

1. Az a mely értékei mellett merőleges az $(1, 2, 2)$ és a $(2, 2, a)$ vektor egymásra? És mikor párhuzamos? És az $(5, -3, 2)$ és $(7, 4, z)$ vektorok?
2. Írjuk fel a $(1, 1, 1)$ és $(2, 3, 1)$ pontokat összekötő egyenes egyenletét.
3. Írjuk fel a $(3, 4, 5)$ ponton átmenő, a $3x + y - 3z = 8$ egyenletű síkkal párhuzamos sík egyenletét.
4. A c valós paraméter milyen értékeire lesz merőleges a $3x + cy + 4z = 7$ és a $12x - cy + 16z = 5$ egyenletű sík? Milyen c esetén fogják egymást metszeni?
5. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelyik átmegy az origón és merőleges a $(2, 3, 4)$ vektorra! Írjuk fel az ezzel párhuzamos, $(1, 1, 1)$ pontot tartalmazó síkét is.
6. Egy sík a koordinátatengelyeket a $(2, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 5)$ pontokban metszi. Írjuk fel az egyenletét.
7. Adjuk meg a p paraméter összes értékét, melyre az $x + y + z = 1$ és $2x + y = 3$ egyenletekkel megadott egyenes egy pontban metszi az $5x + 3y + pz = 11$ síkot.
8. Adjuk meg p és q értékét úgy, hogy az alábbi síkok **(a)** egy egyenesre illeszkedjenek **(b)** ne legyen közös pontjuk

$$2x + 3y - z = 6$$

$$x - 3y + 2z = 5$$

$$4x - 3y + pz = q$$

9. Mi az alábbi síkok metszete?

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + 3y - z &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 4 \\ -3x - 4,5y + 3z &= -2 \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + 3y - z &= 1 \\ -x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

10. Létezik-e olyan egyenes, amely az adott 3 sík mindegyikével párhuzamos? Ha igen, akkor adjuk meg közülük az origón átmenőt.

$$2x + 4y + 3z = 1$$

$$x + 7y + 4z = 3$$

$$3x - 5y - z = 2$$

11. Határozzuk meg az $(1, 1, 1)$ és $(2, 2, 4)$ pontokon átmenő egyenes és a $2x + 3y - z = 2$ egyenletű sík metszetét.
12. Legyen $a = (2, -1, 2)$ és $b = (1, 3, 2)$. Bontsuk fel b -t egy a -val párhuzamos és egy a -ra merőleges összetevőre.

13. Határozzuk meg a $3x + 4y + 12z + 25 = 0$ sík és a $(2, 3, 4)$ pont távolságát.
14. Határozzuk meg az $Ax + By + Cz + D = 0$ sík és az (x_0, y_0, z_0) pont távolságát.
15. Határozzuk meg az $x + y + z = 5$ egyenletű sík és a $2x - y - 2z = 3$ egyenletű sík metszéspontjának azt a pontját, amelyik az x és az y tengely által meghatározott síkba esik.
16. Hol dőfi a $3x + y + 5z = 4$ síkot az az egyenes, amelyet az $x + 4y = 1$ és az $x - 3y + z = 6$ egyenletek határoznak meg?
17. Legyen $\mathbb{R}^3$ -ben $u = (1, 2, 0)$, $v = (0, 1, 2)$, $w = (2, 0, 1)$ és $a = (1, 0, 0)$. Kifejezhető-e az u , v és w vektorokból az a vektor?
18. Kifejezhető-e a $(0, 0, 0)$ vektor az $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ és $(1, 0, 1)$ vektorok segítségével, mint egy nemnulla lineáris kombináció? Milyen alakú vektorok fejezhetőek ki?
19. Döntsük el, hogy V a $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel vektorteret alkot-e, ahol
(a) V a racionális számok halmaza, $\oplus$ az összeadás és $\lambda \odot v = [\lambda \cdot v]$, ahol $[\]$ az egészrész.
(b) V a pozitív valós számok halmaza, $u \oplus v = u \cdot v$ és $\lambda \odot v = v^\lambda$.
20. Vektorteret alkotnak-e az alábbi halmazok (a valós számok felett)?
(a) egész számok; racionális számok; valós számok,
(b) a sík összes, x vagy y tengellyel párhuzamos vektora,
(c) az összes n -edfokú egyváltozós polinom,
(d) az összes legfeljebb n -edfokú egyváltozós polinom,
(e) az összes egyváltozós polinom,
(f) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(5) \geq 0\}$,
(g) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(5) = f(8)\}$,
(h) A sík részhalmazai a $+$ =unió és $\lambda \cdot$ =nyújtás műveletekkel.
21. A valós számhármassok terében vektorteret alkotnak-e azok az (x_1, x_2, x_3) vektorok, melyekre
(a) $x_1 = 2x_2 - 3x_3$,
(b) $x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 2$.
22. Igazold, hogy bármely V vektortérben bármely $v \in V$ vektorra fennáll:
(a) $\lambda \cdot v = 0$, akkor és csak akkor, ha $\lambda = 0$ vagy $v = 0$,
(b) $(-1) \cdot v = -v$.

Feladatok, pontszámok:	http://cs.bme.hu/~gyz
Információk a tárgyról:	http://cs.bme.hu/bsz1
Elérhetőség:	gyz ★ renyi.hu

1. Az a mely értékei mellett merőleges az $(1, 2, 2)$ és a $(2, 2, a)$ vektor egymásra?

És mikor párhuzamos? És az $(5, -3, 2)$ és $(7, 4, z)$ vektorok?

Megoldás: Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla. Ez mikor teljesül? $(1, 2, 2) \cdot (2, 2, a) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot a = 6 + 2a = 0$ pontosan akkor, ha $a = -3$. Két vektor akkor párhuzamos, ha az egyik a másik számszorosa, azaz létezik olyan $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, amire $\lambda \cdot (1, 2, 2) = (2, 2, a)$. Az első koordinátából láthatjuk, hogy ha van ilyen, akkor az csak a $\lambda = 2$ lehet. Erre $(2, 4, 4) = (2, 2, a)$, ami nem lehetséges semmilyen a -ra.

A másik két vektor akkor merőleges, ha $5 \cdot 7 + (-3) \cdot 4 + 2 \cdot z = 0$ azaz pontosan akkor, ha $z = \frac{-23}{2}$. Ugyan úgy, mint az előbb, semmilyen z értékre nem lesznek párhuzamosak.

2. Írjuk fel a $(1, 1, 1)$ és $(2, 3, 1)$ pontokat összekötő egyenes egyenletét.

Megoldás: A két pontot "összekötő" vektor a $\vec{v} = (2 - 1, 3 - 1, 1 - 1) = (1, 2, 0)$. Ekkor a $\vec{v}$ irányú, origón átmenő egyenes pontjai a $\lambda \cdot \vec{v}$ alakú pontok ($\lambda \in \mathbb{R}$). Ahhoz, hogy ez átmenjen a két ponton, hozzá kell adni az egyik pontba mutató vektort. Tehát az egyenes pontjai: $\{\lambda \cdot \vec{v} + (1, 1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, kiírva: $\{(\lambda + 1, 2\lambda + 1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Az egyenes egyenletendszere: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2}$ és $z = 1$.

3. Írjuk fel a $(3, 4, 5)$ ponton átmenő, a $3x + y - 3z = 8$ egyenletű síkkal párhuzamos sík egyenletét.

Megoldás: Ha a sík egyenlete $Ax + By + Cz + D = 0$ alakú, akkor ebből a sík normálvektorát (amire a síkbeli vektorok mind merőlegesek) meg tudjuk mondani: $\vec{n} = (A, B, C)$. (A síkot egy vektorra való merőlegességgel, azaz a skaláris szorzattal definiálunk). Jelen esetben a síkunk normálisa az $\vec{n} = (3, 1, -3)$. Az ezzel párhuzamos síkok normálisa mind ugyan ez (vagy legalábbis párhuzamos ezzel). Már csak az kell, hogy átmenjen a kívánt ponton: $3x + y - 3z = \vec{n} \cdot \vec{p} = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = -2$. Általában is érdemes megjegyezni, hogy az $\vec{n}$ vektorra merőleges, $\vec{p}$ ponton átmenő sík egyenlete $\boxed{\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}}$.

4. A c valós paraméter milyen értékeire lesz merőleges a $3x + cy + 4z = 7$ és a $12x - cy + 16z = 5$ egyenletű sík? Milyen c esetén fogják egymást metszeni?

Megoldás: Két sík merőleges, ha a normálvektoraik merőlegesek. Itt a két normálvektor: $\vec{n}_1 = (3, c, 4)$ és $\vec{n}_2 = (12, -c, 16)$. Merőlegesek, ha skaláris szorzatuk 0, azaz ha $(3, c, 4) \cdot (12, -c, 16) = 3 \cdot 12 - c^2 + 4 \cdot 16 = -c^2 + 100 = 0$, ami akkor van, ha $c = \pm 10$. Ha két sík nem párhuzamos, akkor metszik egymást. De mikor párhuzamos két sík? Akkor ha a normálvektoraik párhuzamosak. Jelen esetben, ha van $\lambda \neq 0$, amire $\lambda \cdot (3, c, 4) = (12, -c, 16)$. Ha van ilyen, akkor az csak a $\lambda = 4$ lehet (mondjuk az első koordináta miatt). Ezzel beszorozva az kell, hogy $(12, 4c, 16) = (12, -c, 16)$, ami a $4c = -c$, $c = 0$ esetén fennáll.

5. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelyik átmegy az origón és merőleges a $(2, 3, 4)$ vektorra! Írjuk fel az ezzel párhuzamos, $(1, 1, 1)$ pontot tartalmazó síkét is.

Megoldás: Tehát a sík normálvektora a $(2, 3, 4)$, ezért az origón átmenő sík egyenlete: $2x + 3y + 4z = 0$. Ha pedig ezzel párhuzamos (tehát a normálvektor ugyan az!), és átmegy az $(1, 1, 1)$ ponton, akkor annak az egyenlete: $2x + 3y + 4z = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9$.

6. Egy sík a koordinátatengelyeket a $(2, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 5)$ pontokban metszi. Írjuk fel az egyenletét.

Megoldás: Egy sík általános egyenlete $Ax + By + Cz = D$ alakú. Itt persze az A, B, C és D paraméterek közül az egyik lehet "tetszőleges", mert a normálvektornak csak az iránya számít, a hossza nem. Ha a megadott három pont rajta van a síkon, akkor azokat beírva az egyenletbe, tényleg egyenlőséget kapunk. Azaz van a következő három egyenletünk:

$$A \cdot 2 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = D,$$

$$A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 = D,$$

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 5 = D.$$

Legyen mondjuk $D = 10$. Ekkor $A = 5$, $B = 10$ és $C = 2$, amiből tehát a sík egyenlete: $5x + 10y + 2z = 10$.

7. Adjuk meg a p paraméter összes értékét, melyre az $x + y + z = 1$ és $2x + y = 3$ egyenletekkel megadott egyenes egy pontban metszi az $5x + 3y + pz = 11$ síkot.

Megoldás: Vagyis p értékét úgy kell megválasztani, hogy a feladatban szereplő három egyenletből álló egyenletrendszernek pontosan egy megoldása legyen. Ez $p = 1$ esetén nem teljesül.

8. Adjuk meg p és q értékét úgy, hogy az alábbi síkok (a) egy egyenesre illeszkedjenek (b) ne legyen közös pontjuk

$$2x + 3y - z = 6$$

$$x - 3y + 2z = 5$$

$$4x - 3y + pz = q$$

Megoldás: Ahhoz, hogy egy egyenesre illeszkedjenek, az kell, hogy a fenti egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen (így kell a p és q paramétereket beállítani). Ahhoz, hogy ne legyen közös pontjuk, pedig az kell, hogy ne legyen megoldása az egyenletrendszernek.

9. Mi az alábbi síkok metszete?

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & x + y + z = 6 & \text{(b)} \quad 2x + 3y - 2z = 4 \\ & 2x + 3y - z = 4 & \text{(c)} \quad \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ -x - y + 2z = 1 \end{array} \end{array}$$

Megoldás: (a) A két sík normálvektora nem párhuzamos, ezért egy egyenesben metszik egymást. Az egyenes irányvektorát megkaphatjuk a két normálvektor vektoriális szorzataként.

(b) A két normálvektor: $\bar{n}_1 = (2, 3, -2)$ és $\bar{n}_2 = (-3, \frac{-9}{2}, 3)$. Látszik, hogy $\frac{-3}{2} \cdot \bar{n}_1 = \bar{n}_2$, vagyis a két normálvektor párhuzamos, és így a két sík is az. Mivel $4 \cdot \frac{-3}{2} \neq -2$, ezért a két sík nem esik egybe. Vagyis nem metszik egymást.

(c) Az egyenletrendszert megoldva pontosan egy pontot kapunk, ami mindhárom síkban benne van, vagyis a metszetük egyetlen pont.

10. Létezik-e olyan egyenes, amely az adott 3 sík mindegyikével párhuzamos? Ha igen, akkor adjuk meg közülük az origón átmenőt.

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 1 \\ x + 7y + 4z &= 3 \\ 3x - 5y - z &= 2 \end{aligned}$$

Megoldás: Azt, hogy a $\bar{v}$ irányvektorú egyenes párhuzamos az $\bar{n}$ normálvektorú síkkal, úgy lehet másképp mondani, hogy $\bar{v} \perp \bar{n}$ merőlegesek. Vagyis, kell keresni egy olyan nem nulla vektort (ha van), ami mind a három sík normálvektorára merőleges. Ez azt jelenti, hogy ha az irányvektor koordinátái $\bar{v} = (x, y, z)$, akkor meg kell oldanunk az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 0 \\ x + 7y + 4z &= 0 \\ 3x - 5y - z &= 0 \end{aligned}$$

Ennek megoldásai a $(\lambda, -\lambda, 2 \cdot \lambda)$ alakú pontok, ahol λ szabad paraméter. Ebből már fel tudjuk írni az egyenes egyenletét.

11. Határozzuk meg az $(1, 1, 1)$ és $(2, 2, 4)$ pontokon átmenő egyenes és a $2x + 3y - z = 2$ egyenletű sík metszetét.

Megoldás: A két ponton átmenő egyenes pontja ilyen alakúak: $(\lambda + 1, \lambda + 1, 3\lambda + 1)$, valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ számra. Ez úgy jött ki, hogy a két pont közti vektor a $\bar{v} = (2 - 1, 2 - 1, 4 - 1)$, az egyenes pontja pedig a $\lambda \cdot \bar{v} + (1, 1, 1)$ alakú pontok. Tehát kell keresnünk egy olyan pontot, ami rajta van az egyenesen, és a síkon is, vagyis koordinátái kielégítik a megfelelő egyenleteket. Azaz ezt az egyenletet kell megoldanunk:

$$2 \cdot (\lambda + 1) + 3 \cdot (\lambda + 1) - (3\lambda + 1) = 2.$$

Ha ennek $\lambda = c$ megoldása (amit most nem akarok kiszámolni), akkor a kért pont a $(c + 1, c + 1, 3c + 1)$.

12. Legyen $a = (2, -1, 2)$ és $b = (1, 3, 2)$. Bontsuk fel b -t egy a -val párhuzamos és egy a -ra merőleges összetevőre.

