1. feladat (4+10=14 pont)
a) Ismertesse az algebra alaptételét!
b) Adja meg az $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$ egyenlet összes megoldását!

Mo. *a*) Minden komplex együtthatós polinom felírható elsőfokú polinomok szorzataként, vagy minden komplex polinomnak van gyöke. **(4p)**
b) $z_{1,2}^2 = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$ **(3p)** , tehát $z_1^2 = -3$, $z_2^2 = -1$, **(3p)** így az egyenlet gyökei $\pm\sqrt{3}i$, $\pm i$ **(4p)** .

---

2. feladat (6+10=16 pont)
a) Milyen kapcsolat van egy sorozat konvergenciája, korlátossága, illetve monotonitása között? (Mondjon ki két tanult tételt!)
b) Konvergens-e az $a_1 = 6$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$ sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

Mo. *a*) Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos **(2p)** . Ha egy sorozat monoton növő és felülről korlátos, akkor konvergens **(4p)** . (Ha egy sorozat monoton fogyó és alulról korlátos, akkor konvergens.)
b) $a_1 = 6 > \sqrt{22} = a_2$ **(1p)** , és ha $a_n > a_{n+1}$, akkor $3a_n + 4 > 3a_{n+1} + 4$, és $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} > \sqrt{3a_{n+1} + 4} = a_{n+2}$, így (a_n) monoton csökkenő **(3p)** , és $a_n \geq 0$ **(2p)** , tehát a sorozat korlátos. Az A határértékre teljesül, hogy $A = \sqrt{3A+4}$, vagyis $A = -1$ vagy $A = 4$ **(3p)** , de $a_n \geq 0$, így $A = 4$ **(1p)** .

---

3. feladat (8+8=16 pont)
a) Mondja ki és igazolja a szorzatfüggvény deriválási szabályát!
b) Számolja ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(3x)}{\operatorname{ch}(6x) - 1}$ határértéket!

Mo. *a*) **Tétel:** Ha f ás g az x_0 pontban deriválható függvények, akkor fg is deriválható x_0-ban, és $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. **(2p)**

Bizonyítás: Ha az f és g függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor folytonosak is itt **(1p)** , tehát

$$(fg)'(x_0) \overset{\textbf{(1p)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \overset{\textbf{(2p)}}{=}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} \overset{\textbf{(2p)}}{=}$$
$$= \lim_{h\to 0} f(x_0+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$
$$= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

b) $\frac{0}{0}$ típusú határérték **(1p)** , tehát

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(3x)}{\operatorname{ch}(6x)-1} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)+3x\cos(3x)}{6\operatorname{sh}(6x)} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6\cos(3x)-9x\sin(3x)}{36\operatorname{ch}(6x)} \overset{(\mathbf{1p})}{=} \frac{1}{6}$$

---

4. feladat (4+14=18 pont)
a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy az f függvény egy (a,b) intervallumon konvex! (Mondjon ki egy tanult tételt!)
b) Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = (3x+4)\ln(2x+1)$ függvény konvex, illetve konkáv! Hol van inflexiós pontja a függvénynek?

Mo. *a*) Ha f kétszer differenciálható, és $f''(x) \geq 0$ minden $x \in (a,b)$ esetén, akkor f konvex az (a,b) intervallumon **(4p)** . (Vagy: Ha f differenciálható (a,b)-n, és itt f' monoton nő, akkor f konvex az (a,b) intervallumon.)
b) $D_f = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ **(2p)**

$$f''(x) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \left(3\ln(2x+1) + \frac{2(3x+4)}{2x+1}\right)' \overset{(\mathbf{3p})}{=}$$
$$= \frac{6(2x+1)+6(2x+1)-4(3x+4)}{(2x+1)^2} = \frac{12x-4}{(3x+4)^2} = 0,$$

ha $x = \frac{1}{3}$ **(1p)** , vagyis f konkáv a $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ intervallumon **(2p)** , konvex a $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ intervallumon **(2p)** , az $x = \frac{1}{3}$ pontban pedig inflexiós pontja van **(1p)** .

---

5. feladat (4+9=13 pont)*
a) Ismertesse a helyettesítéses integrálás módszerét határozatlan integrálra!
b) Határozza meg $f(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{x+3}-1}$ primitív függvényét a $t = \sqrt{x+3}$ helyettesítéssel!

