 + 2$ is prím,
 - (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?
102. Bizonyítsd be, hogy a szomszédos *Fibonacci-számok* relatív prímek! De vajon mennyi a másodsomszédos Fibonacci-számok legnagyobb közös osztója?
106. Bizonyítsd be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n is prím!
107. Melyik az a legkisebb 3-mal nem osztható szám, melynek 15 osztója van?
108. Hány olyan háromjegyű szám van, melynek osztóinak száma osztható 11-gyel?
116. Oldjuk meg minél egyszerűbben az alábbi kongruenciákat:
- (a) $202x \equiv 157 \pmod{203}$,
 - (b) $309x \equiv 451 \pmod{617}$,
 - (c) $5x \equiv 561 \pmod{1968}$,
 - (d) $105x \equiv 761 \pmod{809}$,
119. Melyek megoldhatóak az alábbi szimultán kongruenciák közül? Oldjuk is meg őket!
- (a) $x \equiv 3 \pmod{5}$ (c) $3x \equiv 2 \pmod{4}$
 $x \equiv 4 \pmod{7}$ $2x \equiv 3 \pmod{5}$
 - (b) $x \equiv 3 \pmod{6}$ (d) $5x \equiv 3 \pmod{7}$
 $x \equiv 6 \pmod{8}$ $4x \equiv 5 \pmod{10}$
120. (a) Egy százlábú meg akarja számolni a lábait. Azt tudja biológiából, hogy minden százlábúnak legföljebb 344 lába van. Ha 13-asával számolja a lábait, akkor 3 marad ki, ha 17-esével számolja, akkor viszont 10 marad ki. Hánylábú a százlábú?
- (b) Egy másik százlábú is megirigylé ezt a módszert. Neki 16-osával számolva 5 marad ki, 20-asával számolva pedig 15 marad ki. Bizonyítsd be, hogy elszámolta magát!
- (c) A százlábúak királyához is eljut a módszer. Neki 6-osával számolva 5 marad ki, 7-esével számolva 6, 8-asával számolva pedig 7. Neki hány lába van?
121. Egy háromjegyű számról tudjuk, hogy 23-mal osztva 4 maradékot ad, továbbá hogy a szám 16-szorosának utolsó két számjegye 28. Mi ez a szám?
122. Oldjuk meg a megoldhatóakat az alábbi lineáris diofantikus egyenletek közül!
- (a) $15x + 13y = 19$ (c) $12x + 30y = 26$
 - (b) $17x + 11y = 22$ (d) $18x + 28y = 10$
123. (a) Milyen számok állíthatók elő $20x + 51y$ alakban, ahol x és y egész számok?
- (b) Milyen számok állíthatók elő $170x + 51y$ alakban, ahol x és y egész számok?
- (c) Milyen számok állíthatók elő $21x + 33y + 77z$ alakban, ahol x , y és z egész számok?
124. Bizonyítsuk be, hogy $1 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 55 \cdot 73 \cdot \dots \cdot 271 + 1$ osztható 17-tel!
125. Pataki Ferenc fejszámológépművész egyszer a tévében a következő trükköt mutatta be: felkért a közönségből valakit, hogy gondoljon egy háromjegyű számra, szorozza meg 6561-gyel, majd az eredmény utolsó három jegyét közölje. Ebből ő pillanatok alatt kitalálta a gondolt számot. Hogyan csinálta? Utána tudnád-e csinálni, ha használhatsz számológépet, de csak nagyon rövid ideig?
126. Legyenek k és n olyan pozitív egészek, amelyekre $k < n$. Mi a legnagyobb közös osztója az $n! + k$ és az $(n + 1)! + k$ számoknak?

Bevezetés a számításelméletbe II.

2007. ÁPRILIS 18.

10. gyakorlat: Számelmélet, csoportelmélet

128. Számítsuk ki az alábbi értékeket:

- (a) $d(12)$, $\phi(12)$, $\sigma(12)$,
- (b) $d(2004)$, $\phi(2004)$, $\sigma(2004)$.

129. Mennyi $\phi(9)$, $\phi(133)$, $\phi(540)$, $\phi(7!)$?

130. Milyen n értékekre igaz, hogy $\phi(n)$ páratlan? (és milyen n -ekre lesz $d(n)$ páratlan?)

131. Az Euler-féle ϕ függvény tulajdonságait felhasználva,

- (a) bizonyítsuk be, hogy $11 \mid n^{11} + 10n$,
- (b) igazoljuk, hogy ha n nem osztható 17-tel, akkor $n^8 + 1$ vagy $n^8 - 1$ biztosan osztható 17-tel,
- (c) számítsuk ki 108^{182} ill. 5^{17} maradékát 19-cel osztva,
- (d) bizonyítsuk be, hogy $42 \mid n^7 - n$.

132. Bizonyítsuk be, hogy

- (a) $39^{14} - 1$ osztható 5-tel,
- (b) $333^{444} + 444^{333}$ osztható 7-tel,
- (c) $4^{90} + 1$ osztható 17-tel!

133. Kiszámítandó $((43)^{43})^{43}$ modulo 49.

134. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:

- (a) $49^{49} \equiv x \pmod{15}$,
- (b) $3^{80}x \equiv 23 \pmod{100}$.

