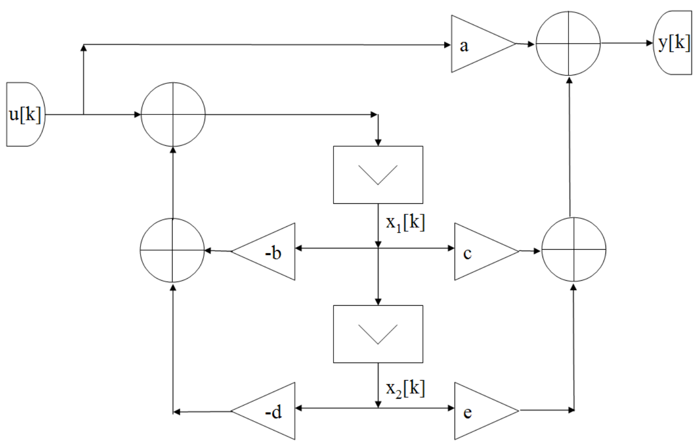
Jelek és rendszerek (VIHVA214)

2. zárthelyi **A** *csoport*
2011.12.07.

	Név (olvashatóan)	
	Aláírás	Neptun kód
	Pontszám	Javító
1. Nagypélda		
2. Nagypélda		
Kispélda		
Összesen		

<u>1. Nagypélda</u> (Megoldását külön lapra kérjük!)
A diszkrét idejű rendszer az alábbi jelfolyam-hálózattal adott.



(a) Adja meg a rendszer $H\left(e^{j\vartheta}\right)$ átviteli karakterisztikáját normálalakban $a=1$; $b=-0{,}25$; $c=-0{,}5$; $d=-0{,}125$; $e=0{,}25$ paraméter értékek mellett! Állapotegyenletek használata esetén az állapotváltozókat a késleltetők sorszámának megfelelően vegye fel! /3 pont/

Bizonyos paraméterértékek mellett a rendszer átviteli függvénye $H(z)=\dfrac{z^2-0{,}7z+0{,}12}{z^2-1{,}2z+0{,}35}$.

A további részfeladatok számításakor ezt az átviteli függvényt használja!

(b) Adja meg a rendszer pólusait és zérusait! Mit mondhatunk a rendszer stabilitásáról? /3 pont/

(c) Adja meg a rendszer $h[k]$ impulzusválaszát! /5 pont/

(d) Határozza meg a válasz időfüggvényét, ha a gerjesztés: $u[k]=2\cdot\varepsilon[k-1]$! /9 pont/

(a)
Az átviteli karakterisztika normálalakja (az ábráról leolvasható):

$$X_1 e^{j\vartheta}=-bX_1-dX_2+U \quad \rightarrow \quad X_2 e^{2j\vartheta}=-bX_2 e^{j\vartheta}-dX_2+U$$

$$X_2 e^{j\vartheta}=X_1$$ **/1 pont** (egyenletek)

$$X_2=\frac{U}{e^{2j\vartheta}+be^{j\vartheta}+d}$$

$$Y=cX_1+eX_2+aU=cX_2e^{j\vartheta}+eX_2+aU=\frac{ce^{j\vartheta}+e+a\left(e^{2j\vartheta}+be^{j\vartheta}+d\right)}{e^{2j\vartheta}+be^{j\vartheta}+d}U$$

$$H(e^{j\vartheta})=\frac{Y(e^{j\vartheta})}{U(e^{j\vartheta})}=\frac{ae^{j2\vartheta}+(ab+c)e^{j\vartheta}+(ad+e)}{e^{j2\vartheta}+be^{j\vartheta}+d}=\frac{a+(ab+c)e^{-j\vartheta}+(ad+e)e^{-j2\vartheta}}{1+be^{-j\vartheta}+de^{-j2\vartheta}}$$ **/1 pont**

Behelyettesítve a numerikus értékeket:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{1+(1\cdot(-0{,}25)-0{,}5)e^{-j\vartheta}+(1\cdot(-0{,}125)+0{,}25)e^{-j2\vartheta}}{1-0{,}25e^{-j\vartheta}-0{,}125e^{-j2\vartheta}}$$