Megoldás: Legyen $\bar{u}$ és $\bar{v}$ két vektor. Ekkor $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| |\bar{v}| \cos(\bar{u}, \bar{v})$, amiből az következik,

hogy a $\bar{v}$ vektor $\bar{u}$ -ra vett merőleges vetülete az $\boxed{\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\bar{u}^2} \bar{u}}$ vektor, ami tehát párhuzamos $\bar{u}$ -val. A eredeti vektorból kivonva az $\bar{u}$ -val párhuzamos komponenst, megkaphatjuk a merőleges komponest. (Lehetne a fenti képlethez hasonló is csinálni: a skaláris szorzást kellene vektoriálásra cserélni). Konkrétan a feladatban:

$$\begin{aligned} b_{||} &= \frac{(2, -1, 2) \cdot (1, 3, 2)}{(2, -1, 2) \cdot (2, -1, 2)} (2, -1, 2) = \frac{3}{7} (2, -1, 2), \\ b_{\perp} &= b - b_{||}. \end{aligned}$$

13. Határozzuk meg a $3x + 4y + 12z + 25 = 0$ sík és a $(2, 3, 4)$ pont távolságát.

Megoldás: Ezt megoldjuk általánosan is a következő feladatban, úgyhogy lásd ott.

14. Határozzuk meg az $Ax + By + Cz + D = 0$ sík és az (x_0, y_0, z_0) pont távolságát.

Megoldás: A sík és a pont távolságát úgy lehet meghatározni, hogy a pontból merőlegest állítunk a síkra, és lemérjük ennek hosszát. Egy vektort biztosan tudunk, ami merőleges a síkra: ez a normálvektora, ami itt $\bar{n} = (A, B, C)$. Tegyük fel, hogy ismerünk egy (x_1, y_1, z_1) pontot, ami benne van a síkban, azaz amire $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Erre a pontra csak a levezetés során lesz szükségünk, a végső képletben már nem fog szerepelni. A két pontunk között menő vektor a $\bar{v} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$. Ha ez a vektor merőleges lenne a síkra, akkor ennek e hosszát kellene megmondani. De sajnos nem tudjuk, hogy merőleges-e vagy sem. Ezért vetítsük rá a normálvektorra, amiről már tudjuk, hogy merőleges. Általánosan, a $\bar{b}$ vektor $\bar{a}$ -ra vett vetületének hossza $\frac{|\bar{a} \cdot \bar{b}|}{|\bar{a}|}$. Ebből a $\bar{v}$ vektor $\bar{n}$ -re vett vetületének hossza, azaz a sík és a pont távolsága:

$$\frac{|A \cdot (x_0 - x_1) + B \cdot (y_0 - y_1) + C \cdot (z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Kifejtve a zárójeleket, és felhasználva, hogy (x_1, y_1, z_1) a síkban van, a következőt kapjuk:

$$\boxed{\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}.$$

15. Határozzuk meg az $x + y + z = 5$ egyenletű sík és a $2x - y - 2z = 3$ egyenletű sík metszéspontjának azt a pontját, amelyik az x és az y tengely által meghatározott síkba esik.

Megoldás: Itt gyakorlatilag három sík metszetét kell meghatározni (a harmadik sík az x és y tengely által meghatározott, aminek egyenlete: $z = 0$). Tehát kell egy olyan pont, aminek (x, y, z) koordinátái kielégítik ezt az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5, \\ 2x - y - 2z &= 3, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Ezt megoldva kapjuk, hogy a pont koordinátái: $(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, 0)$.

16. Hol dőfi a $3x + y + 5z = 4$ síkot az az egyenes, amelyet az $x + 4y = 1$ és az $x - 3y + z = 6$ egyenletek határoznak meg?

Megoldás: Olyan pontot keresünk, ami rajta van mind a síkon, mind az egyenesen, vagyis aminek koordinátái kielégítik mind a három egyenletet: Meg kell oldani a feladat szövegében szereplő három egyenletből álló egyenletrendszert. Ennek egyetlen megoldása az $(5, -1, -2)$.

17. Legyen $\mathbb{R}^3$ -ben $u = (1, 2, 0)$, $v = (0, 1, 2)$, $w = (2, 0, 1)$ és $a = (1, 0, 0)$. Kifejezhető-e az u , v és w vektorokból az a vektor?

Megoldás: Az, hogy kifejezhető, azt jelenti, hogy léteznek α , β , γ valós számok, amikre fennáll, hogy

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w = a.$$

Ez azt jelenti, hogy a következő egyenletrendszernek keressük a megoldását:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 2 \cdot z &= 1 \\ 2 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z &= 0 \\ 0 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z &= 0. \end{aligned}$$

(Az egyes oszlopok az adott vektorok koordinátái). Ennek egyértelmű megoldása az $(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9})$ vektor, vagyis az $\alpha = \frac{1}{9}$, $\beta = -\frac{2}{9}$, $\gamma = \frac{4}{9}$ választás megfelelő lesz.

18. Kifejezhető-e a $(0, 0, 0)$ vektor az $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ és $(1, 0, 1)$ vektorok segítségével, mint egy nemnulla lineáris kombináció? Milyen alakú vektorok fejezhetőek ki?

Megoldás: Nézzük meg, hogy mi a helyzet, ha $\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$. Egyszerűbben felírva: $(\alpha + \gamma, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$. Ebből biztosan tudjuk, hogy akkor $\gamma = 0$, $\beta = 0$, és akkor muszáj, hogy $\alpha = 0$ legyen. De akkor ez nem egy nemnulla lineáris kombináció. (Ezt szokták úgy fogalmazni, hogy a három vektor lineárisan független). Azt láttuk, hogy az $(\alpha + \gamma, \beta, \gamma)$ alakú vektorok kifejezhetőek. A helyzet az, hogy bármelyik vektort elő tudunk ilyen alakban állítani. Legyen pl. az előállítandó vektor az (x, y, z) . Ekkor a $\beta = y$, $\gamma = z$ és $\alpha = x - y$ jó lesz. Tehát az egész tér előáll.

19. Döntsük el, hogy V a $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel vektorteret alkot-e, ahol

- (a) V a racionális számok halmaza, $\oplus$ az összeadás és $\lambda \odot v = [\lambda \cdot v]$, ahol $[\]$ az egészrész.
(b) V a pozitív valós számok halmaza, $u \oplus v = u \cdot v$ és $\lambda \odot v = v^\lambda$.

Megoldás: (a) Nem lesz vektortér, mert mondjuk a skalárral való szorzásra kirótt

$$(\lambda \cdot \mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v)$$

azonosság nem teljesül. Ez ugyanis azt jelentené, hogy

$$[\lambda \cdot \mu \cdot v] = [\lambda \cdot [\mu \cdot v]]$$

teljesül minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $v \in \mathbb{Q}$ számra, ami nincs így. Például $\lambda = 2$, $\mu = \frac{1}{2}$ és $v = 1$ választásra nem teljesül.

- (b) Ez vektortér lesz. Az összeadás nulleleme az 1, az x elem $\oplus$ -ra vett inverze $\frac{1}{x}$.

20. Vektorteret alkotnak-e az alábbi halmazok (a valós számok felett)?

- (a) egész számok; racionális számok; valós számok,
(b) a sík összes, x vagy y tengellyel párhuzamos vektora,
(c) az összes n -edfokú egyváltozós polinom,
(d) az összes legfeljebb n -edfokú egyváltozós polinom,
(e) az összes egyváltozós polinom,
(f) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(5) \geq 0\}$,
(g) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(5) = f(8)\}$,
(h) A sík részhalmazai a $+$ =unió és $\lambda \cdot$ =nyújtás műveletekkel.

Megoldás: (a) Az egész számok halmaza nem zárt a valós számokkal vett szorzásra (pl. $\pi \cdot 2 \notin \mathbb{Z}$ noha $2 \in \mathbb{Z}$), ezért nem alkotnak vektorteret (a valósok felett). Ugyan ez elmondható a racionális számokra is: egy irracionális valóssal való szorzásra nem zártak. Viszont a valós számok vektorteret alkotnak önmaguk felett.

- (b) Nem zárt az összeadásra: egy x -el párhuzamos és egy y -al párhuzamos vektor összege "átlós" lesz.

- (c) Nem zárt az összeadásra: $x^n - x^n = 0$ ami nem n -ed fokú, pedig x^n az volt.

- (d) Vektortér lesz.

- (e) Vektortér lesz.

- (f) Nem lesz zárt a szorzásra: ha $f(5) \geq 0$ akkor $(-1) \cdot f(5) \leq 0$.

- (g) Vektortér lesz.

- (h) Nem vektortér, például mert az összeadásra nincs inverz.

21. A valós számhármassok terében vektorteret alkotnak-e azok az (x_1, x_2, x_3) vektorok, melyekre

- (a) $x_1 = 2x_2 - 3x_3$,
(b) $x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 2$.

Megoldás: (a) Igen.

- (b) Nem. Például: $(2, 0, 0) + (2, 0, 0) = (4, 0, 0) \neq (2, 0, 0)$.

22. Igazold, hogy bármely V vektortérben bármely $v \in V$ vektorra fennáll:

- (a) $\lambda \cdot v = \mathbf{o}$, akkor és csak akkor, ha $\lambda = 0$ vagy $v = \mathbf{o}$,
(b) $(-1) \cdot v = -v$.

Megoldás: (a) Először megmutatjuk, hogy $0 \cdot v = \mathbf{o}$. Legyen u a $0 \cdot v$ ellentettje (összeadásra vett inverze, azaz $u = -(0 \cdot v)$). Ekkor

$$\mathbf{o} = u + 0 \cdot v = u + (0 + 0) \cdot v = u + (0 \cdot v + 0 \cdot v) = (u + 0 \cdot v) + 0 \cdot v = \mathbf{o} + 0 \cdot v = \mathbf{o}.$$

Másodszor azt mutatjuk meg, hogy $\lambda \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$ minden λ skalárra. Legyen w a $\lambda \cdot \mathbf{o}$ ellentettje.

Ekkor

$$\mathbf{o} = w + \lambda \cdot \mathbf{o} = w + \lambda \cdot (\mathbf{o} + \mathbf{o}) = w + (\lambda \cdot \mathbf{o} + \lambda \cdot \mathbf{o}) = (w + \lambda \cdot \mathbf{o}) + \lambda \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o} + \lambda \cdot \mathbf{o} = \lambda \cdot \mathbf{o}.$$

Visszafele, tegyük fel, hogy $\lambda \cdot v = \mathbf{o}$. Azt kell igazolni, hogy ekkor $\lambda = 0$ vagy $v = \mathbf{o}$. Ha $\lambda = 0$, akkor készen vagyunk, ezért feltehetjük, hogy $\lambda \neq 0$. Ekkor λ -nak a testben van inverze, azaz van olyan μ skalár, amire $\mu\lambda = 1$ (ez a valósak között $\frac{1}{\lambda}$ lesz). Viszont akkor

$$v = 1 \cdot v = (\mu\lambda) \cdot v = \mu \cdot (\lambda \cdot v) = \mu \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}.$$

(b) Az előző pontot felhasználva:

$$(-1) \cdot v + v = (-1) \cdot v + 1 \cdot v = ((-1) + 1) \cdot v = 0 \cdot v = v.$$

- Bizonyítsd be, hogy
 - Minden vektorrendszer összefüggő, ami a $\bar{0}$ -t tartalmazza.
 - Minden vektorrendszer összefüggő, ami egy vektort kétszer tartalmaz.
 - A $\bar{0}$ függ minden vektorrendszertől.

- Kifejezhető-e a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ lineáris kombinációjaként?

- Keressünk altereket a valós függvények vektorterében.

- Tekintsük a következő vektorokat a három dimenziós valós térből:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Igaz-e, hogy:

- $d \in \langle a, b, c \rangle$;
 - a, b, c generátorrendszer;
 - a, b, c bázis;
 - b, c, d lineárisan független;
 - a, b, d generátorrendszer.
- Tegyük fel, hogy $a + b + c = 0$. Igazold, hogy ekkor $\langle a, b \rangle = \langle a, c \rangle$.
 - A négydimenziós térben tekintsük a következő vektorokat: $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$. Generálják-e a teret? Ha nem, egészítsd ki generátorrendszerré.
 - Ha a, b és c lineárisan függetlenek, akkor $a + b$, $a + c$, $b + c$ is azok?
 - Tegyük fel, hogy $\langle a, b \rangle = \langle c, d, e \rangle$. Lineárisan függetlenek-e az $\{a, c, e\}$ vektorok?
 - Keressük meg a három dimenziós valós tér

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x + 2y + z = 0 \right\}$$

alterének egy bázisát!

- Legyenek $a_1, \dots, a_k$ és $b_1, \dots, b_l$ külön-külön lineárisan függetlenek. Bizonyítsd be, hogy ha $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \cap \langle b_1, \dots, b_l \rangle = \{0\}$, akkor együtt is lineárisan függetlenek.

- Bizonyítsuk be, hogy egy 99 dimenziós vektortér két 50 dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme.

- Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_k$ egy vektortér lineárisan független vektorai és legyen $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$. Bizonyítsuk be, hogy $a_1 \in \langle x, a_2, \dots, a_k \rangle$ pontosan akkor teljesül, ha $\lambda_1 \neq 0$.

- A V vektortérbeli $v_1, \dots, v_n$ vektorokról tudjuk, hogy v_1 benne van a többi $n - 1$ vektor által generált altérben, de a $v_2, v_3, \dots, v_n$ vektorok közül semelyik sincs benne a többi $n - 1$ vektor által generált altérben. Bizonyítsd be, hogy ekkor $v_1 = 0$.

- A $v_1, \dots, v_n$ vektorokról tudjuk, hogy lineárisan függetlenek, de akárhogy hozzávéve egy vektort, már összefüggőek lennének. Igaz-e, hogy ekkor az adott n db vektor bázis?

- Legyenek $v_1, v_2, \dots, v_n$ egy V vektortér elemei. Vezessük be az $u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2$, $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$, $\dots$, $u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ vektorokat. Bizonyítsuk be, hogy az $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor a $v_1, \dots, v_n$ vektorok is lineárisan függetlenek.

- Igaz-e, hogy egy véges dimenziós vektortérnek csak véges sok altere van?

- A valós számok feletti V vektortérnek a bázisát alkotják a $b_1, \dots, b_n$ vektorok. Legyen $v_1 = \alpha b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, $v_2 = b_1 + \alpha b_2 + b_3 + \dots + b_n$, $\dots$, $v_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + \alpha b_n$. Az α paraméter milyen értékeire lesz $v_1, v_2, \dots, v_n$ szintén bázisa a V vektortérnek?

- Döntsük el, hogy az alábbi vektorok
 - lineárisan függetlenek
 - generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ben?

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}, \bar{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

- Tudjuk, hogy egy vektorrérben a $v_1, v_2, \dots, v_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $\langle v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{99} + v_{100}, v_{100} + v_1 \rangle$ altér?

- Hány dimenziós alteret generálnak a legfeljebb ötödfokú valós polinomok vektorterében a $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 1$, $q(x) = 2x^5 + 6x^3 + 4$ és az $r(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 1$ polinomok?

1. Bizonyítsd be, hogy

(a) Minden vektorrendszer összefüggő, ami a $\bar{0}$ -t tartalmazza.

(b) Minden vektorrendszer összefüggő, ami egy vektort kétszer tartalmaz.

(c) A $\bar{0}$ függ minden vektorrendszertől.

Megoldás: (a) $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n + 1 \cdot \bar{0} = \bar{0}$, de nem minden együttható nulla.

(b) $v - v = 0$, és itt sem minden együttható nulla.