135. Határozzuk meg az utolsó

- (a) három jegyét számjegyét 403^{402} -nek,
- (b) két számjegyét $29^{39^{49}}$ -nek,
- (c) számjegyét $7^{6^{5^{4^{3^2}}}}$ -nek!

136. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?

- (a) 2001^{2005}
- (b) $99^{77^{55}}$
- (c) $99! + 1$
- (d) 51^{151}
- (e) $17^{17^{17}} - 17^{17} + 17$

137. Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört semmilyen nemnegatív egész n -re sem egyszerűsíthető!

138. Legyen n páratlan egész szám, amely nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Bizonyítsuk be, hogy n pozitív osztóinak átlaga egész szám!

139. Legyen n pozitív egész szám, melynek ismerjük $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ prímtényezős felbontását. Mennyi a

$$\sum_{d_i \mid n} \frac{1}{d_i}$$

érték, vagyis hogyan számítható ki az n szám osztói reciprokának az összege?

140. Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazon definiált műveletek? Ha igen, akkor vizsgáljuk meg, hogy a csoport kommutatív-e?
- (a) {egész számok, összeadás},
 - (b) {páratlan számok, összeadás},
 - (c) {páros számok, összeadás},
 - (d) $\{2 \times 2\text{-es mátrixok, mátrixszorzás}\}$,
 - (e) $\{n\text{-edik komplex egységgyökök, szorzás}\}$,
 - (f) a síkvektorok halmaza; a síkvektorok összeadása.
 - (g) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok uniója.
 - (h) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok szimmetrikus differenciája. (Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája alatt definíció szerint az $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt értjük.)
141. Csoportot illetve félcsoportot alkot-e az alábbi H halmaz a $*$ művelettel?
- (a) H az egész számok halmaza és az $a, b \in H$ számokra $a * b = a + b + 1$, ahol a szokásos összeadás szerepel;
 - (b) Legyen m egy rögzített szám és $H = \{1, 2, \dots, m-1\}$. Továbbá $a * b = ab \pmod{m}$;
 - (c) H azon f függvények halmaza, melyek $f(x) = cx + d$ alakúak, ahol $c \neq 0$. A $*$ művelet pedig a függvények egymás után való alkalmazása (kompozíció, jelölése analízisben $f \circ g$);
 - (d) H a valós számok halmaza és $a * b = a + b + ab$;
 - (e) H a 2002 pozitív osztóinak halmaza és az $a, b \in H$ számokra $a * b = (a, b)$, azaz a és b legnagyobb közös osztója.
142. Bizonyítsd be $a^2 = 1 \quad \forall a \in G\text{-re} \implies G - \text{Abel-csoport!}$
143. A G véges Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. Bizonyítsd be, hogy eredményül G -nek olyan elemét kapjuk, amelynek az inverze önmaga!
144. Az n -ed rendű ciklikus csoport összes elemét négyzetre emeljük, majd az így kapott elemeket összeszorozzuk. Mivel egyenlő ez a szorzat?
145. Tekintsünk egy páratlan rendű Abel-csoportot (G) , ahol a művelet az összeadás. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{a \in G} a = 0$.
146. Legyen $n \geq 4$. Az n hosszú 0-1 sorozatok H_1 halmazán jelölje $\oplus$ a bitenkénti modulo 2 összeadást. Álljon H_2 azokból a sorozatokból, melyekben az egyesek száma kettővel osztható. H_3 pedig azokból, melyekben az egyesek száma osztható hárommal. Az előbb definiált művelettel csoportot alkot-e H_2 ? Csoport-e H_3 ?
147. Írjuk fel az alábbi csoportok Cayley-táblázatát! Melyek izomorfak egymással?
- (a) {mod 4 maradékosztályok, összeadás}
 - (b) {mod 8 redukált maradékosztályok, szorzás}
 - (c) A téglalap szimmetriacsoportja:
(szimmetriacsoport = a rajzot önmagába vivő egybevágósági transzformációk halmaza a kompozícióra, mint műveletre nézve!)
 - (d) A "füles négyzet" szimmetriacsoportja:

Bevezetés a számításelméletbe II.

2007. ÁPRILIS 25.

11. gyakorlat: Csoportelmélet

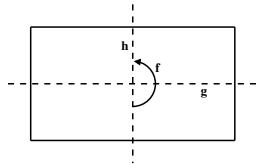
142. Bizonyítsd be $a^2 = 1 \quad \forall a \in G$ -re $\implies G$ Abel-csoport!
143. A G véges Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. Bizonyítsd be, hogy eredményül G -nek olyan elemét kapjuk, amelynek az inverze önmaga!
144. Az n -ed rendű ciklikus csoport összes elemét négyzetre emeljük, majd az így kapott elemeket összeszorozzuk. Mivel egyenlő ez a szorzat?
145. Tekintsünk egy páratlan rendű Abel-csoportot (G), ahol a művelet az összeadás. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{a \in G} a = 0$.
146. Legyen $n \geq 4$. Az n hosszú 0-1 sorozatok H_1 halmazán jelölje $\oplus$ a bitenkénti modulo 2 összeadást. Álljon H_2 azokból a sorozatokból, melyekben az egyesek száma kettővel osztható. H_3 pedig azokból, melyekben az egyesek száma osztható hárommal. Az előbb definiált művelettel csoportot alkot-e H_2 ? Csoport-e H_3 ?
147. Írjuk fel az alábbi csoportok Cayley-táblázatát! Melyek izomorfak egymással?