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{e^{j2\vartheta}-0{,}75e^{j\vartheta}+0{,}125}{e^{j2\vartheta}-0{,}25e^{j\vartheta}-0{,}125} = \frac{1-0{,}75e^{-j\vartheta}+0{,}125e^{-j2\vartheta}}{1-0{,}25e^{-j\vartheta}-0{,}125e^{-j2\vartheta}}$$ **/1 pont**

(b)

$$H(z)=\frac{z^2-0{,}7z+0{,}12}{z^2-1{,}2z+0{,}35}=\frac{(z-0{,}4)(z-0{,}3)}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)}$$

Zérus:

$z_1 = 0{,}4$ és $z_1 = 0{,}3$ **/1 pont**

Pólusok

$p_1 = 0{,}5$ és $p_2 = 0{,}7$ **/1 pont**

Stabilitás:

G-V stabilitás feltétele, hogy $|p_i|<1$ minden „i"-re. Ez most teljesül, tehát a rendszer G-V stabil. **/1 pont**

Mivel a rendszer két késleltetőt tartalmaz, így a sajátértékek megegyeznek a pólusokkal, tehát a rendszer aszimptotikusan stabil is.

(c)

$H(z)=\dfrac{z^2-0{,}7z+0{,}12}{z^2-1{,}2z+0{,}35}=\dfrac{(z-0{,}4)(z-0{,}3)}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)}$ ez nem valódi törtfüggvény, mivel a számláló fokszáma egyenlő a nevező fokszámával. Polinom osztást kell végrehajtani:

$$H(z)=\frac{z^2-0{,}7z+0{,}12}{z^2-1{,}2z+0{,}35}=\frac{z^2-1{,}2z+0{,}35+0{,}5z-0{,}23}{z^2-1{,}2z+0{,}35}=1+\frac{0{,}5z-0{,}23}{z^2-1{,}2z+0{,}35}$$

Ezek után következik a részlettörtekre bontás:

$$H(z)=1+\frac{0{,}5z-0{,}23}{z^2-1{,}2z+0{,}35}=1+\frac{A}{z-0{,}5}+\frac{B}{z-0{,}7}$$

A „letakarásos" módszerrel:

$$A=\left.\frac{0{,}5z-0{,}23}{z-0{,}7}\right|_{z=0{,}5}=\frac{0{,}02}{-0{,}1}=-0{,}1$$

$$B=\left.\frac{0{,}5z-0{,}23}{z-0{,}5}\right|_{z=0{,}7}=\frac{0{,}12}{0{,}2}=0{,}6$$

„A" meghatározása **/1 pont**, B meghatározása **/1 pont**,

$$H(z)=1+\frac{-0{,}1}{z-0{,}5}+\frac{0{,}6}{z-0{,}7}=1+\frac{-0{,}1z}{z-0{,}5}z^{-1}+\frac{0{,}6z}{z-0{,}7}z^{-1}$$ végső alak **/1 pont**.

Inverz-transzformációval:

$h[k]=\delta[k]+\varepsilon[k-1]\left((-0{,}1)0{,}5^{k-1}+0{,}6\cdot 0{,}7^{k-1}\right)$ **/2 pont**

(d)

$u[k]=2\varepsilon[k-1]\rightarrow U(z)=\dfrac{2}{z-1}$ **/2 pont**

A válasz Z-transzformáltja:

$Y(z)=H(z)U(z)=\dfrac{(z-0{,}4)(z-0{,}3)}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)}\dfrac{2}{(z-1)}$ **/2 pont**

Részlettörtekre bontás:

$$Y(z)=H(z)U(z)=\frac{(z-0{,}4)(z-0{,}3)}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)}\frac{2}{(z-1)}=\frac{A}{(z-0{,}5)}+\frac{B}{(z-0{,}7)}+\frac{C}{(z-1)}$$