(c) v függ $\{v_1, \dots, v_n\}$ -től, ha vannak α_i számok, amire $v = \sum \alpha_i v_i$.

$$0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n.$$

2. Kifejezhető-e a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ lineáris kombinációjaként?

Megoldás: Ezek a feladatok mindig egy lineáris egyenletrendszerhez vezetnek! Keressünk α, β számokat, amikre $(2, 1, 0) = \alpha \cdot (1, 1, 1) + \beta \cdot (1, 2, 3)$. A következő egyenletekhez jutunk:

$$2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1,$$

$$1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2,$$

$$0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 3.$$

Ezt megoldva az $\alpha = 3, \beta = -1$ jók lesznek. Az eredményt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a $(2, 1, 0)$ vektor benne van az $\langle (1, 1, 1), (1, 2, 3) \rangle$ generált altérben.

3. Keressünk altereket a valós függvények vektortérben.

Megoldás: Egy pár példa: legfeljebb n -ed fokú polinomok; összes polinom; azon függvények, amik egy adott halmazon nullát vesznek fel Ez máris végtelen sok különböző altér (egész pontosan $\beth_2$ darab).

4. Tekintsük a következő vektorokat a három dimenziós valós térből:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Igaz-e, hogy:

(a) $d \in \langle a, b, c \rangle$;

(b) a, b, c generátorrendszer;

(c) a, b, c bázis;

(d) b, c, d lineárisan független;

(e) a, b, d generátorrendszer.

Megoldás: (a) $d \in \langle a, b, c \rangle$ pontosan akkor, ha vannak α, β, γ számok, hogy

$$d = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c.$$

Ez egy egyenletrendszerhez vezet az α, β, γ ismeretlenekben:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 = 2$$

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 = 3$$

$$\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 1 = -1$$

Ennek van megoldása: $\alpha = 3, \beta = -1, \gamma = 0$.

(b) $\{a, b, c\}$ generátorrendszer, ha bármely vektor kifejezhető valamilyen lineáris kombinációjukkal.

MEGOLDÁS I: Veszek egy tetszőleges (x, y, z) vektort, és megpróbálom kifejezni az a, b és c segítségével. Ez megint egy egyenletrendszer három ismeretlennel és három paraméterrel (a paraméterek az x, y és z ; az ismeretlenek, mint fent, az α, β és γ). Megoldom az egyenletrendszert, és ha azt kapom, hogy a paraméterek tetszőleges választása mellett van megoldás, akkor az azt jelenti, hogy bármely vektor előáll lineáris kombinációként, azaz generátorrendszer.

MEGOLDÁS II: Veszem a kedvenc generátorrendszeremet, ami az $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ és $e_3 = (0, 0, 1)$ vektorokból áll. Ha ezt a három vektort ki tudom fejezni a, b és c segítségével, akkor minden más vektort is, hiszen lineáris kombinációk lineáris kombinációja maga is egy lineáris kombináció. Kicsit precízebben: ha

$$e_1 = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c$$

$$e_2 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c$$

$$e_3 = \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c$$

és $v = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, akkor

$$v = \alpha(\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c) + \beta(\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c) + \gamma(\alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c)$$

ami tovább egyenlő

$$v = (\alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2 + \gamma\alpha_3)a + (\alpha\beta_1 + \beta\beta_2 + \gamma\beta_3)b + (\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2 + \gamma\gamma_3)c,$$

ami tehát az a, b és c egy lineáris kombinációja. Az, hogy az e_1, e_2 és e_3 kifejezhető-e, pont úgy megy, mint az (a) részben.

MEGOLDÁS III: A legegyszerű megoldás viszont az, hogy ha leellenőrizzük, hogy lineárisan független-e $\{a, b, c\}$. Hiszen a tér dimenziója 3, és akkor három darab lineárisan független vektor biztosan bázis lesz. Azt kell tehát megmutatni, hogy ha

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c = 0,$$

akkor szükségképpen $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ez megint egy egyenletrendszerhez vezet:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 = 0$$

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 = 0$$

$$\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 1 = 0.$$

Ha ennek **egyértelmű** a megoldása, akkor az csak az $\alpha = \beta = \gamma = 0$ lehet (hisz az megoldás). Tehát a lineáris függetlenség ellenőrzéséhez az egyértelmű megoldhatóságot kell leellenőrizni.

(c) Bázis lesz, ha generátorrendszer, és lineárisan függetlenek. A (b) részben már mindegyik kérdést megválasztuk.

(d), (e) A (b) rész harmadik típusú megoldásának módszerével.

5. Tegyük fel, hogy $a + b + c = 0$. Igazold, hogy ekkor $\langle a, b \rangle = \langle a, c \rangle$.

Megoldás: Elég az, hogy $c \in \langle a, b \rangle$ és $b \in \langle a, c \rangle$. Az első esetben ez azt jelentené, hogy vannak α, β számok, amire $\alpha a + \beta b = c$. Mivel tudjuk, hogy $a + b + c = 0$, ezt átrendezve kapjuk, hogy az $\alpha = \beta = -1$ megfelel. A másik eset hasonlóan.

6. A négydimenziós térben tekintsük a következő vektorokat: $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$. Generálják-e a teret? Ha nem, egészítsd ki generátorrendszerré.

Megoldás: Nem generálhatják, mert csak hárman vannak, de a tér négy dimenziós. A következő vektorok állnak elő: $\alpha(1, 0, 1, 0) + \beta(0, 1, 0, 1) + \gamma(1, 0, 0, 1) = (\alpha + \gamma, \beta, \alpha, \beta + \gamma)$. Itt a második és harmadik koordinátát "közvetlenül" beállíthatjuk, utána γ -val korrigálhatjuk mondjuk az első koordinátát. Ezért kell meg egy "változó" a negyedik koordinátához. Tehát mondjuk a $(0, 0, 0, 1)$ vektort hozzávéve már generátorrendszert kapunk. (Hasonlóan az $(1, 0, 0, 0)$ vektorral is).

7. Ha a, b és c lineárisan függetlenek, akkor $a + b$, $a + c$, $b + c$ is azok?

Megoldás: Ha $\alpha(a + b) + \beta(a + c) + \gamma(b + c) = 0$, akkor átrendezve $(\alpha + \beta)a + (\alpha + \gamma)b + (\beta + \gamma)c = 0$, de a, b, c lineárisan függetlenek, tehát ez csak úgy lehet, hogy

$$\alpha + \beta = 0,$$

$$\alpha + \gamma = 0,$$

$$\beta + \gamma = 0,$$

amit megoldva kapjuk, hogy $\alpha = \beta = \gamma = 0$, azaz tényleg lineárisan függetlenek.

8. Tegyük fel, hogy $\langle a, b \rangle = \langle c, d, e \rangle$. Lineárisan függetlenek-e az $\{a, c, e\}$ vektorok?

Megoldás: Nem feltétlenül: $\langle v, 2v \rangle = \langle v, 2v, 3v \rangle$, de $\{v, 3v\}$ nem lineárisan független.

9. Keressük meg a három dimenziós valós tér

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x + 2y + z = 0 \right\}$$

alterének egy bázisát!

Megoldás: Jól látszik a H -t definiáló egyenletből, hogy H egy origón átmenő sík. Ezért ez egy két dimenziós alter: $\dim(H) = 2$. Ebben bázis lesz két tetszőleges, lineárisan független vektor. Egy síkban két vektor akkor független, ha nem párhuzamosak. Vagyis a feladat megtalálni két olyan elemét H -nak, amik nem egymás többszörösei. Jó lesz mondjuk az $(1, -1, -1)$ és $(1, 1, -5)$ pár.

10. Legyenek $a_1, \dots, a_k$ és $b_1, \dots, b_l$ külön-külön lineárisan függetlenek. Bizonyítsd be, hogy ha $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \cap \langle b_1, \dots, b_l \rangle = \{0\}$, akkor együtt is lineárisan függetlenek.

Megoldás: Tegyük fel, hogy $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_l b_l = 0$. Ezt átrendezve $\sum \alpha_i a_i = -\sum \beta_i b_i$, de mivel a két alter metszete csak a 0 vektor, ezért $\sum \alpha_i a_i = 0 = -\sum \beta_i b_i$. De ez a függetlenség miatt csak úgy lehet, hogy $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$ minden i indexre.

11. Bizonyítsuk be, hogy egy 99 dimenziós vektortér két 50 dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme.

Megoldás: Legyen V a szóban forgó vektortér és H_1, H_2 a két 50 dimenziós alter. Mivel a dimenziójuk 50, ez azt jelenti, hogy van bennük 50 elemű bázis, legyenek ezek:

$$H_1 = \langle v_1, \dots, v_{50} \rangle$$

$$H_2 = \langle w_1, \dots, w_{50} \rangle$$

Speciálisan $\{v_1, \dots, v_{50}\}$ és $\{w_1, \dots, w_{50}\}$ külön-külön lineárisan függetlenek is. Ha $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ lenne, akkor az előző feladat szerint $\{v_1, \dots, v_{50}, w_1, \dots, w_{50}\}$ is lineárisan független lenne. Ez viszont azt jelentené, hogy $\dim(V) \geq 100$, ami ellentmondás.

- 12.** Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_k$ egy vektortér lineárisan független vektorai és legyen $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$. Bizonyítsuk be, hogy $a_1 \in \langle x, a_2, \dots, a_k \rangle$ pontosan akkor teljesül, ha $\lambda_1 \neq 0$.

Megoldás: Ha $a_1 \in \langle x, a_2, \dots, a_k \rangle$, akkor valamilyen ξ és λ_i számokra

$$a_1 = \xi \cdot x + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n.$$

Ezt átrendezve

$$x = \frac{-1}{-\xi} a_1 + \frac{\lambda_2}{-\xi} a_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{-\xi} a_n.$$

Az kell, hogy $\frac{1}{-\xi} \neq 0$, vagyis, hogy $\xi \neq 0$. De ha nulla lenne, akkor eredetileg az a_1 -et kifejeztük volna csupán az $\{a_2, \dots, a_n\}$ egy lineáris kombinációjával. Ez viszont nem lehetséges, mert a feltétel szerint $\{a_1, \dots, a_n\}$ lineárisan független.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ és $\lambda_1 \neq 0$. Ekkor

$$a_1 = \frac{-1}{-\lambda_1} x + \frac{\lambda_2}{-\lambda_1} a_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_1} a_n,$$

ami mutatja, hogy $a_1 \in \langle x, a_2, \dots, a_n \rangle$.

- 13.** A V vektortérbeli $v_1, \dots, v_n$ vektorokról tudjuk, hogy v_1 benne van a többi $n-1$ vektor által generált altérben, de a $v_2, v_3, \dots, v_n$ vektorok közül semelyik sincs benne a többi $n-1$ vektor által generált altérben. Bizonyítsd be, hogy ekkor $v_1 = 0$.

Megoldás: Tegyük fel, hogy $v_1 \neq 0$. Ekkor a feltételek szerint előáll mint egy nem csupa-nulla lineáris kombináció: $v_1 = a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$. Valamelyik szorzó nem nulla: mondjuk $a_2 \neq 0$. Ekkor átrendezve kapjuk, hogy $v_2 = \frac{1}{a_2} v_1 - \frac{a_3}{a_2} v_3 - \dots - \frac{a_n}{a_2} v_n$, ami ellenmond annak, hogy v_2 nincs benne a többi $n-1$ vektor által generált altérben. (Az $a_2 \neq 0$ azért kellett, hogy tudjunk vele osztani).

- 14.** A $v_1, \dots, v_n$ vektorokról tudjuk, hogy lineárisan függetlenek, de akárhogy hozzávéve egy vektort, már összefüggőek lennének. Igaz-e, hogy ekkor az adott n db vektor bázis?

Megoldás: Bázis = lineárisan független generátorrendszer. Itt a lineáris függetlenség már meg van, elég megnézni, hogy generálják-e az egész teret. Legyen x tetszőleges előállítandó vektor. Ekkor $v_1, \dots, v_n, x$ összefüggő a feltevés miatt, így valamilyen nem csupa-nulla számokkal $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \xi x = 0$. ξ nem lehet 0, mert v_i -k lineárisan függetlenek (és akkor α_i -k is nullák lennének és egy csupa nulla lineáris kombinációt kapnánk). Átrendezve, és leosztva ξ -vel kapjuk az előállítást: $x = -\frac{\alpha_1}{\xi} v_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\xi} v_n$. Vegyük észre, hogy a feladat fordítva biztosan igaz: egy bázisra igazak a feltételek.

- 15.** Legyenek $v_1, v_2, \dots, v_n$ egy V vektortér elemei. Vezessük be az $u_1 = v_1, u_2 = v_1 + v_2, u_3 = v_1 + v_2 + v_3, \dots, u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ vektorokat. Bizonyítsuk be, hogy ha az $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor a $v_1, \dots, v_n$ vektorok is lineárisan függetlenek.

Megoldás: A feltétel szerint akárhogy is fejezzük ki a 0 vektort az u_i -k egy lineáris kombinációjával, az csak úgy lehet, hogy minden együttható nulla. Azt kell igazolni, hogy ugyan ez a v_i -kre is igaz, vagyis, ha

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0,$$

akkor ebből következik, hogy $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Az ötlet az, hogy a v_i -k egy lineáris kombinációjából elkészítjük az u_i -k egy kombinációját. Az u_i -k függetlenségét kihasználva megmutatjuk, hogy az átalakítással nyert együtthatók nullák, és aztán ebből bizonyítjuk, hogy az átalakítás előtt is nulláknak kellett lenniük. Nézzük: Tegyük fel, hogy

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

Figyelembe véve az u_i vektorok definícióját, ez ugyan az, mintha azt írtam volna, hogy

$$(\alpha_1 u_1) + (\alpha_2 u_2 - \alpha_2 u_1) + (\alpha_3 u_3 - \alpha_3 u_2) + \dots + (\alpha_n u_n - \alpha_n u_{n-1}) = 0.$$

Ezt tovább alakítva kapjuk

$$(\alpha_1 - \alpha_2) u_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) u_2 + (\alpha_3 - \alpha_4) u_3 \dots + \alpha_n u_n = 0.$$

Most kihasználva, hogy $\{u_1, \dots, u_n\}$ független, azt kapjuk, hogy a fenti előállítás csak úgy lehetséges, ha az együtthatók nullák, azaz, ha

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_n &= 0 \end{aligned}$$

Ebből viszont könnyen adódik, hogy minden i -re $\alpha_i = 0$, és ez az, amit bizonyítani akartunk.

- 16.** Igaz-e, hogy egy véges dimenziós vektortérnek csak véges sok altere van?

Megoldás: Nem igaz. Például a két dimenziós síknak alterei az origón átmenő egyenesek, és nyilván végtelen sok különböző origón átmenő egyenes van.

17. A valós számok feletti V vektortérnek a bázisát alkotják a $b_1, \dots, b_n$ vektorok.

Legyen $v_1 = \alpha b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, $v_2 = b_1 + \alpha b_2 + b_3 + \dots + b_n$, $\dots$, $v_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + \alpha b_n$. Az α paraméter milyen értékeire lesz $v_1, v_2, \dots, v_n$ szintén bázisa a V vektortérnek?

Megoldás: α értékét úgy kell megválasztani, hogy $\{v_1, \dots, v_n\}$ lineárisan független és generátorrendszer legyen. V dimenziója n , mert van benne n elemű bázis, ezért elég azt leellenőrizni, hogy $v_1, \dots, v_n$ lineárisan független, és összesen n darab vektor, vagyis $v_i \neq v_j$, ha $i \neq j$.

Ha $n = 1$, akkor $\alpha \neq 0$ esetén bázist kapunk.