(a) $\{\text{mod } 4 \text{ maradékosztályok, összeadás}\}$

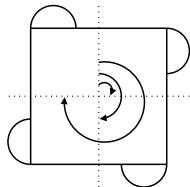
(b) $\{\text{mod } 8 \text{ redukált maradékosztályok, szorzás}\}$

(c) A téglalap szimmetriacsoportja:

(szimmetriacsoport = a rajzot önmagába vivő egybevágósági transzformációk halmaza a kompozícióra, mint műveletre nézve!)



(d) A "füles négyzet" szimmetriacsoportja:



148. Mi az egyes elemek rendje C_{12} -ben (a 12 rendű ciklikus csoportban)?
149. Legyen a G csoport elemeinek halmaza $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a művelet a mod 7 szorzás. Igazoljuk, hogy a G csoport ciklikus!
150. $|G| = 81$ és $\exists a \in G : a^{27} \neq 1 \implies$ a csoport kommutatív.
151. Jelölje a és b egy csoport két tetszőleges elemét. Bizonyítsuk be, hogy b rendje megegyezik $a^{-1}ba$ rendjével!
152. Mely csoportokra igaz, hogy $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$?
153. Bizonyítsuk be, hogy egy csoport nem állhat elő két valódi részcsoporthjának úniójaként.
154. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoportban minden egységelemtől különböző elem rendje ugyanaz, akkor ez a rend prímszám!
155. Bizonyítsuk be, hogy ha a G csoport rendje 55, akkor minden $a \in G$ elemére teljesül, hogy az a és az a^8 elemek rendje azonos.
156. Van-e olyan 20 rendű csoport, melyben van 5 rendű elem, de nincs 20 rendű elem?
És van-e olyan 20 rendű csoport, melyben van 20 rendű elem, de nincs 5 rendű elem?
157. A D_n diédercsoport elemei közül legyen t az egyik tükrözés és f az egyik forgatás. Igaz-e, hogy $t \cdot f = f^{-1} \cdot t$?

Bevezetés a számításelméletbe II.

Megoldások: 7-10. gyakorlat: Számelmélet, csoportelmélet

96. $a = 50700 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$ és $b = 111384 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$,
ebből $(a, b) = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$ és $[a, b] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$.
Ahhoz, hogy megkapjuk azt, hogy hány olyan szám van, ami a -t vagy b -t osztja a és b osztóinak összegéből le kell vonnunk a közös osztók számát. Szerencsére tudjuk, hogy a közös osztók egyben osztói (a, b) -nek is.
Így az eredmény:
 $(2+1)(1+1)(2+1)(1+1) + (3+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1) - (2+1)(1+1)(1+1) = 120$.
99. Egy páratlan szám négyzete $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, vagyis $4l+1$ alakú. Két ilyen összege tehát $4k+2$ alakú lesz, vagyis páros, de nem osztható 4-el.
100. Egy páratlan szám négyzete: $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k)(2k+2) + 1$ alakú, 8 pedig mindig osztja két egymást követő páros szám szorzatát (mert az egyik biztosan osztható 4-el is).
101. A maradékosztályokat sorra véve adódik, hogy mindegyik esetben csak egy megoldás van:
- (a) $p = 3$ jó megoldás, de $p = 3k+1$ illetve $p = 3k+2$ esetekben vagy $p+10$ vagy $p+14$ osztható lesz 3-mal, vagyis nem lehet prím.
 - (b) $p = 3$ itt is jó, de a többi esetben 3 osztja $p^2 + 2$ -t.
 - (c) Itt az 5 maradékosztályait kell vizsgálni. $p = 5$ jó megoldás, de a többi esetben vagy $p^2 + 4$ vagy $p^2 + 6$ biztosan 5-el osztható lesz.
102. A Fibonacci-számok a következők: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$. Tehát az n -edik Fibonacci számot az előtte lévő kettő összegeként kapjuk: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
Ha két szomszédos Fibonacci-szám nem volna relatív prím, ez azt jelentené, hogy létezik olyan $c \neq$ egész, hogy $c|a_n$ és $c|a_{n-1}$. De ekkor $c|a_{n-2}$ is igaz volna (hiszen két számnak egy közös osztója osztja a két szám különbségét is). Ez pedig azt jelentené, hogy visszamenőleg c osztaná az összes Fibonacci-számot, még az 1-et is.
Másodszomszédos Fibonacci-számokra a helyzet hasonló. Ha $c|a_n$ és $c|a_{n-2}$, akkor $c|a_{n-1}$ is igaz. Ezután viszont az előzőekből következik, hogy c minden Fibonacci-számot oszt.
103. Ha a Péter születési évszáma b pedig a nagyapjáé, akkor tudjuk, hogy $a - b = 53$ és $1 \neq (a, b)$. Ha viszont létezik egy $1 < c|(a, b)$, akkor $c|(a - b) = 53$ is igaz, amiből $c = 53$ adódik. Mivel $53|a$ és $53|b$, és $1950 < a < 2000$, ezért $a = 37 \cdot 53 = 1961$ lesz Péter születési évszáma.
104. Öt egymást követő szám közül mindig lesz egy 5-el osztható, legalább egy 3-al osztható, legalább egy $4k$ és egy másik $4k+2$ alakú. E miatt a számok szorzata is osztható lesz $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ -al.
105. Egy szám akkor és csakis akkor négyzetszám, ha a prímtényezős felbontásában minden kitevő páros. Egy tetszőleges n egész szám $n = k^2 q$ alakra való felbontása ebből adódik: ha ebben p_i prím kitevője, $\alpha_i = 2k_i + 1$ alakú volt, akkor k -ban p_i kitevője k_i legyen q -ban pedig 1. Ha $\alpha_i = 2k_i$ alakú, akkor k -ban p_i kitevője ismét k_i és q prímtényezős felbontásában ne szerepeljen a p_i prím.
107. Ha n -nek 15 osztója van, vagyis $d(n) = 15$, akkor az osztók számára vonatkozó tételből következően vagy $(\alpha_1 + 1) = 15$ vagy $(\alpha_1 + 1) = 5$ és $(\alpha_2 + 1) = 3$ adódik a prímtényezős felbontásában szereplő két kitevőre. Ezek közül a legkisebb felbontás amiben 3 nem szerepelhet: $2^4 \cdot 5^2$.
108. Az előző feladathoz hasonlóan itt is $d(n)$ képletéből adódik, hogy kell legyen n felbontásában egy α_i kitevő, melyre $11|(\alpha_i + 1)$. A legkisebb ilyen szám 2^{10} lenne, ami viszont már nagyobb 1000-nél, tehát megfelelő 3-jegyű számot nem találhatunk.
115. A lineáris kongruenciák megoldásai:
- (a) $(11, 18) = 1, \exists$ 1db mo.
 $11x \equiv 12 \pmod{18} / \cdot 5$
 $55x \equiv 60 \pmod{18}$
 $x \equiv 6 \pmod{18}$