A „letakarásos” módszerrel:

$$A=\left.\frac{2(z-0{,}4)(z-0{,}3)}{(z-0{,}7)(z-1)}\right|_{z=0,5}=\frac{2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2}{-0{,}2\cdot(-0{,}5)}=0{,}4$$

$$B=\left.\frac{2(z-0{,}4)(z-0{,}3)}{(z-0{,}5)(z-1)}\right|_{z=0,7}=\frac{2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4}{0{,}2\cdot(-0{,}3)}=-4$$

$$C=\left.\frac{2(z-0{,}4)(z-0{,}3)}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)}\right|_{z=1}=\frac{2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7}{0{,}5\cdot 0{,}3}=5{,}6$$

„A”, B és C meghatározása **1-1-1 pont**:

$$Y(z)=\frac{0{,}4}{(z-0{,}5)}+\frac{-4}{(z-0{,}7)}+\frac{5{,}6}{(z-1)}=\frac{0{,}4z}{(z-0{,}5)}z^{-1}+\frac{-4z}{(z-0{,}7)}z^{-1}+\frac{5{,}6z}{(z-1)}z^{-1}$$

Inverz transzformációval a válasz időfüggvénye:

$y[k]=\varepsilon[k-1]\left(0{,}4\cdot 0{,}5^{k-1}-4\cdot 0{,}7^{k-1}+5{,}6\right)$ **/2 pont**

2. Nagypélda (Megoldását külön lapra kérjük!)

A folytonos idejű rendszer impulzusválasza:

$$h(t)=\left(10t\cdot e^{-2t}-3\cdot e^{-2t}\right)\cdot\varepsilon(t)$$

(a) Adja meg a rendszer $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikáját normálalakban! /4 pont/

(b) Adott egy nem belépő periodikus gerjesztés ($T=2\pi$ s), ami egy periódusával a következőképpen adott: $u(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le \frac{T}{2}\\ -1 & \frac{T}{2}\le t\le T\end{cases}$

Adja meg a rendszer $y(t)$ válaszának közelítését az egyen komponens és a Fourier-sor első két, nulla értéktől különböző tagja alapján! /16 pont/

Megoldás

(a) $H(j\omega)=\dfrac{10}{(j\omega+2)^2}-\dfrac{3}{j\omega+2}=\dfrac{10-3(j\omega+2)}{(j\omega)^2+4(j\omega)+4}=\dfrac{4-3(j\omega)}{(j\omega)^2+4(j\omega)+4}$ / **4 pont**

(b) A Fourier – együtthatók kiszámítására több út is lehetséges.

$$u(t)=U_0+\sum_{p=1}^{\infty}U_p\cos\left(p\Omega t+\rho_p\right)$$

$U_0=U_0^C;U_p=2\left|U_p^C\right|;\rho_p=arc\left\{U_p^C\right\};\qquad \Omega=\dfrac{2\pi}{T}=1\quad\dfrac{rad}{s}$ **/1 pont**

p=0 helyettesítéssel: $U_0^c=U_0=\dfrac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot e^{-jp\Omega t}dt=\dfrac{1}{T}\int_0^T u(t)dt=0$ **/1 pont**

Általánosan:

$$U_p^c=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot e^{-jp\Omega t}dt=\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}e^{-jp\Omega t}dt+\frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}-e^{-jp\Omega t}dt=\frac{1}{T}\left[\frac{e^{-jp\cdot\Omega\cdot t}}{-jp\Omega}\right]_0^{\frac{T}{2}}+\frac{1}{T}\left[-\frac{e^{-jp\cdot\Omega\cdot t}}{-jp\Omega}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}=$$

$$=\frac{e^{-jp\pi}-1}{-j2\pi p}-\frac{e^{-jp2\pi}-e^{-jp\pi}}{-j2\pi p}=\frac{1-e^{-jp\pi}}{j2\pi p}+\frac{e^{-jp2\pi}-e^{-jp\pi}}{j2\pi p}=\frac{1+e^{-jp2\pi}-2e^{-jp\pi}}{j2\pi p}$$

p=1 helyettesítéssel: $U_1^c=\dfrac{1+e^{-jp2\pi}-2e^{-jp\pi}}{j2\pi p}=\dfrac{1+e^{-j2\pi}-2e^{-j\pi}}{j2\pi}=\dfrac{1+1+2}{j2\pi}=\dfrac{2}{j\pi}=-\dfrac{2j}{\pi}$