Mo. *a*) $\displaystyle\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$ **(4p)** (φ egy intervallumon deriválható és invertálható függvény.)
b) Ha $t = \sqrt{x+3}$, akkor $x = t^2 - 3 = \varphi(t)$, $\varphi'(t) = 2t$ **(2p)** , így

$$\int \frac{x-5}{\sqrt{x+3}-1}dx \overset{(\mathbf{1p})}{=} \int \frac{t^2-8}{t-1}\cdot 2tdt \overset{(\mathbf{1p})}{=} 2\int \frac{t^3-8t}{t-1}dt \overset{(\mathbf{2p})}{=}$$
$$= 2\int t^2+t-7-\frac{7}{t-1}dt \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{2t^3}{3}+t^2-14t-14\ln|t-1|+c \overset{(\mathbf{1p})}{=}$$
$$= \frac{2(\sqrt{x+3})^3}{3} + (x+3) - 14\sqrt{x+3} - 14\ln|\sqrt{x+3}-1| + c$$

---

6. feladat (4+9=13 pont)*
a) Ismertesse a Newton–Leibniz-formulát!
b) Számolja ki az alábbi integrált

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \frac{2\sin x - 3}{\cos^2 x} dx.$$

Mo. *a*) Ha $f \in R[a,b]$, és $\exists F$, melyre $F' = f$ az $[a,b]$ intervallumon, akkor $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ **(4p)**
b) $\displaystyle\int \frac{2\sin x - 3}{\cos^2 x} dx \overset{(\mathbf{3p})}{=} -2\int (\cos x)'(\cos x)^{-2} dx - 3\int \frac{1}{\cos^2 x} dx \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{2}{\cos x} - 3\operatorname{tg} x + c,$
vagyis

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \frac{2\sin x - 3}{\cos^2 x} dx \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{2}{\cos\pi/4} - 3\operatorname{tg}\pi/4 - \frac{2}{\cos(-\pi/3)} + 3\operatorname{tg}(-\pi/3) \overset{(\mathbf{1p})}{=} 2\sqrt{2} - 3 - 4 - 3\sqrt{3}.$$

---

7. feladat (10 pont)*
Konvergens-e az alábbi improprius integrál? Ha igen, adja meg az értékét!

$$\int_0^\infty (x-3)e^{-2x+5} dx$$

Mo. Parciális integrálással

$$\int (x-3)e^{-2x+5} dx = -\frac{(x-3)e^{-2x+5}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x+5} dx = -\frac{(2x-5)e^{-2x+5}}{4} + c \qquad (\mathbf{4p}),$$

$$\int_0^\infty (x-3)e^{-2x+5} dx = -\lim_{\omega\to\infty} \frac{(2\omega-5)e^{-2\omega+5}}{4} - \frac{5e^5}{4} = -\frac{5e^5}{4}, \qquad (\mathbf{4p}),$$

mert

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{(2\omega-5)e^{-2\omega+5}}{4} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{(2\omega-5)}{4e^{2\omega+5}} = 0, \qquad (\mathbf{2p})$$

IMSC feladat (14 IMSC pont)
Határozza meg a $g(x) = x^2$ parabola $(1,1)$ és $(2,4)$ közé eső ívének y-tengely körüli megforgatásával adódó forgáspalást felszínét!

Útmutatás: Először fogalmazza át a feladatot egy másik, f függvény x-tengely körüli forgatására! Ezután oldja meg a problémát a tanult képlettel!

Mo. A g függvény az első síknegyedben invertálható, itt inverze $f(x) = \sqrt{x}$. Az invertáláskor az x és y tengely szerepe felcserélődik, ezért az f függvény grafikonjának $x \in [1, 4]$ szakaszának x-tengely körüli megforgatásával kapott alakzat egybevágó a g függvény y-tengely körüli megforgatásával adódó alakzattal. **(4p)**

Így a keresett felszín:

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot f(x)\, \mathrm{d}x = \qquad \textbf{(3p)}$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \cdot \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \qquad \textbf{(3p)}$$

$$= \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1}\, \mathrm{d}x = \qquad \textbf{(1p)}$$

$$= \pi \left[\frac{2}{3 \cdot 4} (4x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \qquad \textbf{(2p)}$$

$$= \frac{\pi}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}} \right) \qquad \textbf{(1p)}$$