- (b) $(5, 35) = 5 \mid 5, \exists 5\text{db mo.}$
 $5x \equiv 5 \pmod{35} / : 5$
 $x \equiv 1 \pmod{7}, \text{ ebből}$
 $x \equiv 1, 8, 15, 22, 29 \pmod{35}$
- (c) $(6, 35) = 1, \exists 1\text{db mo.}$
 $6x \equiv 5 \pmod{35} / \cdot 6$
 $36x \equiv 30 \pmod{35}$
 $x \equiv 30 \pmod{35}$
- (d) $(7, 35) = 7 \nmid 5, \nexists \text{ mo.}$
- (e) $6x + 1 \equiv 10 \pmod{15} / - 1$
 $6x \equiv 9 \pmod{15}$
 $(6, 15) = 3 \mid 9, \exists 3\text{db mo.}$
 $6x \equiv 9 \pmod{15} / : 3$
 $2x \equiv 3 \pmod{5} / \cdot 3$
 $6x \equiv 9 \pmod{5}$
 $x \equiv 4 \pmod{5}, \text{ ebből}$
 $x \equiv 4, 9, 14 \pmod{15}$
- (f) $14x - 4 \equiv 80 \pmod{21}$
 $14x \equiv 84 \pmod{21} / + 4$
 $(14, 21) = 7 \mid 84, \exists 7\text{db mo.}$
 $14x \equiv 84 \pmod{21} / : 7$
 $2x \equiv 12 \pmod{3}$
 $2x \equiv 0 \pmod{3}$
 $x \equiv 0 \pmod{3}, \text{ ebből}$
 $x \equiv 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18 \pmod{21}$

116. A lineáris kongruenciák megoldása:

- (a) $202x \equiv 157 \pmod{203} / - 203x$
 $-x \equiv 157 \pmod{203} / \cdot (-1)$
 $x \equiv -157 \pmod{203} / + 203$
 $x \equiv 46 \pmod{203}$
- (b) $309x \equiv 451 \pmod{617} / \cdot 2$
 $618x \equiv 902 \pmod{617}$
 $x \equiv 285 \pmod{617}$
- (c) $5x \equiv 561 \pmod{1968} / + (3 \cdot 1968)$
 $5x \equiv 6465 \pmod{1968} / : 5$
 $x \equiv 1293 \pmod{1968}$
- (d) $105x \equiv 761 \pmod{809} / + 809$
 $105x \equiv 1570 \pmod{809} / : 5$
 $21x \equiv 314 \pmod{809} / + (2 \cdot 809)$
 $21x \equiv 1932 \pmod{809} / : 21$
 $x \equiv 92 \pmod{809}$

119. A szimultán kongruenciák megoldásai:

- (a) $x \equiv 3 \pmod{5}$ -ből $x = 5k + 3$
 így: $5k + 3 \equiv 4 \pmod{7}$
 $5k \equiv 1 \pmod{7} / \cdot 3$
 $15k \equiv 3 \pmod{7} / \cdot 3$
 $k \equiv 3 \pmod{7}$ -ből $k = 7l + 3$
 így $x = 5(7l + 3) + 3 = 35l + 18$
 vagyis $x \equiv 18 \pmod{35}$
- (b) nem oldható meg.