p=2 helyettesítéssel: $U_2^c=\dfrac{1+e^{-jp2\pi}-2e^{-jp\pi}}{j2\pi p}=\dfrac{1+e^{-j4\pi}-2e^{-j2\pi}}{j4\pi}=\dfrac{1+1-2}{j4\pi}=0$

p=3 helyettesítéssel: $U_3^c=\dfrac{1+e^{-jp2\pi}-2e^{-jp\pi}}{j2\pi p}=\dfrac{1+e^{-j6\pi}-2e^{-j3\pi}}{j6\pi}=\dfrac{1+1+2}{j6\pi}=\dfrac{2}{j3\pi}=-\dfrac{2j}{3\pi}$

A gerjesztés minden komplex együtthatóra jár 2 pont, összesen **/6 pont**

$U_0=0\quad U_1^c=-\dfrac{2j}{\pi}\quad U_2^c=0\quad U_3^c=-\dfrac{2j}{3\pi}$

A megfelelő frekvenciákhoz tartozó átviteli tényezők:

$$H(j\omega)=\frac{4-3(j\omega)}{(j\omega)^2+4(j\omega)+4}$$

$$H(j1)=\frac{4-3(j)}{(j)^2+4(j)+4}=\frac{4-3j}{3+4j}=\frac{5e^{-0,644j}}{5e^{0,927j}}=e^{-j1,571}=e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j$$ **/ 2 pont**

(Itt zárójelben jegyzem meg, hogy a számlálóban és a nevezőben lévő komplex fazor pontosan 90 fokos szöget zárnak be egymással, így az eredmény gyakorlatilag -90 fok).

$$H(j3)=\frac{4-3(3j)}{(3j)^2+4(3j)+4}=\frac{4-9j}{-5+12j}=\frac{9,849e^{-1,15j}}{13e^{1,966j}}=0,758e^{-j3,116}$$ **/ 2 pont**

Az egyes átviteli tényező és adott gerjesztés – komponens szorzatok alapján a válasz komplex amplitúdói:

$$Y(j0)=H(j0)U_0^c=0$$

$$Y(j1)=H(j1)2U_1^c=e^{-j1,571}\cdot 2\frac{2}{\pi}e^{-j1,571}=-j\cdot 2\frac{-2j}{\pi}=-\frac{4}{\pi}=-1,273$$

$$Y(j3)=H(j3)2U_3^c=0,758e^{-j3,116}\cdot 2\frac{2}{3\pi}e^{-j1,571}=0,322e^{-j4,687}$$ **/2 pont**

és ebből a mérnöki valós alak:

$$y(t)=0+1,273\cos(t-\pi)+0,322\cos(3t-4,687)$$ **/2 pont**

Jelek és rendszerek 2. ZH A csoport

Kispéldák (A megoldást a feladat szövege alá írja! Minden kispélda 2 pontot ér. Csak a végeredményt kérjük odaírni, a levezetésre, részeredményekre részpontszám nem jár!)

Megoldás:

1. Adja meg a DI rendszer gerjesztő jelét, ha a rendszer válaszjele a k=0,1,2 időpillanatokban [1, 4, 4] (egyébként 0), a rendszer átviteli függvénye: $H(z) = 1 + 2z^{-1}$!

   u[k]=[1, 2] ha k=0,1, egyébként 0.

2. Egy DI rendszer átviteli karakterisztikája $H\left(e^{j\vartheta}\right) = 0{,}2 + e^{-2j\vartheta}$ Adjuk meg a rendszer ugrásválaszának értékét k=0-ban!