Ha $n > 1$, akkor az $\alpha = 1$ eset nem lesz jó, hiszen ekkor $v_i = v_j$ azonosak. Tegyük fel, hogy $n > 1$ és $\alpha \neq 1$ és

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Ekkor v_i definíciója szerint

$$\lambda_1(\alpha b_1 + \dots + b_n) + \lambda_2(b_1 + \alpha b_2 + \dots + b_n) + \dots + \lambda_n(b_1 + \dots + \alpha b_n) = 0,$$

amit átrendezve kapjuk, hogy

$$(\lambda_1 \alpha + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) b_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 \alpha + \lambda_3 + \dots + \lambda_n) b_2 + \dots + (\lambda_1 + \dots + \alpha \lambda_n) b_n = 0.$$

Most kihasználva a b_i vektorok függetlenségét és bevezetve a $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ jelölést, a következő egyenletekhez jutunk:

$$\Lambda + (\alpha - 1)\lambda_1 = 0$$

$$\Lambda + (\alpha - 1)\lambda_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\Lambda + (\alpha - 1)\lambda_n = 0$$

Ha az i -ik és j -ik sort kivonjuk egymásból, akkor az

$$(\alpha - 1)(\lambda_i - \lambda_j) = 0$$

összefüggést nyerjük. Mivel $\alpha \neq 1$, ezért $\lambda_i = \lambda_j$ bármely $i \neq j$ -re, vagyis eddig azt kaptuk, hogy ha a v_i -k egy lineáris kombinációjával kifejezzük a nullvektort, akkor az csak úgy lehet, hogy minden együttható azonos. Tehát az eredeti előállítás így néz ki ($\lambda = \lambda_i$ jelölés mellett):

$$\lambda v_1 + \dots + \lambda v_n = 0,$$

vagyis

$$\lambda(v_1 + \dots + v_n) = 0.$$

Ez csak kétféleképpen lehetséges: $\lambda = 0$ vagy $(v_1 + \dots + v_n) = 0$. Az első esetben készen lennénk, hisz ez azt jelentené, hogy $v_1, \dots, v_n$ lineárisan függetlenek. Ezért a második esetet kell kizárnunk. Ha

$$v_1 + \dots + v_n = 0,$$

akkor

$$(\alpha + n - 1)b_1 + \dots + (\alpha + n - 1)b_n = 0,$$

amiből, kihasználva a b_i -k függetlenségét, az $\alpha + n - 1 = 0$ összefüggést kapjuk. Vagyis $\alpha = 1 - n$ esetén előfordulhat, hogy $\lambda \neq 0$, de mégis a lineáris kombináció a nullvektort adja. Ezt az esetet kell tehát kizárnunk. És persze az $\alpha = 1$ esetet is.

18. Döntsük el, hogy az alábbi vektorok

(a) lineárisan függetlenek

(b) generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ben?

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}, \bar{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

19. Tudjuk, hogy egy vektorrérben a $v_1, v_2, \dots, v_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $\langle v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{99} + v_{100}, v_{100} + v_1 \rangle$ altér?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{99} + v_{100}, v_{100} + v_1\}$ lineárisan függetlenek. Ebből következik, hogy az altér száz dimenziós, hiszen száz darab független vektor generálja. Mellesleg ekkor azt is tudjuk, hogy a kérdéses altér megegyezik az eredeti vektortérrel. Tegyük fel tehát, hogy

$$\lambda_1(v_1 + v_2) + \lambda_2(v_2 + v_3) + \dots + \lambda_{100}(v_{100} + v_1) = 0.$$

Ezt átrendezve azt kapjuk, hogy

$$(\lambda_1 + \lambda_{100})v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)v_2 + \dots + (\lambda_{99} + \lambda_{100})v_{100} = 0.$$

Mivel $v_1, \dots, v_{100}$ bázist alkotnak, ezért lineárisan függetlenek is, tehát az

együtthatók nullák:

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{100} + \lambda_1 &= 0\end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek a $\lambda_i = 0$ az egyértelmű megoldása. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{99} + v_{100}, v_{100} + v_1\}$$

tényleg lineárisan függetlenek.

- 20.** Hány dimenziós alteret generálnak a legfeljebb ötödfokú valós polinomok vektortérében a $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 1$, $q(x) = 2x^5 + 6x^3 + 4$ és az $r(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 1$ polinomok?

Megoldás: Hogy jobban át lehessen látni a vektorokat, az általános $a_5x^5 + a_4x^4 + \dots + a_1x + a_0$ polinomot azonosítjuk az $(a_5, a_4, \dots, a_0)$ hat hosszú vektorral. A kérdés tehát ezen az új nyelven az, hogy mi a dimenziója az

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ -9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorok által feszített térnek. Mivel három vektorról van szó, a szóban forgó dimenzió legfeljebb három lehet, és ha kiderülne, hogy a vektoraink lineárisan függetlenek, akkor a dimenzió három is lenne. Az, hogy függetlenek-e, mint mindig, egy egyenletrendszer egyértelmű megoldhatóságának kérdésére vezet. Jelen esetben erre az egyenletrendszerre:

$$\begin{aligned}0 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z &= 0 \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y + -3 \cdot z &= 0 \\ 2 \cdot x + 6 \cdot y + -3 \cdot z &= 0 \\ 3 \cdot x + 0 \cdot y + -9 \cdot z &= 0 \\ 1 \cdot x + 4 \cdot y + 1 \cdot z &= 0.\end{aligned}$$

Ennek tényleg csak az $x = y = z = 0$ a megoldása. (Vigyázat: ha csak az első négyet néznénk, akkor azoknak még végtelen sok megoldása lenne).

1. Legyen V a legfeljebb 5-ödfokú (egyváltozós, valós együtthatós) polinomok vektortere.

(a) Lineárisan független-e a következő vektorrendszer: $\{1, x^2, x^4\}$?

(b) Mutass V -ben generátorrendszert.

(c) Add meg egy bázisát. Hány dimenziós?

(d) Függetlenek-e a következő vektorok: $x^3 + x^2 + 1$, $x^5 + 3x^2$, $4x^2 + 3x + 1$?

2. Gauss-eliminációval oldjuk meg ezeket:

$$\begin{array}{lll} -x + 3y + 3z = 2 & 2x + 3y + z = 11 & 2x + 3y + z = 11 \\ \text{(a)} \quad 3x + y + z = 4 & \text{(b)} \quad x - y - 2z = -7 & \text{(c)} \quad x - y - 2z = -7 \\ 2x - 2y + 3z = 10 & 3x + 2y - z = 2 & 3x + 2y - z = 4 \end{array}$$

3. Gauss-eliminációval oldd meg ezeket is:

$$\begin{array}{lll} 2x + 4y + 6z = 8 & 3x + 7y + 11z = 19 & 3x + 4y + 7z = 5 \\ \text{(a)} \quad x + 2y + 5z = 1 & \text{(b)} \quad 2x + 4y + 8z = 14 & \text{(c)} \quad 15x + 23y + 37z = 31 \\ x + 4y + 7z = 2 & x + 2y + 3z = 4 & -3x + 5y + 4z = 13 \\ 4x - 5y + 2z = 5 & & \end{array}$$

4. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert a t paraméter függvényében.

$$\begin{array}{rcl} -3x - y + tz & = & 3 \\ x + 3y - z & = & 2 \\ 2x - 2y + 6z & = & 12 \end{array}$$

5. Határozd meg az a és b paraméterek függvényében az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 & = & 9 \\ 3x_1 + 6x_2 + ax_3 & = & b \end{array}$$

6. A t valós paraméter függvényében az alábbi három síknak hány metszéspontja van?

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 4 \\ 2x + y + 8z & = & 5 \\ 5x + y + tz & = & 11 \end{array}$$

7. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 2x_5 & = & 28 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = & 16 \end{array}$$

8. Tekintsünk egy egész együtthatós lineáris egyenletrendszert (az egyenletekben a változók együtthatói és a jobb oldalon álló számok is egészek). Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) Ha van megoldás a racionális számok körében, akkor van az egész számok körében is.

(b) Ha van megoldás a valós számok körében, akkor van a racionális számok körében is.

9. Adjunk példát olyan 3 ismeretlenes és 5 egyenletből álló egyenletrendszerre, melynek

(a) nincs megoldása;

(b) egyértelmű megoldása van;

(c) végtelen sok megoldása van.

Oldjuk meg a feladatot 5 ismeretlenes 3 egyenletből álló egyenletrendszerre is.

10. Lineárisan függetlenek-e az alábbi $\mathbb{R}^4$ -beli vektorrendszerek?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} & \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} & \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33 \\ \sqrt{2} \\ 5 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -51 \\ \pi \\ \sqrt[3]{19} \\ 44 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

11. Adjuk meg p és q értékét úgy, hogy az alábbi síkok

(a) egy egyenesre illeszkedjenek;

(b) ne legyen közös pontjuk.

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y - z & = & 6 \\ x - 3y + 2z & = & 5 \\ 4x - 3y + pz & = & q \end{array}$$

(c) Milyen eset van még?

12. Generátorrendszert alkotnak-e az $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 0, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 1)$ és $(1, 2, 3, 4)$ vektorok? Ha igen, válasszunk ki egy bázist belőle.

13. Oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő lineáris egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{ll} x + 2y - z - u + v = -1 & x + y + 2z - u + 3v = 0 \\ x + 2y - z + v = 1 & x + 2y + z + 3u - 2v = 0 \\ \text{(a)} \quad -x - y + z + 3u - 2v = 2 & \text{(b)} \quad 3x + 3y - z + 2u + v = 0 \\ 2x + 2y - 2z - 5u + 4v = -2 & -x + y + 2z + 3u - 2v = 0 \\ 3x + 7y - 3z + u + 2v = 2 & 2x - y + 3z - 2u + v = 0 \end{array}$$

1. Legyen V a legfeljebb 5-ödfokú (egyváltozós, valós együtthatós) polinomok vektortere.

(a) Lineárisan független-e a következő vektorrendszer: $\{1, x^2, x^4\}$?

(b) Mutass V -ben generátorrendszert.

(c) Add meg egy bázisát. Hány dimenziós?

(d) Függetlenek-e a következő vektorok: $x^3 + x^2 + 1$, $x^5 + 3x^2$, $4x^2 + 3x + 1$?

Megoldás: (a) Két polinom akkor egyezik meg (a polinomok terében), ha minden együtthatójuk megegyezik. Tehát a vektortér nulleleme egy olyan polinom, aminek minden együtthatója 0. Ha most $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x^2 = 0$, akkor ez csak úgy lehet, hogy $\alpha = \beta = 0$, ami pont a lineáris függetlenség feltétele.

(b) A legegyszerűbb megoldás az, hogy az összes vektor generálja a teret. Ennél picit elegánsabb, a következő: $\{1, x, x^2, \dots, x^5\}$. Minden legfeljebb ötödfokú polinom előáll ezek lineáris kombinációjaként: a megfelelő együtthatók a kombinációban éppen a polinom együtthatói lesznek.

(c) Az (a) ponthoz hasonlóan látszik, hogy a (b)-ben megadott generátorrendszer lineárisan független, és akkor (mivel generál) bázis is. Tehát a dimenzió: $5 + 1 = 6$.

(d) Számolgatás nélkül is meg lehet oldani a feladatot: harmadfokú tag csak az első polinomban van, ezért az nem fejezhető ki a másik kettő segítségével. Hasonlóan, a második polinom sem fejezhető ki a többivel, mert ötödfokú tag csak benne szerepel. Elsőfokú tag pedig csak az utolsóban van.

2. Gauss-eliminációval oldjuk meg ezeket:

$$-x + 3y + 3z = 2$$

$$2x + 3y + z = 11$$

$$2x + 3y + z = 11$$

$$(a) \quad 3x + y + z = 4$$

$$(b) \quad x - y - 2z = -7$$

$$(c) \quad x - y - 2z = -7$$

$$2x - 2y + 3z = 10$$

$$3x + 2y - z = 2$$

$$3x + 2y - z = 4$$

Megoldás: (a)

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & | & 2 \\ 3 & 1 & 1 & | & 4 \\ 2 & -2 & 3 & | & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & | & -2 \\ 0 & 10 & 10 & | & 10 \\ 0 & 4 & 9 & | & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & | & -2 \\ & 1 & 1 & | & 1 \\ & & 5 & | & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & | & -2 \\ & 1 & 1 & | & 1 \\ & & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & | & -2 \\ & 1 & 1 & | & 1 \\ & & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Ebből a megoldás: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 11 \\ 1 & -1 & -2 & | & -7 \\ 3 & 2 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & | & 25 \\ 1 & -1 & -2 & | & -7 \\ 0 & 5 & 5 & | & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 1 & -1 & -2 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Ennek nincsen megoldása, amint azt az utolsó sor mutatja.

(c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 11 \\ 1 & -1 & -2 & | & -7 \\ 3 & 2 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & | & 25 \\ 1 & -1 & -2 & | & -7 \\ 0 & 5 & 5 & | & 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 1 & -1 & -2 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Mivel a z változónak megfelelő oszlopban nincsen vezéregyes, ezért az szabad változó lesz. A megoldás tehát: $x = -2 + z$ és $y = 5 - z$, z tetszőleges. (Geometriaival szemléltetve: két sík metszete egy egyenes, így végtelen sok megoldás van).

3. Gauss-eliminációval oldd meg ezeket is:

$$2x + 4y + 6z = 8$$

$$3x + 7y + 11z = 19$$

$$3x + 4y + 7z = 5$$

$$(a) \quad x + 2y + 5z = 1$$

$$(b) \quad 2x + 4y + 8z = 14$$

$$(c) \quad 15x + 23y + 37z = 31$$

$$x + 4y + 7z = 2$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$-3x + 5y + 4z = 13$$

$$4x - 5y + 2z = 5$$

Megoldás: (a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 8 \\ 1 & 2 & 5 & | & 1 \\ 1 & 4 & 7 & | & 2 \\ 4 & -5 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 2 & | & -3 \\ 0 & 2 & 4 & | & -2 \\ 0 & -13 & -10 & | & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ & 2 & 2 & | & -3 \\ & 1 & 2 & | & -1 \\ & -13 & -10 & | & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 6 \\ & 2 & -3 & | & -3 \\ & 1 & 2 & | & -1 \\ & 16 & -24 & | & -24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 6 \\ & 1 & 2 & | & -1 \\ & 2 & -3 & | & -3 \\ & 2 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 6 \\ & 1 & 2 & | & -1 \\ & 2 & -3 & | & -3 \\ & 2 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 9/2 \\ & 1 & 0 & | & -4 \\ & 2 & -3 & | & -3 \end{pmatrix}$$

Ugyan négy egyenlet jutott három ismeretlenre, de volt kettő, ami ugyan azt a feltételt szabta.

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 & | & 19 \\ 2 & 4 & 8 & | & 14 \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 & | & 19 \\ 1 & 2 & 4 & | & 7 \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ & 1 & 2 & | & 3 \\ & 1 & 1 & | & -7 \end{pmatrix}$$

(c) Elimináció után azt kapjuk, hogy az egyenletrendszernek az $x = -1$, $y = 2$ és $z = 0$ az egyértelmű megoldása.

4. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert a t paraméter függvényében.

$$-3x - y + tz = 3$$

$$x + 3y - z = 2$$

$$2x - 2y + 6z = 12$$

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & t & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & t & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & t-3 & 9 \\ \boxed{1} & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & t-3 & 9 & \\ \boxed{1} & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} & & \boxed{t+5} & 17 \\ \boxed{1} & & & \\ & \boxed{1} & & -1 \end{array}\right)$$

Ha $t+5=0$, akkor nincsen megoldás, különben a táblázatból kiolvasható (lehet $t+5$ -el osztani...).