- (c) $3x \equiv 2 \pmod{4} / \cdot 3$
 $x \equiv 2 \pmod{4}$ ből $x = 4k + 2$
 $2x \equiv 3 \pmod{5} / \cdot 3$
 $x \equiv 4 \pmod{5}$
 így: $4k + 2 \equiv 4 \pmod{5} / -2$
 $4k \equiv 2 \pmod{5} / -5k$
 $-k \equiv 2 \pmod{5} / \cdot (-1)$
 $k \equiv 3 \pmod{5}$ -ből $k = 5l + 3$
 így $x = 4(5l + 3) + 2 = 20l + 14$
 vagyis $x \equiv 14 \pmod{20}$
- (d) nem oldható meg.

122. Oldjuk meg a megoldhatóakat az alábbi lineáris diofantikus egyenletek közül!

- (a) $15x + 13y = 19$ -el ekvivalens:
 $15x \equiv 19 \pmod{13}$
 $2x \equiv 6 \pmod{13} / :2$
 $x \equiv 3 \pmod{13}$,
 vagyis $x = 13t + 3$,
 ebből $t = 0$ -ra $y_0 = -2$
 így $y = -2 - 15t$
- (b) $17x + 11y = 22$ -el ekvivalens:
 $17x \equiv 22 \pmod{11}$
 $x \equiv 0 \pmod{11}$,
 vagyis $x = 11t$,
 ebből $t = 0$ -ra $y_0 = 2$
 így $y = 2 - 17t$
- (c) $12x + 30y = 26 / :2$
 $3(2x + 5y) \neq 13$, nincs megoldás.
- (d) $18x + 28y = 10 / :2$
 $9x + 14y = 5$ -el ekvivalens:
 $9x \equiv 5 \pmod{14} / \cdot 3$
 $27x \equiv 15 \pmod{14}$
 $-x \equiv 1 \pmod{14} / \cdot (-1)$
 $x \equiv -1 \pmod{14}$,
 vagyis $x = 14t - 1$,
 ebből $t = 0$ -ra $y_0 = 1$
 így $y = 1 - 9t$

128. A prímtényezős felbontásokból behelyettesítve a képletekbe:

- (a) $12 = 2^2 \cdot 3$ -ból:
 $d(12) = (2 + 1)(1 + 1) = 6$,
 $\phi(12) = (2^2 - 2)(3 - 1) = 4$,
 $\sigma(12) = (1 + 2 + 2^2)(1 + 3) = 28$
- (b) $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$ -ből:
 $d(2004) = (2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$,
 $\phi(2004) = (2^2 - 2)(3 - 1)(167 - 1) = 664$,
 $\sigma(2004) = (1 + 2 + 2^2)(1 + 3)(1 + 167) = 4704$

129. $9 = 3^2$, $133 = 7 \cdot 19$, $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, $7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
 $\phi(9) = 3^2 - 3 = 6$,
 $\phi(133) = \phi(7)\phi(19) = 6 \cdot 18 = 108$,
 $\phi(540) = (2^2 - 2)(3^3 - 3^2)(5 - 1) = 144$,
 $\phi(7!) = (2^4 - 2^3)(3^2 - 3)(5 - 1) = 192$.

130. $\phi(n)$ páratlan, akkor és csak akkor, ha minden $(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1})$ tényező páratlan. Ez csak $p_i = 2$ első hatványára lehet páratlan. Tehát csak $n = 2$ lehet megoldás.

$d(n)$ páratlan, akkor és csak akkor, ha minden $(\alpha_i + 1)$ tényező páratlan, vagyis α_i páros. Ez azt jelenti, hogy n négyzetszám.

131. Az Euler-Fermat tételt használva,

- (a) $n^{11} + 10n = n^{10}n + 10n \equiv n + 10n = 11n \equiv 0 \pmod{11}$,
- (b) $n^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ -ből következik, hogy $17 \mid n^{16} - 1 = (n^8 + 1)(n^8 - 1)$. Mivel 17 prím, ezért vagy $p \mid (n^8 + 1)$ vagy $p \mid (n^8 - 1)$.
- (c) $108^{182} = (5 \cdot 19 + 13)^{182} \equiv 13^{182} = 13^{18 \cdot 10 + 2} = (13^{18})^{10} \cdot 13^2 \equiv 13^2 = 169 \equiv 17 \pmod{19}$
 $5^{17} = 5^{18} \cdot 5^{-1} \equiv 5^{-1} \equiv 4 \pmod{19}$
- (d) $42 \mid n^7 - n$ -hez belátjuk, hogy $2 \mid n^7 - n$, $3 \mid n^7 - n$ és $7 \mid n^7 - n$. Az első kettő egyszerű oszthatósági feltételek következménye, az utolsó pedig a kis-Fermat tétel.