A rendszer átviteli függvényének felhasználásával az ugrásválasz Z-transzformáltja:

$$G(z) = \frac{0{,}2z^2 + 1}{z^2}\frac{z}{z-1}$$

A kezdetiérték-tétel felhasználásával

$$g[0] = \lim_{z\to\infty} G(z) = 0{,}2$$

Alternatív megoldás: a rendszer impulzusválasza $h[k] = 0{,}2\delta[k] + \delta[k-2]$, és(kauzális rendszerről van szó) $g[k] = \sum_{i=0}^{k} h[i]$, ebből közvetlenül adódik az eredmény k=0-ra

3. Egy *f(t)* FI jel spektruma $F(j\omega) = \varepsilon(j(\omega+2)) - \varepsilon(j(\omega-2))$.Adja meg a jel energiáját!

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} |1|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}[\omega]_{-2}^{2} = \frac{2}{\pi}$$

4. Adja meg az *a* paraméter azon értékeit, amelyekre az $x[k] = \sum_{i=a}^{2} \delta[k-i]$ DI jel spektruma tisztán valós!

Megoldás: tisztán valós a spektrum, ha a jel páros, vagyis *a*=*-2*.

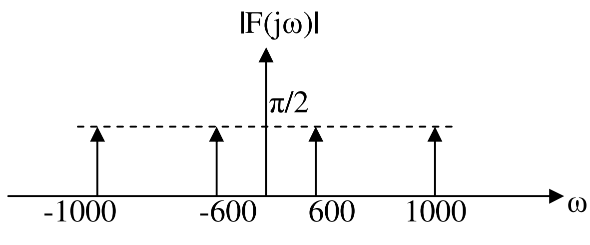
5. Rajzolja fel az $f(t) = \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$ FI jel amplitúdó spektrumát, ha ω_1=800 krad/s és ω_2=200 krad/s!

$F\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ és

$$\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) = \frac{e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}}{2}\cdot\frac{e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t}}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{j(\omega_1+\omega_2)t} + e^{j(\omega_1-\omega_2)t} + e^{-j(\omega_1-\omega_2)t} + e^{-j(\omega_1+\omega_2)t}\right)$$

Alapján:

$$F\{f(t)\} = \frac{1}{4}\left(2\pi\delta(\omega-(\omega_1+\omega_2)) + 2\pi\delta(\omega-(\omega_1-\omega_2)) + 2\pi\delta(\omega-(-\omega_1+\omega_2)) + 2\pi\delta(\omega-(-\omega_1-\omega_2))\right)$$



6. Ha $\mathcal{F}\{h(t)\} = H(j\omega), \mathcal{F}\{u(t)\} = U(j\omega)$, akkor írja fel a két időtartománybeli jel konvolúciójának spektrumát!

$\mathcal{F}\{h(t) * u(t)\} = H(j\omega)U(j\omega)$

7. Egy FI rendszer gerjesztése $u(t) = 5\cos(3t + 0,2)$, átviteli karakterisztikája $H(j\omega) = \dfrac{10}{j\omega + 4}$. Adja meg a rendszer válaszjelét!

MO: $H(j3) = \dfrac{10}{j3+4} = \dfrac{10}{5e^{j0,9273}} = 2e^{-j0,9273}$

$y(t) = 10\cos(3t - 0,7273)$

8. Adott a FI rendszer gerjesztése és válasza. Határozza meg az átviteli függvényt!

$u(t) = 0,5\delta(t) \quad y(t) = \varepsilon(t)e^{-5t}$

$H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{2}{s+5}$

9. Egy DI periodikus jel alapharmonikusának körfrekvenciája: $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Sorolja fel a valós Fourier-sor diszkrét körfrekvenciáit!

Mivel $\theta = \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{L} \rightarrow L = 6$. A sorfejtés általános alakja:

$u[k] = U_0 + \sum_{p=1}^{M} U_p \cos(p\Theta k + \rho_p) + U_{\frac{L}{2}}(-1)^k \quad L = 6 \rightarrow M = \dfrac{L}{2} - 1 = 2$

Tehát összesen 4 tag szükséges: U_0, U_1, U_2, és U_3. Az ehhez tartozó diszkrét körfrekvenciák: 0, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, π.

10. Egy DI, GV stabilis, kauzális rendszer átviteli karakterisztikájának ismeretében írja fel az átviteli függvényt!

$H(z) = H(e^{j\vartheta})\big|_{e^{j\vartheta} = z}$