5. Határozd meg az a és b paraméterek függvényében az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 9$$

$$3x_1 + 6x_2 + ax_3 = b$$

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 1 & 1 \\ & a-9 & b-12 & \end{array}\right)$$

Innentől több lehetőség van. Ha $a-9 \neq 0$, akkor $x_3 = \frac{b-12}{a-9}$, és a többi változó értéke is meghatározható egyértelműen, tehát ilyenkor egyértelmű a megoldás. Ha $a-9=0$, akkor két lehetőség van. Az egyik, hogy $b-12=0$, ami azt jelenti, hogy x_3 szabad változó lesz, és végtelen sok megoldást kapunk. A másik lehetőség, hogy $b-12 \neq 0$, amikor is nincsen megoldás.

6. A t valós paraméter függvényében az alábbi három síknak hány metszéspontja van?

$$x + 2y + z = 4$$

$$2x + y + 8z = 5$$

$$5x + y + tz = 11$$

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & t & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 4 \\ & -3 & 6 & -3 \\ & -9 & t-5 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 4 \\ & \boxed{1} & -2 & 1 \\ & 1 & \frac{t-5}{-9} & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 4 \\ & \boxed{1} & -2 & 1 \\ & 0 & \star & 0 \end{array}\right)$$

Ahol $\star = \frac{t-5}{-9} - 2$. Ha ez nulla, akkor végtelen sok metszéspont van.

7. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok körében.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 14$$

$$2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 28$$

$$x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 16$$

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 14 \\ 2 & 6 & 10 & 6 & 2 & 28 \\ 1 & 5 & 9 & 2 & 3 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 14 \\ 1 & 3 & 5 & 3 & 1 & 14 \\ 1 & 5 & 9 & 2 & 3 & 16 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 0 & 14 \\ & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 2 \\ & & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 2 \\ & & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Ahol nincs vezéregyes azok szabad változók lesznek. A megoldás innen már kiolvasható: $x_4 = 2$, $x_2 = 2 - x_5 - 2x_3$, $x_1 = 2 + x_3 + 2x_5$, x_3, x_5 tetszőleges.

8. Tekintsünk egy egész együtthatós lineáris egyenletrendszert (az egyenletekben a változók együtthatói és a jobb oldalon álló számok is egészek). Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) Ha van megoldás a racionális számok körében, akkor van az egész számok körében is.

(b) Ha van megoldás a valós számok körében, akkor van a racionális számok körében is.

Megoldás: (a) Ez nem igaz. Könnyű olyan egyenletrendszert felírni, aminek egyetlen megoldása van, ami nem egész. Ilyet például a következőképpen lehet találni: ha két változónk van, akkor egy egyenlet lényegében egy egyenesnek felel meg. Válasszunk ki egy olyan pontot a síkon, aminek mindkét koordinátája racionális, és vegyünk két egyenest, amik ebben a pontban metszik egymást. A megfelelő egyenletrendszer jó lesz.

(b) Ez igaz. A Gauss-elimináció lépései során csak a négy alapművelet fordulhat elő, ezért ha racionális számokból (spec. egészekből) indultunk, akkor a végeredmény is racionális lesz (ill. lehet, hogy ha több megoldás is van).

9. Adjunk példát olyan 3 ismeretlenes és 5 egyenletből álló egyenletrendszerre, melynek

(a) nincs megoldása;

(b) egyértelmű megoldása van;

(c) végtelen sok megoldása van.

Oldjuk meg a feladatot 5 ismeretlenes 3 egyenletből álló egyenletrendszerre is.

Megoldás: Egy háromismeretlenes lineáris egyenlet egy síkot határoz meg a térben.

A feladat tehát az, hogy adjunk meg úgy síkokat a térben, hogy **(a)** ne legyen közös metszéspontjuk, **(b)** pontosan egy pontban messék egymást, **(c)** végtelen sok pontban messék egymást. Ilyeneket nyilván lehet találni. Például ezek jók lesznek:

$$\begin{array}{lll}
 x + y + z = 1 & x = 0 & x + y + z = 1 \\
 x + y + z = 2 & y = 0 & x + y + z = 1 \\
 \text{(a)} \quad x + y + z = 3 & \text{(b)} \quad z = 0 & \text{(c)} \quad x + y + z = 1 \\
 x + y + z = 4 & z = 0 & x + y + z = 1 \\
 x + y + z = 5 & z = 0 & x + y + z = 1
 \end{array}$$

Hasonlóan, az 5 ismeretlenes 3 egyenletből álló egyenletrendszerre:

$$\begin{array}{lll}
 x + y + z + u + v = 1 & & x + y + z + u + v = 1 \\
 \text{(a)} \quad x + y + z + u + v = 2 & \text{(b)} \quad \star & \text{(c)} \quad x + y + z + u + v = 1 \\
 x + y + z + u + v = 3 & & x + y + z + u + v = 1
 \end{array}$$

$\star$: a **(b)**-ben kért egyenletrendszer nem létezik: mivel öt oszlop van és három sor, ezért két oszlopban biztos nem lesz vezéregyes. Így marad két szabad változó, ezért végtelen sok megoldás van.

10. Lineárisan függetlenek-e az alábbi $\mathbb{R}^4$ -beli vektorrendszerek?

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} & \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} & \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33 \\ \sqrt{2} \\ 5 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -51 \\ \pi \\ \sqrt[3]{19} \\ 44 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Megoldás: Az általános módszer a következő: akkor lineárisan függetlenek a vektorok, ha egy lineáris kombináció csak úgy tud nulla lenni, hogy minden együttható nulla. Ez mindig egy egyenletrendszerre vezet, ahol a bal oldalon a vektorok koordinátáinak megfelelő lineáris kombináció van, a jobb oldalon pedig nulla. Egy ilyen egyenletnek a csupa nulla együtthatók mindig megoldása, ezért azt kell ellenőrizni, hogy egyértelmű-e a megoldás. Ha igen, akkor lineárisan függetlenek, ha nem, akkor nem azok. Ezt Gauss-eliminációval csináljuk.

(a) Itt az egyenlet így fog alakulni:

$$\begin{array}{rcl}
 x + 3y + 2z & = & 0 \\
 3x + 5y + 10z & = & 0 \\
 3x + 2y + 13z & = & 0 \\
 6x + 13y + 17z & = & 0
 \end{array}$$

Ennek végtelen sok megoldása van (egy szabad paraméter lesz): $x = -5z$, $y = z$, z tetszőleges. A vektorok tehát nem függetlenek.

(b)

$$\begin{array}{rcl}
 1x + 1y + 1z + 1w & = & 0 \\
 3x + 4y + 4z + 4w & = & 0 \\
 2x + 3y + 5z + 5w & = & 0 \\
 1x + 2y + 4z + 5w & = & 0
 \end{array}$$

Ennek egyértelmű a megoldása, ezért a vektorok lineárisan függetlenek.

(c) Az utolsó két vektor megegyezik, ezért nem lehetnek függetlenek.

(d) Négy dimenziós térben öt vektor nem lehet független.

11. Adjuk meg p és q értékét úgy, hogy az alábbi síkok

- (a)** egy egyenesre illeszkedjenek;
(b) ne legyen közös pontjuk.

$$\begin{array}{rcl}
 2x + 3y - z & = & 6 \\
 x - 3y + 2z & = & 5 \\
 4x - 3y + pz & = & q
 \end{array}$$

(c) Milyen eset van még?

Megoldás: Mivel a normálvektorok nem párhuzamosak, ezért, ha végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek, akkor az csak úgy lehet, hogy egy közös egyenesben metszik egymást. Ha nulla megoldása van az egyenletrendszernek, akkor pedig nincsen közös pontjuk. Harmadik, elvi lehetőség, hogy egy pontban metszik egymást. Gauss elimináció után ezt kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & -3 & p & q \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 2 & 5 \\ & 9 & -5 & -4 \\ & 9 & p-8 & q-20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 2 & 5 \\ & \boxed{9} & -5 & -4 \\ & p-3 & q-16 & \end{array} \right)$$

(a) Ha az utolsó sor csupa nulla, azaz $p = 3$ és $q = 16$, akkor végtelen sok megoldás van.

(b) Ha az utolsó sor tiltott sor, $p = 3$ és $q \neq 16$, akkor nincs megoldás.

(c) Ha $p \neq 3$ akkor egyértelmű a megoldás, vagyis egy közös pont van.

12. Generátorrendszert alkotnak-e az $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 0, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 1)$ és $(1, 2, 3, 4)$ vektorok? Ha igen, válasszunk ki egy bázist belőle.

Megoldás: A következő négy vektor lineárisan független, és ezért, bázis is, hiszen a dimenzió négy:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ez persze mutatja azt is, hogy a megadott vektorok együtt generátorrendszer.

13. Oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő lineáris egyenletrendszereket:

$$x + 2y - z - u + v = -1 \qquad x + y + 2z - u + 3v = 0$$

$$x + 2y - z + v = 1 \qquad x + 2y + z + 3u - 2v = 0$$

$$\textbf{(a)} \quad -x - y + z + 3u - 2v = 2 \qquad \textbf{(b)} \quad 3x + 3y - z + 2u + v = 0$$

$$2x + 2y - 2z - 5u + 4v = -2 \qquad -x + y + 2z + 3u - 2v = 0$$

$$3x + 7y - 3z + u + 2v = 2 \qquad 2x - y + 3z - 2u + v = 0$$

Megoldás: (a) Itt két szabad paraméter van, z és v . A megoldás:

$$x = z - 3v + 7$$

$$y = v - 3$$

$$u = 2$$

(b) Ennek egyértelmű megoldása van: $x = y = z = u = v = 0$.

1. Határozd meg az inverziók számát az $1, \dots, n$ elemek következő permutációiban.

- (a) $5, 2, 4, 1, 6, 3$;
 (b) $1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2$;
 (c) $n, n-1, \dots, 1$.

2. A determináns definíciójában mi lesz a mellékátlóban álló elemek szorzatának előjele (n -től függően)?

3. Az $1, 2, \dots, n$ számok tetszőleges π permutációjához rendeljük hozzá a $J(\pi)$ számot, ami a $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ sorozatban azon elempárok száma, melyek nem állnak inverzióban egymással. Legyen továbbá $I(\pi)$ a π permutáció inverziószáma. Mely n -ekre létezik olyan π permutáció, hogy $I(\pi) = J(\pi)$?

4. Számold ki a következő determinánsokat:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 20 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

5. Hogyan változik egy mátrix determinánsa ha tükrözzük a négyzet négy különböző szimmetriatengelyére?

6. Hogyan változik egy $n \times n$ -es mátrix determinánsa, ha minden elemét az ellentettjére cseréljük?

7. Tegyük fel, hogy az A mátrix sorai, mint vektorok, lineárisan összefüggőek. Határozzuk meg A determinánsát.

8. Legyen A egy n sorból és n oszlopból álló mátrix, a k -adik sorának j -edik elemét jelölje a_{kj} . Legyen B az az $n \times n$ -es mátrix, amelyben a k -adik sor j -edik eleme $b_{kj} = \frac{k}{j} a_{kj}$ ($1 \leq k, j \leq n$). Mennyi B determinánsa, ha tudjuk, hogy A determinánsa 1?

9. Egy $n \times n$ -es mátrix minden eleme osztható kettővel. Igaz-e, hogy ekkor a determinánsa is páros?

10. Legyen A egy négyzetes mátrix, melynek minden eleme egész. Melyek igazak az alábbiak közül?

- (a) Ha a főátló minden eleme 4-gyel osztható, akkor $\det(A)$ is osztható 4-gyel.
 (b) Ha az első sorának minden eleme osztható c -vel, akkor $\det(A)$ is osztható c -vel.
 (c) Ha első és utolsó sorának minden eleme páros, akkor $\det(A)$ osztható 4-gyel.

11. Az A $n \times n$ -es mátrix minden eleme ± 1 . Igazold, hogy ekkor $2^{n-1} \mid \det(A)$.

12. Egy $n \times n$ -es mátrix minden eleme páros, és tudjuk, hogy a determinánsa osztható 64-el, de nem osztható 128-al. Mennyi lehet n ?

13. Bizonyítsd be, hogy az alábbi "zenetörténeti" mátrix determinánsa nem nulla.

$$\begin{vmatrix} 1685 & 1732 & 1756 \\ 1770 & 1797 & 1810 \\ 1844 & 1862 & 1881 \end{vmatrix}$$

14. Van egy $n \times n$ -es mátrixunk, melynek az elemei egy kivételével rögzítettek. Igaz-e, hogy az utolsó elem mindig megválasztható úgy, hogy az így kitöltött mátrix determinánsa 0 legyen?

15. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát. A mátrixok $n \times n$ -esek, a nem jelzett elemek értéke pedig 0.

- (a) $a_{i,i} = 1$ (f) $a_{i,j} = i + j$
 (b) $a_{i,i} = c$ (g) $a_{i,j} = (i + j - 1)^2$
 (c) $a_{i,n+1-i} = 1$ (h) $a_{i,j} = \min\{i, j\}$
 (d) $a_{i,i} = a_{i,i+1} = a_{n,1} = 1$, ahol n páros (i) $a_{i,j} = \binom{i+j-1}{i-1}$
 (e) $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{ha } i = j \\ 1 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$

16. Mennyi az alábbi determináns értéke?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 - n + 1 & n^2 - n + 2 & \dots & n^2 \end{vmatrix}$$

17. Legyenek $f_1(x), \dots, f_n(x)$ legfeljebb $(n-2)$ -edfokú polinomok, $a_1, \dots, a_n$ pedig valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi determináns értéke mindenképpen nulla.

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

18. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- (a) Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak legalább $n^2 - n + 1$ eleme 0, akkor a determinánsa 0.
 (b) Ha egy mátrix determinánsa 0, akkor a mátrixban előfordul a 0 elem.
 (c) Ha egy $n \times n$ -es mátrixban van egy $k \times l$ -es csupa 0 téglalap, és $k + l > n$, akkor a determinánsa 0.

1. Határozd meg az inverziók számát az $1, \dots, n$ elemek következő permutációiban.

- (a) $5, 2, 4, 1, 6, 3$;
 (b) $1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2$;
 (c) $n, n-1, \dots, 1$.

Megoldás: (a) Az inverzióban lévő elemek: $(5, 2), (5, 4), (5, 1), (5, 3), (2, 1), (4, 1), (4, 3), (6, 3)$, ami összesen 8 darab.

(b) Az inverzióban lévő elemek: $(3, 2), (5, 4), (5, 2), (7, 6), (7, 4), (7, 2), (9, 8), (9, 6), (9, 4), (9, 2), (8, 6), (8, 4), (8, 2), (6, 4), (6, 2), (4, 2)$, ami összesen 16.

(c) Itt minden pár inverzióban áll egymással. A párok száma: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

2. A determináns definíciójában mi lesz a mellékátlóban álló elemek szorzatának előjele (n -től függően)?

Megoldás: A mellékátlóbeli elemek indexei: $a_{1,n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n,1}$. Azaz, ha π az a permutáció, amire $\pi(i) = n-i+1$, akkor a mellékátlóbeli elemek előjele éppen $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (az 1(c) feladatban kiszámoltuk az inverziószámot). Azt kell megnézni, hogy $\frac{n(n-1)}{2}$ mikor páros. Ha $n = 4k$ vagy $n = 4k+1$ alakú, akkor az előjel pozitív, különben negatív.

3. Az $1, 2, \dots, n$ számok tetszőleges π permutációjához rendeljük hozzá a $J(\pi)$ számot, ami a $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ sorozatban azon elempárok száma, melyek nem állnak inverzióban egymással. Legyen továbbá $I(\pi)$ a π permutáció inverziószáma. Mely n -ekre létezik olyan π permutáció, hogy $I(\pi) = J(\pi)$?