132. Az Euler-Fermat tételt használva...

- (a) $39^{14} = (7 \cdot 5 + 4)^{14} \equiv 4^{14} = 4^{3 \cdot 4 + 2} \equiv 4^2 = 16 \equiv 1 \pmod{5}$
- (b) $333^{444} + 444^{333} = (7 \cdot 47 + 4)^{444} + (7 \cdot 63 + 3)^{333} \equiv 4^{444} + 3^{333} = 4^{6 \cdot 74} + 3^{330 + 3} \equiv 1 + 3^3 = 28 \equiv 0 \pmod{7}$
- (c) $4^{90} = 4^{2 \cdot 45} = 16^{45} = (17 - 1)^{45} \equiv (-1)^{45} = -1 \pmod{17}$

133. $\phi(49) = 7^2 - 7 = 42$.

Így az Euler-Fermat tétel miatt:

$$(((43)^{43})^{43})^{43} = (((43)^{42+1})^{43})^{43} \equiv (((43)^1)^{43})^{43} = ((43)^{43})^{43} \equiv \dots \equiv 43 \pmod{49}.$$

134. Felhasználva, hogy $\phi(15) = \phi(3)\phi(5) = 2 \cdot 4 = 8$ és $\phi(100) = (2^2 - 2)(5^2 - 5) = 40$:

- (a) $49^{49} = (45 + 4)^{49} \equiv 4^{49} = 4^{6 \cdot 8 + 1} \equiv 4 \pmod{15}$,
- (b) $3^{80} = (3^{40})^2 \equiv 1 \pmod{100}$ miatt
 $x \equiv 23 \pmod{100}$

135. Felhasználva, hogy

$$\phi(1000) = (2^3 - 2^2)(5^3 - 5^2) = 400,$$

$$\phi(100) = (2^2 - 2)(5^2 - 5) = 40 \text{ és}$$

$$\phi(10) = (2 - 1)(5 - 1) = 4:$$

- (a) $403^{402} = 403^{400+2} \equiv 403^2 \equiv 409 \pmod{1000}$
- (b) $29^{39^{49}} = 29^{40-1^{49}} \equiv 29^{-1^{49}} = 29^{-1} \equiv 69 \pmod{100}$
- (c) $7^{6^{54^{3^2}}} = 7^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$.

142. A csoport kommutatív, mert $\underline{ab} = ab(ab)^2 = ab(ba)(ba) = (a(bb)a)ba = aaba = \underline{ba}$.

144. Mivel a ciklikus csoport kommutatív, ezért $1^2 a^2 a^4 \dots a^{2(n-1)} = a^{n(n-1)} = (a^n)^{n-1} = 1^{n-1} = 1$.

145. Az additív csoport nulleleme (egységeleme) a 0. A többi elemnek egyértelműen létezik inverze: $\forall a$ -ra $\exists a^{-1} : a + a^{-1} = 0$. Ha összeadjuk az összes elemet, és a kommutativitás miatt mindenkit az inverz párjával teszünk párba, akkor a párok összege 0, így az egész összeg is csak 0 lehet.

146. A H_2 csoport valóban részcsoporth, hiszen az összeadás műveletre nézve zárt, és így a csoporttulajdonságok is öröklődnek az alamhalmazból. A H_3 viszont nem zárt, mert például: $a = (0, 0, 1, 1, 1, 0)$, és $b = (0, 1, 1, 1, 0, 0)$ -ra, $a, b \in H_3$, de $a + b = (0, 1, 0, 0, 1, 0) \notin H_3$.

Megoldásvázlatok

91. $T_{12,3}$: $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ könnyen látszik, hogy $d=4$
ebből $n = d + T - b$ -ből adódik $T=8$

92. gráf: vücsök az emberek; él, ha ketet fogtak $\rightarrow G$
 G komplementerében nincs K_4
Turán-tétel: Ha egy n pontú G gráf nem tartalmaz K_{m+1} -et,
akkor $e(G) \leq e(T_{n,m})$.

így $e(\bar{G}) \leq e(T_{30,3}) = 10^3 \cdot 3 = 300$
 $\Rightarrow e(G) \geq \binom{30}{2} - 300 = 135$

93. • belátjuk, hogy $w(G) \geq 8$ (ez elég, hisz $\chi \geq w$)
ízh. $w(G) \leq 7$, akkor a Turán-t miatt:
 $e(G) \leq e(T_{49,7}) = 7^2 \cdot \binom{7}{2} = 1029$
ez ellentmond annak, hogy $e(G) = 1030$
tehát $\chi(G) \geq w(G) \geq 8$.

• $\chi(G) = 8$ lehet: a $T_{49,7}$ Turán gráfba az egyik osztályba
húzzunk még be egy élet, ene a gráfba $\chi(G) \leq 8$, hiszen
ha a 7 osztályt különböző színre színezzük, majd az új él
egyik végpontját átszínezzük a 8. színre, akkor jó színezést
kapunk

95. gráf: vücsök a pontok; él, ha egységnyi távolságra vannak
látható geometriai megfontolásból, hogy $w(G) \leq 4$
így a Turán-tétel miatt $e(G) \leq e(T_{100,4}) = 25^2 \cdot \binom{4}{2} = 3750$

94. a végeredmény:
 $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

97. egy cella ajtója akkor lesz nyitva, ha páratlan sokszor fordul
el a kulcs a zárban;

tehát a kérdés az, hogy mely számoknak van páratlan sok
osztója $\rightarrow$ válasz: a négyzetszámok: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$.
indoklás: állítsuk az osztókat párokba (a pár két tagjának
szorzata maga a szám), a négyzetszámoknál fordul csak
elő az a helyzet, hogy egy adott oszlopár mindkét tagja
ugyanaz

indoklás 2: $d(n) = (L_1 + 1)(L_2 + 1) \dots (L_k + 1)$, ha $n = p_1^{L_1} p_2^{L_2} \dots p_k^{L_k}$
oszló száma $\uparrow$ prímtényezőss felbontás

a szorzat pontosan akkor páratlan, ha $\forall i: L_i$ páros,

azaz $L_i = 2\beta_i$, így
 $n = p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \dots p_k^{2\beta_k} = (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k})^2$

tehát n négyzetszám

98. most az a kérdés, hogy mely számokra igaz, hogy
az oszlóinak összege páratlan
ez ekvivalens azval, hogy mely számoknak van páratlan sok
páratlan oszlója
a páratlan oszlók száma: $d(n) = (L_1 + 1)(L_2 + 1) \dots (L_k + 1)$, ahol
 $n = 2^{L_1} 3^{L_2} \dots p_k^{L_k}$

tehát az kell, hogy $\forall i: L_i$ páros
így n prímtényezőss felbontása: $n = 2^{L_1} 3^{L_2} \dots p_k^{L_k}$,
azaz n egy páratlan négyzetszám és egy 2-hatvány szorzata

100. 2f indoklaten, hogy n nem prím, azaz $n = a \cdot b$,
akkor $2^n - 1 = 2^{a \cdot b} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^a + 1)$
tehát $2^n - 1$ sem lehet prím.
(felhasználjuk: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$)

111. Esd 100.

112. Esd 101.

113. Esd 106.

114. A 3, 8, 17, -17, 120, 54, -40, 206, 227

$$a) \equiv \begin{matrix} 3 & 8 & 6 & 5 & 10 & 10 & 4 & 5 & 7 \\ & & & & & & & & \text{(mod 11)} \end{matrix}$$

$$b) \equiv \begin{matrix} 3 & -3 & 5 & -5 & -1 & -1 & 4 & 6 & -4 \\ & & & & & & & & \text{(mod 11)} \end{matrix}$$

$$c) \Rightarrow -17 \equiv 206 \text{ (11)} \text{ es}$$

$$120 \equiv 54 \text{ (11)}$$

$$117. 54x \equiv 24 \text{ (92)} \quad | :2 = (54, 92)$$

$$27x \equiv 12 \text{ (46)}$$

$$27^{-1} \text{ mod } 46: \quad \begin{matrix} 46 = 27 + 19 \\ 27 = 1 \cdot 19 + 8 \\ 19 = 2 \cdot 8 + 3 \\ 8 = 2 \cdot 3 + 2 \\ 3 = 1 \cdot 2 + 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \end{matrix}$$

$$27 \cdot 29 \equiv 12 \cdot 29 \text{ (46)}$$

$$x \equiv 12 \cdot 29 \equiv 20 \text{ (46)}$$

$$\Rightarrow x \equiv 20 \text{ (92)} \text{ vagy } x \equiv 20 + 46 = 72 \text{ (92)}$$

$$118. x \equiv 68 - 23x \text{ (98)} \rightarrow 24x \equiv 68 \text{ (98)}$$

$$12x \equiv 34 \text{ (49)} \quad | :(-4)$$

$$-48x \equiv 34 \cdot (-4) \text{ (49)}$$

$$x \equiv -106 \equiv 11 \text{ (49)}$$

$$\Rightarrow x \equiv 11 \text{ (98)} \text{ vagy}$$

$$x \equiv 60 \text{ (98)}$$

120.

$$a) x \leq 344, x \geq 0$$

$$x \equiv 3 \text{ (13)} \rightarrow x = 13k + 3$$

$$x \equiv 10 \text{ (17)} \quad \underline{\quad} \quad 13k + 3 \equiv 10 \text{ (17)}$$

$$13k \equiv 7 \text{ (17)} \quad | :4$$

$$52k \equiv 28 \text{ (17)}$$

$$k \equiv 11 \text{ (17)}$$

$$k \equiv 11 \text{ (17)} \rightarrow k = 17c + 11$$

$$\Rightarrow x = 13(17c + 11) + 3 = 221c + 146 \quad x \equiv 146 \text{ (221)}$$

$$\Rightarrow x = 146$$

$$b) \begin{matrix} x \equiv 5 \text{ (16)} & \rightarrow & x \equiv 1 \text{ (4)} \\ x \equiv 15 \text{ (20)} & \rightarrow & x \equiv 3 \text{ (4)} \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} \text{ a két egyenlet nem teljesülhet}$$

$$(16, 20) = 4$$

$$c) \begin{matrix} x \equiv 5 \text{ (6)} & x + 1 \equiv 0 \text{ (6)} \\ x \equiv 6 \text{ (7)} & x + 1 \equiv 0 \text{ (7)} \\ x \equiv 7 \text{ (8)} & x + 1 \equiv 0 \text{ (8)} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x + 1 \equiv 0 \text{ (6, 7, 8)} = 168$$

$$\Rightarrow x = 167 \text{ (168)}$$

$$121. x \equiv 4 \text{ (23)} \rightarrow x = 23k + 4$$

$$16x \equiv 28 \text{ (100)} \rightarrow 4x \equiv 7 \text{ (25)}$$

$$4x \equiv 7 + 25 = 32 \text{ (25)}$$

$$x \equiv 8 \text{ (25)}$$

$$23k + 4 \equiv 8 \text{ (25)}$$

$$-23k \equiv 4 \text{ (25)}$$

$$k \equiv -2 \equiv 23 \text{ (25)} \rightarrow k = 25c + 23$$

$$\rightarrow x = 23(25c + 23) + 4 = 575c + 503$$

$$\Rightarrow x = 503 \text{ (575)}$$

123.

a) $20x + 51y = z$ megoldható $\Leftrightarrow (20, 51) \mid z$

így z többszöröse egész szám lehet

b) $170x + 51y = z$ megoldható $\Leftrightarrow (170, 51) \mid z$

így z csak 17-tel osztható szám lehet

c) $21x + 33y + 77z = t$ megoldható $\forall t \in \mathbb{N}$, hisz

$z=0$ spec esetben t többszöröse $(21, 33) = 3$ -mal osztható szám lehet, azaz $21x + 33y = 3s$ megoldható

így pedig a " $3s + 77z = t$ "-t kell megoldanunk, de $1 = (3, 77)$, így ez $\forall t \in \mathbb{N}$ -re megoldható

124. Wilson-tétel: ha p prímszám, akkor $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

$$p = 17 \text{-re: } 16! \equiv -1 \pmod{17}$$

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ & \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \pmod{17} \\ & \equiv -1 \pmod{17} \end{aligned}$$

126.

a) $2001 \equiv 1 \pmod{1001}$ $\rightarrow 01$

b) $99^{99} \equiv (-1)^{99} \equiv -1 \pmod{1001}$ $\rightarrow 99$

c) $99! + 1 \equiv 0 + 1 = 1 \pmod{1001}$ $\rightarrow 01$

" $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \dots \rightarrow$ osztható 1001-zel

vagy a Wilson-tétel: ha $k \geq 6$, összevethet szám, akkor $(k-1)! \equiv 0 \pmod{k}$

126.

d) $51 \cdot 51 = 2601$
 $51 \cdot 51 \cdot 51 = \dots 51$

így $51^{\text{páros}} \equiv 01 \pmod{100}$
 $51^{\text{páratlan}} \equiv 51 \pmod{100}$

tehát az 51^{151} szám 51-re végződik

e) $17^x \equiv y \pmod{100}$ Euler-Fermat: $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$
 $(a, m) = 1$
 $\rightarrow 17^{40} \equiv 1 \pmod{100}$, mert $\varphi(100) = 40$
 $(= (2^2 \cdot 5)(5^2 - 5))$
 $E-F: 17^{10} \equiv 1 \pmod{40}$, mert $\varphi(40) = 16$
 $(= (2^3 \cdot 5)(5^2 - 1))$
 $17^{10} \cdot 17^1 \equiv y \pmod{40}$
 $\hookrightarrow 17^y \equiv 17^x \pmod{100}$
 $\Rightarrow 17^{17} - 17^{17} + 17 \equiv 17 \pmod{100} \rightarrow \dots 17$

137. ha $k \mid 21n + 4$, $k \mid 14n + 3$ (azaz a két k -vel egyenülthető)

akkor $k \mid (21n + 4) - (14n + 3) = 7n + 1$

$k \mid (14n + 3) - 2(7n + 1) = 1$

de $k \mid 1 \Rightarrow k = 1$ (vagy $k = -1$)

Magyarázatok 14.

108. $n = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3} \cdot \dots \cdot p_k^{d_k}$

n páratlan $\Rightarrow d_1 = 0$

n nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem $\Rightarrow d_i \leq 1, \forall i$

n pozitív osztóinak összege: $\prod_i (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{d_i}) = \prod_i (1 + p_i)$

számuk: $\prod_i (1 + d_i) = \prod_i (1 + 1)$

$\Rightarrow$ átlaguk: $\frac{\prod_i (1 + p_i)}{\prod_i (1 + 1)}$: egész
egész, mert p_i páratlan

* Látjuk n prímtényezői felbontásában csak páratlan prímek szerepelhetnek, azok is csak 1. hatványon

109. $\sum_{d_i | n} \frac{1}{d_i} = \frac{1}{n} \sum_{d_i | n} \frac{n}{d_i} = \frac{1}{n} \sum_{e_i | n} e_i = \frac{1}{p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \dots \cdot p_k^{d_k}} \prod_i (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{d_i})$

$\frac{1}{d_i} = \frac{\frac{n}{d_i}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{d_i}$

$\uparrow$ osztópálya $= e_i$