Megoldás: Egy π permutációban két elem vagy inverzióban áll egymással, vagy nem, ezért $I(\pi) + J(\pi) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Ebből következik, hogy ha $I(\pi) = J(\pi)$, akkor $I(\pi) = J(\pi) = \frac{n(n-1)}{4}$. De ez egy egész szám kell, hogy legyen, ezért $4 \mid n(n-1)$, amiből következik, hogy $n = 4k$ vagy $n = 4k-1$ alakú ($k \in \mathbb{Z}$). Már csak meg kell nézni, hogy az ilyen alakú n -ekre tényleg van-e megfelelő permutáció.

Először is vegyük észre, hogy két szomszédos elem cseréjénél csak e kettő elem viszonya változik, ezért az inverziószám pontosan 1-gyel nő vagy csökken. Induljunk ki az $1, 2, \dots, n$ sorrendből (amiben az inverziók száma nulla), és kezdjünk el cserélgetni szomszédos elemeket addig, amíg az inverziószám pont $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ nem lesz. Ezt mindig el lehet érni a megfelelő n -ekre.

4. Számold ki a következő determinánsokat:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 20 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Megoldás:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 20 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 20 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 8.$$

- (b) Az utolsó sort kivonom az összes felette levőből majd az utolsó sorhoz hozzáadom a felette levőket:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$$

Ez már felső-háromszög mátrix, ezért a determináns: $(-1)^{n-1}(n-1)$.

- (c) Az első oszlopot levonom az összes többiből:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = (n-1)!$$

5. Hogyan változik egy mátrix determinánsa ha tükrözzük a négyzet négy különböző szimmetriatengelyére?

Megoldás: A függőleges szimmetriatengelyre való tükrözés $k = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ darab oszlopcserét jelent, tehát a determináns a $(-1)^k$ -szorosára változik. Ugyan ez lesz a vízszintes szimmetriatengelyre való tükrözéskor. A főátlóra való tükrözés nem változtatja meg a determinánst, hiszen a kifejtésben tagonként változatlan marad az előjel. Egy π permutációban ugyanis ugyanannyi pár áll inverzióban egymással, mint π^{-1} -ben. A mellékátlóra való tükrözés előáll, mint a főátlóra, valamint a függőleges és a vízszintes szimmetriatengelyre való tükrözésnek egymásutánja. Az előbbieket alapján adódik, hogy a determináns nem változik.

6. Hogyan változik egy $n \times n$ -es mátrix determinánsa, ha minden elemét az ellentettjére cseréljük?

Megoldás: Egy sor ellentettjére változtatása (-1) -szeresére változtatja a determinánst, így n sor ellentettjére változtatásánál a determináns $(-1)^n$ -szeresére változik.

7. Tegyük fel, hogy az A mátrix sorai, mint vektorok, lineárisan összefüggőek. Határozzuk meg A determinánsát.

Megoldás: Legyenek a mátrix sorai rendre a $v_1, \dots, v_n$ vektorok. Mivel összefüggőek, ezért van egy nem-triviális lineáris kombináció amivel a nullvektort elő lehet állítani:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Valamelyik együttható nem nulla: az egyszerűség kedvéért, legyen ez $\lambda_1 \neq 0$. Ez az jelenti, hogy v_1 kifejezhető a többi vektor segítségével:

$$v_1 = \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n,$$

ahol $\mu_i = \frac{-\lambda_i}{\lambda_1}$. Ha most a mátrix első sorából levonjuk a második sor μ_2 -szörösét, majd a harmadik sor μ_3 -szörösét, és így tovább, akkor az első sorból egy csupa nulla sor keletkezik. Ekkor viszont a determináns nulla.

8. Legyen A egy n sorból és n oszlopból álló mátrix, a k -edik sorának j -edik elemét jelölje a_{kj} . Legyen B az az $n \times n$ -es mátrix, amelyben a k -edik sor j -edik eleme $b_{kj} = \frac{k}{j} a_{kj}$ ($1 \leq k, j \leq n$). Mennyi B determinánsa, ha tudjuk, hogy A determinánsa 1?

Megoldás: A B mátrix így fog kinézni:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1}a_{1,1} & \frac{1}{2}a_{1,2} & \dots & \frac{1}{n}a_{1,n} \\ \frac{2}{1}a_{2,1} & \frac{2}{2}a_{2,2} & \dots & \frac{2}{n}a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n}{1}a_{n,1} & \frac{n}{2}a_{n,2} & \dots & \frac{n}{n}a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Most a k -ik sorból emeljünk ki k -t (minden k -ra):

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{1}a_{1,1} & \frac{1}{2}a_{1,2} & \dots & \frac{1}{n}a_{1,n} \\ \frac{1}{1}a_{2,1} & \frac{1}{2}a_{2,2} & \dots & \frac{1}{n}a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1}a_{n,1} & \frac{1}{2}a_{n,2} & \dots & \frac{1}{n}a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Hasonlóan a j -ik oszlopból emeljünk ki $\frac{1}{j}$ -t:

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{1}a_{1,1} & \frac{1}{1}a_{1,2} & \dots & \frac{1}{1}a_{1,n} \\ \frac{1}{1}a_{2,1} & \frac{1}{1}a_{2,2} & \dots & \frac{1}{1}a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1}a_{n,1} & \frac{1}{1}a_{n,2} & \dots & \frac{1}{1}a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Az elején lévő szorzók pont 1-et adnak, és a determináns pont A determinánsa. Tehát $\det(B) = \det(A) = 1$.

9. Egy $n \times n$ -es mátrix minden eleme osztható kettővel. Igaz-e, hogy ekkor a determinánsa is páros?

Megoldás: Igaz. Egyrészt ki lehet emelni valamelyik sorból egy 2-es szorzót. De a definíció alapján is könnyen látszik: amikor összeadjuk a megfelelő szorzatokat, mindegyik páros.

10. Legyen A egy négyzetes mátrix, melynek minden eleme egész. Melyek igazak az alábbiak közül?

- (a) Ha a főátló minden eleme 4-gyel osztható, akkor $\det(A)$ is osztható 4-gyel.
 (b) Ha az első sorának minden eleme osztható c -vel, akkor $\det(A)$ is osztható c -vel.
 (c) Ha első és utolsó sorának minden eleme páros, akkor $\det(A)$ osztható 4-gyel.

Megoldás: (a) Nem igaz. Tekintsük például a következő mátrixot:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

(b) Ez igaz. A determináns definíciójában minden összeadandóban van egy c -s szorzó. Másképp: ki lehet emelni c -t az első sorból.

(c) Ez is igaz: megint ki lehet emelni az első és az utolsó sorból is egy kettést.

11. Az A $n \times n$ -es mátrix minden eleme ± 1 . Igazold, hogy ekkor $2^{n-1} \mid \det(A)$.

Megoldás: Ha minden elem ± 1 , akkor eliminációs lépéssel elérhető, hogy a mátrix így nézzen ki:

$$\begin{vmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ 0 & \pm 2/0 & \dots & \dots \\ 0 & \pm 2/0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \pm 2/0 \end{vmatrix}$$

Itt viszont az első sor kivételével minden sorból ki tudunk emelni egy 2-es szorzót. Tehát

ezt kapjuk:

$$2^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ 0 & \pm 1/0 & \dots & \dots \\ 0 & \pm 1/0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \pm 1/0 \end{vmatrix}$$

A maradék determináns viszont egy egész szám, mert minden eleme egész.

- 12.** Egy $n \times n$ -es mátrix minden eleme páros, és tudjuk, hogy a determinánsa osztható 64-el, de nem osztható 128-al. Mennyi lehet n ?

Megoldás: Vegyük szemügyre a determináns definícióját:

$$\sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}.$$

Ha a mátrix minden eleme páros, akkor az összeg minden tagja osztható 2^n -el, és így a determináns is. A feltétel szerint 128-al nem szabad oszthatónak lennie, azaz olyan n -et keresünk, hogy $2^n < 128$ legyen. Tehát n nem lehet nagyobb 6-nál. Minden kisebb n -re könnyű megfelelő mátrixot gyártani.

- 13.** Bizonyítsd be, hogy az alábbi "zenetörténeti" mátrix determinánsa nem nulla.

$$\begin{vmatrix} 1685 & 1732 & 1756 \\ 1770 & 1797 & 1810 \\ 1844 & 1862 & 1881 \end{vmatrix}$$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a főátlóban lévő elemek páratlanok, míg minden más elem páros. A determináns definíciójában ezért pontosan egy páratlan tag lesz az összegben, minden más tag páros. De akkor az összeg nem lehet nulla, hisz a páratlan tag nem nulla.

	1685	Bach
	1732	Haydn
	1756	Mozart
	1770	Beethoven
Egyébként:	1797	Schubert
	1810	Chopin, Schumann
	1844	Widor, Rimsky-Korsakov
	1862	Debussy
	1881	Bartók

- 14.** Van egy $n \times n$ -es mátrixunk, melynek az elemei egy kivételével rögzítettek. Igaz-e, hogy az utolsó elem mindig megválasztható úgy, hogy az így kitöltött mátrix determinánsa 0 legyen?

Megoldás: Nem igaz: tekintsük a következő mátrixot, ahol $\star$ a nem kitöltött elem:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \star \end{vmatrix} = 0 \cdot \star - 1 \cdot 1 = -1$$

Ennek determinánsa független $\star$ értékétől.

- 15.** Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát. A mátrixok $n \times n$ -esek, a nem jelzett elemek értéke pedig 0.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & a_{i,i} = 1 \\ \text{(b)} & a_{i,i} = c \\ \text{(c)} & a_{i,n+1-i} = 1 \\ \text{(d)} & a_{i,i} = a_{i,i+1} = a_{n,1} = 1, \text{ ahol } n \text{ páros} \\ \text{(e)} & a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{ha } i = j \\ 1 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(f)} & a_{i,j} = i + j \\ \text{(g)} & a_{i,j} = (i + j - 1)^2 \\ \text{(h)} & a_{i,j} = \min\{i, j\} \\ \text{(i)} & a_{i,j} = \binom{i+j-1}{i-1} \end{array}$$

Megoldás: (a), (b) Az (a) rész a (b) speciális esete $c = 1$ -el. Ha $n = 1$, akkor a determináns c , egyébként meg nulla, mert minden sor azonos.

(c) Tükrözzük a vízszintes tengelyre, és használjuk az 5-ös feladat eredményét: $(-1)^{[\frac{n}{2}]}$.

(d) A következőképpen eliminálok: Az utolsó sorból levonom az elsőt, majd hozzáadom a másodikat, majd levonom a harmadikat, hozzáadom a negyediket, stb. Ekkor a végen az utolsó sor csupa nulla lesz, és így a determináns is. Ez működik $n = 2$ -re is.

(e) Ez pont a 4(c) feladat, a megoldás $(n - 1)!$.

(f) Ha $n = 1$, akkor a determináns 2, ha $n = 2$, akkor -1 . Ha pedig $n \geq 3$, akkor vonjuk ki az utolsó sorból az utolsó előtti, majd a másodikból az elsőt. Így kapunk két csupa 1-es sort, ezért a determináns értéke 0.

(g) Vonjuk ki kétszer minden sorból az előtte lévőt.

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \dots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 & (n+1)^2 & \dots & (2n-1)^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 2^2 - 1^2 & 3^2 - 2^2 & \dots & (n+1)^2 - n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2 - (n-1)^2 & (n+1)^2 - n^2 & \dots & (2n-1)^2 - (2n-2)^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 3 & 5 & \dots & 2n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2n-1 & 2n+1 & \dots & 4n-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 3 & 4 & \dots & 2n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ez csak $n \geq 4$ -re működik. Az eredmény $n = 1$ -re 1, $n = 2$ -re -7 , $n = 3$ pedig -8 .

(h) Az $n - 1$ -ik sort levonva az n -edik sorból, majd az $n - 2$ -iket az $n - 1$ -edikből, és így tovább, egy felső háromszög mátrixhoz jutunk, melynek átlójában csupa egyes áll. A determináns értéke ezért 1.

(i) A determináns tehát így néz ki:

$$\begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \cdots & \binom{n+1}{1} \\ \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \cdots & \binom{n+2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \binom{n+2}{n-1} & \cdots & \binom{2n-1}{n-1} \end{vmatrix}$$

16. Mennyi az alábbi determináns értéke?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}$$

Megoldás: Elimináció után ehhez a determinánshoz jutunk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 1 \\ -2 & \text{ha } n = 2 \\ 0 & \text{ha } n \geq 3 \end{cases}.$$

17. Legyenek $f_1(x), \dots, f_n(x)$ legfeljebb $(n-2)$ -edfokú polinomok, $a_1, \dots, a_n$ pedig valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi determináns értéke mindenképpen nulla.

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

Megoldás: A legfeljebb $(n-2)$ -edfokú polinomok egy $n-1$ dimenziós vektorteret alkotnak. Egy $n-1$ dimenziós vektortérben n darab vektor mindig összefüggő, így jelen esetben is az $f_1, \dots, f_n$ polinomok lineárisan összefüggők. Ez azt jelenti, hogy az egyiket ki lehet fejezni a többi segítségével. Ez a kifejezés persze a behelyettesítés után is jó lesz annak bizonyítására, hogy a keletkezett mátrix egyik sora a többi sor lineáris kombinációja. De akkor a determináns mindenképpen nulla.

18. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak legalább $n^2 - n + 1$ eleme 0, akkor a determinánsa 0.

(b) Ha egy mátrix determinánsa 0, akkor a mátrixban előfordul a 0 elem.

(c) Ha egy $n \times n$ -es mátrixban van egy $k \times l$ -es csupa 0 téglalap, és $k + l > n$, akkor a determinánsa 0.

Megoldás: (a) Igaz. Ebben az esetben van a mátrixban csupa nulla sor.

(b) Hamis. Pl. a 2×2 -es csupa 1-es mátrix.

(c) Igaz. Ekkor ugyanis az adott k sorban csak $n - l < k$ oszlopban vannak nem nulla elemek, ezért az adott k sorból kiválasztott elemek közül valamelyik nulla lesz.

1. Számoljuk ki az alábbi a, b és c vektorra az $a \times b, b \times c$ és $c \times a$ vektoriális szorzatokat, valamint az abc vegyszorzatot.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Mennyi a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

3. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad az alábbi P, Q és R pontokon.

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4. Egy síkban vannak-e a következő vektorok: $v_i^j = i + ij + j$, $(i, j = 1 \dots 3)$.

5. Számoljuk ki az alábbi csúcsok által kifeszített tetraéder térfogatát.

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. Igaz-e, hogy ha egy paralelopipedon minden koordinátája egész szám, akkor a területe is egész?

7. Szorozzuk össze a következő mátrixokat minden lehetséges párosításban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Mennyi a determinánusa az alábbi mátrixoknak?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt[2]{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt[3]{5} & \sqrt[5]{7} & 1 & x & 0 \\ \sqrt[7]{9} & \sqrt[9]{11} & \sqrt[11]{13} & \sqrt[13]{2} & y \end{pmatrix}$$

9. Két kitérő egyenesen mozog egy-egy adott hosszúságú szakasz. Bizonyítsuk be, hogy az általuk meghatározott tetraéder térfogata nem változik eközben.

10. Igazoljuk, hogy ha egy tetraéder két szemköztes élpárja merőleges egymásra, akkor a harmadik él pár is merőleges.

11. Tetszőleges valós t és pozitív egész k számra számoljuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k.$$

12. Mutassuk meg, hogy tetszőleges szigorú felső háromszögmátrixnak valamelyik pozitív egész kitevős hatványa nullmátrix.

13. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amire az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix esetén $AB = BA$ teljesül.

14. A 100×100 -as mátrix főátlójában és a századik sorában mindenhol 1-es áll, az összes többi eleme 0. Határozzuk meg A^{100} -t.

15. Legyen A egy $n \times n$ -es mátrix, és $x, y \in \mathbb{R}^n$ különböző vektorok. Bizonyítsd be, hogy ha $Ax = Ay$, akkor $\det A = 0$.

16. Melyek igazak az alábbiak közül egy négyzetes A mátrixra?

(a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amire $A^k = 0$, akkor $\det A = 0$.

(b) Ha $\det A = 0$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$.

17. Melyek igazak az alábbiak közül?

(a) Ha az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható, akkor az $A|b$ kibővített mátrix oszlopai összefüggőek.

(b) Ha az $A|b$ kibővített mátrix oszlopai összefüggőek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.

(c) Ha az A mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.

(d) Ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.

(e) Ha az $Ax = b$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor A oszlopai függetlenek.

1. Számoljuk ki az alábbi a , b és c vektorra az $a \times b$, $b \times c$ és $c \times a$ vektoriális szorzatokat, valamint az abc vegyesszorzatot.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad b \times c = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c \times a = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$abc = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) = 12.$$

2. Mennyi a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

Megoldás: Kifeszített paralelogramma területe $|a \times b|$. Jelen esetben

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

és ennek hossza

$$\sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{54}.$$

3. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad az alábbi P , Q és R pontokon.

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: Ha a sík áthalad a P , Q és R pontokon, akkor a PQ és PR vektorok párhuzamosak a síkra, és ezért a $PQ \times PR$ vektor merőleges rá, vagyis jó lesz normálvektornak. Számoljuk ki:

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad PR = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad PQ \times PR = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

A sík egyenlete ezért így néz ki:

$$0 \cdot x + 2 \cdot y - 2 \cdot z = 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = -4.$$

4. Egy síkban vannak-e a következő vektorok: $v_i^j = i + ij + j$, $(i, j = 1 \dots 3)$.

Megoldás: A három vektor, v^1 , v^2 és v^3 , így néz ki:

$$v^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v^3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Ezek egy síkban vannak, ha a kifeszített paralelopipedon térfogata nulla, vagyis ha

$$v^1 \cdot (v^2 \times v^3) = 0.$$

Kiszámolva:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 11 \\ 7 & 11 & 15 \end{vmatrix} = 0,$$

így egy síkban vannak.

5. Számoljuk ki az alábbi csúcsok által kifeszített tetraéder térfogatát.

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: A kifeszített tetraéder térfogata hatod akkora, mint a PQ , PR és PS vektorok által kifeszített paralelopipedon térfogata. Legyen $a = PQ$, $b = PR$ és $c = PS$, azaz

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A paralelopipedon térfogata:

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$

Ez egy előjeles térfogat persze, a valódi térfogat ennek az abszolútértéke. A tetraéder térfogata tehát

$$\frac{12}{6} = 2.$$

6. Igaz-e, hogy ha egy paralelopipedon minden koordinátája egész szám, akkor a területe is egész?

Megoldás: Ha minden koordináta egész, akkor az egy csúsból induló három oldal-vektor koordinátái is egész számok. A térfogat megegyezik az ezekből készített vegyszorzat értékével, ami nem más mint egy 3×3 -as determináns. Jelen esetben a mátrix minden eleme egész szám, ezért a determináns értéke is az.

7. Szorozzuk össze a következő mátrixokat minden lehetséges párosításban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: Nem.

8. Mennyi a determinánsa az alábbi mátrixoknak?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt[2]{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt[3]{5} & \sqrt[5]{7} & 1 & x & 0 \\ \sqrt[7]{9} & \sqrt[9]{11} & \sqrt[11]{13} & \sqrt[13]{2} & y \end{pmatrix}$$

Megoldás: Most a kifejtési tételt gyakoroljuk mind a kettő feladatnál.

(a) Első sor szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 \cdot 1 - 6 \cdot 7) = -38.$$

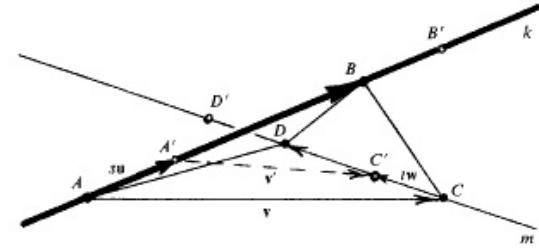
(b) Első sor szerint kifejtve:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt[5]{7} & 1 & x & 0 \\ \sqrt[9]{11} & \sqrt[11]{13} & \sqrt[13]{2} & y \end{vmatrix} - 0 + 0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt[2]{3} & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt[3]{5} & \sqrt[5]{7} & 1 & 0 \\ \sqrt[7]{9} & \sqrt[9]{11} & \sqrt[11]{13} & y \end{vmatrix} + 0 = y.$$

9. Két kitérő egyenesen mozog egy-egy adott hosszúságú szakasz. Bizonyítsuk be, hogy az általuk meghatározott tetraéder térfogata nem változik eközben.

Megoldás: Legyen a A , B és C , D a két szakasz végpontjai a kitérő egyenesen. Legyen továbbá u az A -ból B -be menő, v az A -ból C -be menő és w a C -ből D -be menő vektor.

Toljuk el a két szakaszt: a kapott új pontok A' , B' és C' , D' . Nyilván $u' = u$ és $w' = w$. Mivel AB és $A'B'$ egy egyenesen vannak, ezért van olyan s valós szám, hogy az AA' vektor nem más, mint $s \cdot u$. Hasonlóan, a CC' vektor $t \cdot w$ valamilyen t valósra.



Ekkor v' , az A' -ből C' -be mutató vektor felírható, mint $v' = v - su + tw$. Az első (vessző nélküli) tetraéder térfogata

$$V = \frac{1}{6} |u \cdot (v \times w)|,$$

míg a vesszős tetraéder térfogata

$$V' = \frac{1}{6} |u \cdot (v' \times w)|.$$

Ez utóbbit kiszámolva:

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{6} |u \cdot (v' \times w)| \\ &= \frac{1}{6} |u \cdot ((v - su + tw) \times w)| \\ &= \frac{1}{6} |u \cdot (v \times w - su \times w)|, \quad \text{mert } w \times w = 0 \\ &= \frac{1}{6} |u \cdot (v \times w)|, \quad \text{mert } u \text{ és } su \times w \text{ merőlegesek: } u \cdot (su \times w) = 0. \end{aligned}$$

kapjuk, hogy $V' = V$.

MÁSKÉPP: Rögzítsük le AB -t, és mozgassuk CD -t. Ekkor az A csúcs és a másik egyenes (az ábrán az m egyenes) távolsága nem változik. Mivel sem az ADC háromszög magassága sem CD nem változik, ezért a területe sem. Ahogy az ADC háromszög mozog az A és m egyenes síkjában, a B -től vett távolsága nem változik. Node az $ABCD$ tetraéder térfogata nem más, mint ez utóbbi távolság és az ADC háromszög területének szorzatának egyharmada. CD mozgatásával tehát ezen mennyiségek egyike sem változik meg, így a térfogat sem.

Hasonlóan kapjuk, hogy CD rögzítésével és AB mozgatásával sem változik a térfogat. Az egyszerre mozgatást pedig előállíthatjuk úgy, hogy először csak az egyiket, majd csak a másikat mozgatjuk.

10. Igazoljuk, hogy ha egy tetraéder két szemköztes élpárja merőleges egymásra, akkor a harmadik is élpár is merőleges.

Megoldás: Legyen a tetraéder egyik csúcsából a többibe mutató három vektor v_1 , v_2 és v_3 . Ekkor a többi élhez tartozó vektorok ezekből kifejezhetők: $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$ és $v_3 - v_1$. A feltétel szerint két szemközti párhoz tartozó vektorok merőlegesek, vagyis a skaláris szorzatuk nulla:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot (v_2 - v_3) &= 0 \\ v_2 \cdot (v_3 - v_1) &= 0. \end{aligned}$$

A másodikból az első levonva kapjuk a $v_3 \cdot (v_1 - v_2) = 0$ azonosságot, amit bizonyítani kellett.

11. Tetszőleges valós t és pozitív egész k számra számoljuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k.$$

Megoldás: Először nézzük meg az első pár hatványt, és próbáljunk megsejteni valamit (amit utána megpróbálunk bizonyítani).

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7t \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Ebből a szabályosság, amit sejtünk:

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & (2^k - 1)t \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Ezt indukcióval le is vezetjük. Az indukció első lépését épp az előbb csináltuk meg. Tegyük fel, hogy k -ig tudjuk, és nézzük $k + 1$ -re:

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & (2^k - 1)t \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (2^k - 1)t + 2^k t \\ 0 & 2 \cdot 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (2^{k+1} - 1)t \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

12. Mutassuk meg, hogy tetszőleges szigorú felső háromszögmátrixnak valamelyik pozitív egész kitevős hatványa nullmátrix.

Megoldás: Egy szigorú felsőháromszög mátrix ilyen:

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \\ \vdots & \dots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Amikor ezt hatványozzuk, akkor a főátló feletti, főátlóval "párhuzamos" átlók közül egyre több nullázódik ki. Írjunk fel pár hatványt!

13. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amire az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix esetén $AB = BA$ teljesül.

Megoldás: Mivel össze tudjuk szorozni mindkét irányból a két mátrixot, kapjuk, hogy B is 2×2 -es. Vegyünk egy általános B mátrixot: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, és írjuk fel a két szorzatot:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = BA$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ c-d & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ c-d & 0 \end{pmatrix}$$

Ebből kapjuk, hogy $b = 0$ és $c - d = -a$, tehát az ilyen alakú mátrixok lesznek jók:

$$\begin{pmatrix} d-c & 0 \\ c & d \end{pmatrix}.$$

14. A 100×100 -as mátrix főátlójában és a századik sorában mindenhol 1-es áll, az összes többi eleme 0. Határozzuk meg A^{100} -t.

Megoldás: Az egyik megoldás, hogy észrevesszük, hogy a hatványozás során a főátlóban mindig 1-esek maradnak, míg az utolsó sor mindig nő 1-el. Ebből kapjuk, hogy a 100-ik hatvány főátlójában 1-esek vannak, míg utolsó sorában végig 100 (kivéve a legutolsó elemet, ami 1-es, mert főátlóban van).

Kicsit szisztematikusabban a következő megfigyeléseket tehetjük: Legyen I az egységmátrix, X az a mátrix, aminek utolsó sora csupa 1-es, az utolsó elem kivételével (a többi nulla), és Y az a mátrix, aminek minden eleme nulla, kivéve a legutolsót, ami 1. Szóval az $X + Y$ mátrixnak az utolsó sora csupa 1. Világos, hogy $A = I + X + Y$. Disztributivitás miatt $A^2 = A(I + X + Y) = AI + AX + AY$. Viszont az I , X illetve Y -al való szorzást könnyű megérteni: Ha Z tetszőleges, akkor $ZI = Z$. ZX az a mátrix, aminek minden eleme nulla, kivéve a legutolsó sorban, ahol a Z mátrix megfelelő oszlopaiban álló elemek összege lesz. Az utolsó sor utolsó oszlopában is nulla van. ZY pedig a csupa nulla, kivéve a legutolsó elemet (utolsó sor, utolsó oszlop), ami a Z -beli utolsó oszlop elemeinek összege. Ebből, ha már meg van A^k , akkor $A^k \cdot A = A^k(I + X + Y)$ -t könnyű kiszámolni.

- 15.** Legyen A egy $n \times n$ -es mátrix, és $x, y \in \mathbb{R}^n$ különböző vektorok. Bizonyítsd be, hogy ha $Ax = Ay$, akkor $\det A = 0$.

Megoldás: Az $Ax = Ay$ ekvivalens azzal, hogy $A(x - y) = 0$. De mivel x és y különbözőek, ezért $x - y \neq 0$. Van tehát egy olyan nemnulla vektor, amit A a 0-ba visz. Egyszerűbb jelölés kedvéért legyen $z = x - y$. Tehát $Az = 0$. A szorzás definíciójából ez azt jelenti, hogy az A bármely sorának és z -nek a skaláris szorzata 0, azaz z merőleges az A összes sorára. Másképp fogalmazva: az A sorai nem az egész teret feszítik ki, hanem csak egy legfeljebb $n - 1$ alteret (egy hipersíkot, aminek normálisa z). De akkor lineárisan összefüggőek is, ezért a determináns nulla. Azt is mondhattuk volna, hogy ha $z = x - y \neq 0$, akkor az $Az = 0$ egyenletrendszernek nem lenne egyértelmű megoldása. Ez megint ekvivalens azzal, hogy $\det A = 0$.

MÁSKÉPP: Ha nem lenne nulla a determináns, akkor létezne inverzmátrix. Ezzel beszorozva mindkét oldalt, kapnánk, hogy

$$\begin{aligned} Ax &= Ay \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}Ay \\ Ix &= Iy \end{aligned}$$

ahol I a megfelelő méretű egységmátrix. Nade, ez utóbbi egyenlőség csak úgy lehet, ha $x = y$, ami ellentmondás. A determináns tehát nulla.

- 16.** Melyek igazak az alábbiak közül egy négyzetes A mátrixra?

(a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amire $A^k = 0$, akkor $\det A = 0$.

(b) Ha $\det A = 0$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$.

Megoldás: (a) Ha $A^k = 0$, akkor $\det(A^k) = 0$. A determinánsok szorzástételéből: $\det(A^k) = (\det(A))^k = 0$. De valós számok egy szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tag is nulla, azaz $\det(A) = 0$.

Amíg a szorzástételt nem tanuljuk: Ha $A^k = 0$, akkor az $A^k x = 0$ egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása. Bevezetve az $y = A^{k-1}x$ jelölést, azt kapjuk, hogy az $Ay = 0$ egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása. Tanultuk, hogy ez ekvivalens azzal, hogy A determinánsa nulla.

(b) Ez nem igaz. Például az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixra teljesül, hogy $\det(A) = 0$, de bármelyik hatványára: $A^k = A \neq 0$.

- 17.** Melyek igazak az alábbiak közül?

(a) Ha az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható, akkor az $A|b$ kibővített mátrix oszlopai összefüggőek.

(b) Ha az $A|b$ kibővített mátrix oszlopai összefüggőek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer

megoldható.

(c) Ha az A mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.

(d) Ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható.

(e) Ha az $Ax = b$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor A oszlopai függetlenek.

Megoldás: Mindegyik kellett, hogy legyen az előadáson!

1. Határozd meg az alábbi egyenletből az X ismeretlen mátrixot.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}.$$

2. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- (a) Ha A -nak és B -nek létezik inverze, akkor AB -nek is.
 (b) Ha AB -nek létezik inverze, akkor A -nak és B -nek is.
 (c) Ha $A + B$ -nek és $A - B$ -nek létezik inverze, akkor $A^2 - B^2$ -nek is.
 (d) Ha A -nak és B -nek létezik inverze, akkor $A + B$ -nek is.

3. Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A invertálható és $AB = 0$. Igazoljuk, hogy ekkor $B = 0$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ felcserélhető és invertálható mátrixok, akkor

$$A^{-1} = B^{-1}A^{-1}B.$$

5. Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *nullosztó*, ha van olyan $B \neq 0$ $n \times n$ -es mátrix, melyre $AB = 0$. Igaz-e, hogy ha A nullosztó, akkor $\det(A) = 0$? És ha $\det(A) = 0$, akkor nullosztó?

6. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ minden sorában az elemek összege 0. Bizonyítsuk be, hogy A (bal oldali) nullosztó, és adjunk meg olyan $B \neq 0$ mátrixot, melyre $AB = 0$.

7. Az A és B azonos méretű invertálható négyzetes mátrixokra, valamint a velük azonos méretű E egységmátrixra $A^2 = E$ és $ABA^{-1} = B^3$. Bizonyítsuk be, hogy $B^8 = E$.

8. Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -re $A^2 + A + E = 0$ teljesül. Igazoljuk, hogy A invertálható és számoljuk ki A^{2010} -et.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix minden eleme 0, 1 vagy -1 , és minden sorban ugyanannyi 1-es van, mint ahány -1 -es, akkor A nem invertálható.

10. Határozzuk meg az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -es mátrixot, ha tudjuk, hogy $A^2 = E$ és $\det(A - E) \neq 0$.

11. Igaz-e, hogy ha $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $A \neq 0$, $AB = AC$, akkor $B = C$?

12. Hány $k \times k$ -as aldetermináns található egy $n \times m$ -es mátrixban?

13. Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -re $A^2 = 0$. Lehet-e $r(A) = n$?

14. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges, egymással szorozható A és B mátrixra

$$r(AB) \leq r(A), r(B).$$

15. Bizonyítsuk be, hogy $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixokra $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

16. Legyenek $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Bizonyítsuk be, hogy ha $m < n$, akkor az AB mátrix szinguláris.

17. Igazoljuk, hogy minden mátrix kibővíthető egy sorral és egy oszloppal úgy, hogy a kibővített mátrix rangja nagyobb legyen, mint az eredetié. Mutassunk példát arra, hogy ehhez nem mindig elegendő az egy sorral bőítés.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha a 3×3 -as, invertálható mátrix minden eleme 3-mal osztva 1 maradékot ad, akkor az A^{-1} mátrix elemei között van olyan, ami nem egész.

19. Bizonyítsuk be, hogy ha az A $n \times n$ -es invertálható mátrix minden eleme páros, akkor az A^{-1} mátrixnak legalább n eleme nem egész.

20. Bizonyítsuk be, hogy egy mátrix egy elemét megváltoztatva a rang legfeljebb 1-gyel változik.

21. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit (ha van nekik)!

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Határozzuk meg minden x értékre az alábbi mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix}$$

23. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sor- oszlop- és determinánsrangját, és ha van az inverzüket.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 15 \\ 6 & 2 & 10 \\ -9 & -3 & 15 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 6 \\ 10 & 1 & -9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}.$$

24. A c valós paraméter milyen értékére lesz az alábbi mátrix rangja minimális? És a determinánsa?

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 1 \\ 6 & 18 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & 3c & c^2 \\ 0 & 2 & c^2 & 2c \end{pmatrix}.$$

1. Határozd meg az alábbi egyenletből az X ismeretlen mátrixot.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: Kiszámoljuk a bal oldalt álló két szélső mátrix inverzét, majd beszorzunk az elsővel balról, a másodikkal jobbról.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért az egyenlet így alakul:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- (a) Ha A -nak és B -nek létezik inverze, akkor AB -nek is.
 (b) Ha AB -nek létezik inverze, akkor A -nak és B -nek is.
 (c) Ha $A + B$ -nek és $A - B$ -nek létezik inverze, akkor $A^2 - B^2$ -nek is.
 (d) Ha A -nak és B -nek létezik inverze, akkor $A + B$ -nek is.

Megoldás: (a) Ez igaz:

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

azaz $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(b) Az inverz létezésének determinánsos jellemzéséből tudjuk, hogy egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla. A determinánsok szorzástételéből pedig azt, hogy $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Mivel AB -nek van inverze, ezért $\det(AB) \neq 0$, de akkor $\det(A) \neq 0$ és $\det(B) \neq 0$, azaz mind A , mind B invertálható. Vigyázat! Azért itt volt egy kis csalás: az előfordulhat, hogy az AB mátrix négyzetes, habár sem A , sem B nem az. Tehát a fenti gondolatmenet csak akkor igaz, ha a determinánsok szorzástételét tudjuk használni, azaz, ha teljesülnek annak feltételei. Vagyis az kell, hogy mind $\det(A)$, mind $\det(B)$ létezzen, azaz ezek azonos méretű négyzetes mátrixok legyenek

(c) Sajnos a mátrixok körében nem igaz, hogy $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$, mert nem feltétlenül teljesül, hogy $AB = BA$. Tulajdonképpen ez az oka, hogy az állítás nem igaz. Ellenpéldaként:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Ez sem igaz, például $A = E$, $B = -E$ esetén. Amúgy ez már az 1×1 -es mátrixokra sem teljesül.

3. Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A invertálható és $AB = 0$. Igazoljuk, hogy ekkor $B = 0$.

Megoldás: Mivel A invertálható, szorozzuk be az egyenlőséget balról A^{-1} -el:

$$\begin{aligned} AB &= 0 \\ A^{-1}AB &= 0 \\ EB &= 0 \\ B &= 0 \end{aligned}$$

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ felcserélhető és invertálható mátrixok, akkor

$$A^{-1} = B^{-1}A^{-1}B.$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= B^{-1}A^{-1}B & / \cdot B^{-1} \\ A^{-1}B^{-1} &= B^{-1}A^{-1}BB^{-1} & / B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} \\ (BA)^{-1} &= (AB)^{-1} & / \cdot (AB) \\ (BA)^{-1}(AB) &= (AB)^{-1}(AB) = E & / AB = BA \\ (BA)^{-1}(AB) &= (BA)^{-1}(BA) = E \\ E &= E \end{aligned}$$

5. Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *nullosztó*, ha van olyan $B \neq 0$ $n \times n$ -es mátrix, melyre $AB = 0$. Igaz-e, hogy ha A nullosztó, akkor $\det(A) = 0$? És ha $\det(A) = 0$, akkor nullosztó?

Megoldás: Tegyük fel, hogy A nullosztó, és $\det(A) \neq 0$. Ez utóbbi miatt A -nak van inverze, a nullosztóság miatt pedig van egy B nem csupa-nulla mátrix, amire $AB = 0$. Vessünk egy pillantást erre: $A^{-1}AB$, és számoljuk ki kétféleképpen. Egyrészt

$$A^{-1}AB = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0,$$

másrészt

$$A^{-1}AB = (A^{-1}A)B = EB = B,$$

azaz $B = 0$, ami ellentmondás. Tehát $\det(A)$ valóban nulla.

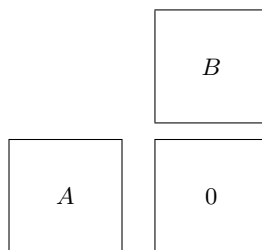
Ha $\det(A) = 0$, akkor az oszlopaiból álló vektorok lineárisan összefüggőek. Jelöljük az A oszlopaiból álló vektorokat rendre $a_1, \dots, a_n$ -el. Vannak tehát olyan nem mind nulla $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ számok, hogy

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0.$$

Legyen B az az $n \times n$ -es mátrix, melynek első oszlopában az α_i számok vannak, mindenhol máshol pedig 0. Ekkor a B mátrix nem csupa-nulla, de $AB = 0$, azaz A nullosztó.

6. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ minden sorában az elemek összege 0. Bizonyítsuk be, hogy A (bal oldali) nullosztó, és adjunk meg olyan $B \neq 0$ mátrixot, melyre $AB = 0$.

Megoldás: Legyen $\underline{a}$ az A egyik sora, mint vektor. Ha ezt skalárisan szorzom a csupa-egy vektorral, akkor megkapom az A adott sorának sorösszegét, ami a feladat szerint mindig nulla. A skaláris szorzás nem más, mint a megfelelő oszlopvektorral való mátrixszorzás. Ez adja az ötletet, hogy milyen B -t keressünk, ami mutatja, hogy $AB = 0$: legyen B a csupa 1-esből álló mátrix.



7. Az A és B azonos méretű invertálható négyzetes mátrixokra, valamint a velük azonos méretű E egységmátrixra $A^2 = E$ és $ABA^{-1} = B^3$. Bizonyítsuk be, hogy $B^8 = E$.

Megoldás: Mivel B a feltétel szerint invertálható, ezért $B^8 = E$ pontosan akkor teljesül, ha $B^9 = B$. Tehát elég B^9 -t meghatározni. Ehhez emeljük köbre az $ABA^{-1} = B^3$ azonosságot:

$$\begin{aligned} B^9 &= (ABA^{-1})^3 \\ (ABA^{-1})(ABA^{-1})(ABA^{-1}) &= AB(A^{-1}A)B(A^{-1}A)BA^{-1} \\ &= AB^3A^{-1} \\ &= A(ABA^{-1})A^{-1} \\ &= A^2BA^{-2} \\ &= EBE \\ &= B \end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy $A^{-2} = E$, ami az $A^2 = E$ -ből következik. Azt kaptuk valóban, hogy $B^9 = B$, azaz $B^8 = E$.

8. Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -re $A^2 + A + E = 0$ teljesül. Igazoljuk, hogy A invertálható és számoljuk ki A^{2010} -et.

Megoldás: Ha $A^2 + A + E = 0$, akkor $A(-A - E) = E$, vagyis A inverze nem más, mint $(-A - E)$. Most átrendezve az eredeti azonosságot, ezt kapjuk:

$$A^2 = -A - E = A^{-1}.$$

Számoljuk ki A^{2010} -et. Mivel $A^2 = A^{-1}$, ezért $AA^2 = E$ és így hármasával csoportosítunk:

$$A^{2010} = (AA^2)(AA^2) \cdots (AA^2).$$

2010 hárommal osztva nulla maradékot ad: $3 \cdot 670 = 2010$. Azt kaptuk tehát, hogy $A^{2010} = E^{670} = E$.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix minden eleme 0, 1 vagy -1 , és minden sorban ugyanannyi 1-es van, mint ahány -1 -es, akkor A nem invertálható.

Megoldás: A feltételek miatt az A mátrix minden sorának összege 0. Legyen B az a mátrix, aminek első oszlopa csupa 1-es, és ezt leszámítva az egységmátrix. Ekkor az AB szorzat első oszlopa csupa nulla, hisz oda a sorok összegei kerülnek.

Ha A invertálható, akkor $\det(A) \neq 0$. Világos, hogy $\det(B) = 1$, hiszen háromszögmátrix, és $\det(AB) = 0$, mert van csupa nulla oszlopa. A determinánsok szorzástétele miatt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ lenne, ami lehetetlen. Ezért $\det(A) = 0$, vagyis nem invertálható.

10. Határozzuk meg az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -es mátrixot, ha tudjuk, hogy $A^2 = E$ és $\det(A - E) \neq 0$.

Megoldás: Az első feltétel miatt $A(A - E) = -(A - E)$. A második feltétel miatt $A - E$ invertálható. Beszorozva az inverzével, kapjuk, hogy $A = -E$.

11. Igaz-e, hogy ha $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $A \neq 0$, $AB = AC$, akkor $B = C$?

Megoldás: Ha A invertálható, akkor persze igaz. Viszont az $A \neq 0$ feltétel még nem elég ahhoz, hogy invertálható legyen. Itt egy ellenpélda: ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

akkor

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Ebből kapjuk, hogy például az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 65 & 81 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 17 & 124 \end{pmatrix}$$

jó lesz.

12. Hány $k \times k$ -as aldetermináns található egy $n \times m$ -es mátrixban?

Megoldás: Minden $k \times k$ -as aldetermináns úgy keletkezik, hogy kiválasztok valahogy k sort és k oszlopot, és nézem a kereszteződésükből kapott négyzetes mátrix determinánsát. Vagyis azt kell eldönteni, hogy hányféleképpen tudok kiválasztani n sorból és m oszlopból k sort illetve oszlopot. Ez pont $\binom{n}{k} \binom{m}{k}$.

13. Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -re $A^2 = 0$. Lehet-e $r(A) = n$?

Megoldás: A determinánsok szorzástételéből $0 = \det(A^2) = \det(A)^2$ és így $\det(A) = 0$. De akkor nem lehet a rangja n .

14. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges, egymással összeszorozható A és B mátrixra

$$r(AB) \leq r(A), r(B).$$

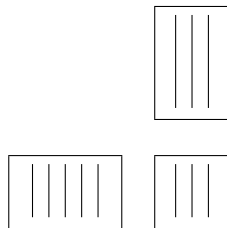
Megoldás: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k \times l}$ (és akkor persze $AB \in \mathbb{R}^{n \times l}$). Először megmutatjuk, hogy $r(AB) \leq r(A)$. Egy mátrix rangja megegyezik az oszlopaiból kiválasztható maximális lineárisan független oszlopok számával. Persze m darab lineárisan független vektor egy m dimenziós teret feszít ki, ezért a rang nem más, mint az oszlopok által generált vektortér dimenziója. Legyenek az A mátrix oszlopai $a_1, \dots, a_k$, a B oszlopai pedig $b_1, \dots, b_l$. Ekkor tehát

$$r(A) = \dim(\langle a_1, \dots, a_k \rangle).$$

Nézzük most az AB szorzat oszlopaikat. Ezek nem mások, mint az $a_1, \dots, a_k$ vektorok egy-egy lineáris kombinációi, a B megfelelő oszlopaival: az AB mátrix i -ik oszlopa egyenlő a

$$b_{1i}a_1 + b_{2i}a_2 + \dots + b_{ki}a_k$$

vektorral. Node $r(AB)$ megegyezik az AB oszlopai által generált tér dimenziójával. Most láttuk, hogy ezen generátorvektorok mind az A oszlopainak lineáris kombinációi. De persze egy-egy lineáris kombináció benne marad a generált térben, ezért az AB oszlopai által generált tér altere az A oszlopai által generált térnek. Akkor viszont a dimenziója kisebb-egyenlő.



Ha az $r(AB) \leq r(B)$ egyenlőtlenséget akarjuk bizonyítani, hasonlóan járhatunk el: az AB sorai megegyeznek a B sorainak valamely (A sorai szerinti) lineáris kombinációval, ezért a kifeszített tér dimenziója megint kisebb-egyenlő.

15. Bizonyítsuk be, hogy $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixokra $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

Megoldás: Legyenek az A oszlopai $a_1, \dots, a_m$ és B oszlopai $b_1, \dots, b_m$. Ekkor $A + B$ oszlopai $a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m$. Nyilván az $A + B$ oszlopai által generált tér altere az A és B oszlopai által generált térnek:

$$V_1 = \langle a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m \rangle \leq \langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \rangle = V_2.$$

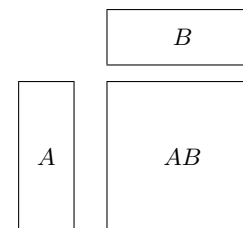
De akkor a dimenzió is legfeljebb akkora. Az világos, hogy $\dim(V_1) = r(A + B)$, de mi köze van $\dim(V_2)$ -nek $r(A) + r(B)$ -hez? Az a_i -k között van $r(A)$ darab lineárisan független vektor, a b_i -k között pedig $r(B)$ darab. Akkor ezek között együtt *legfeljebb* $r(A) + r(B)$ darab lineárisan független lehet. Vagyis azt kaptuk, hogy

$$r(A + B) = \dim(V_1) \leq \dim(V_2) \leq r(A) + r(B).$$

Szigorú egyenlőtlenség előfordulhat, például: $E = A = -B$ esetén.

16. Legyenek $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Bizonyítsuk be, hogy ha $m < n$, akkor az AB mátrix szinguláris.

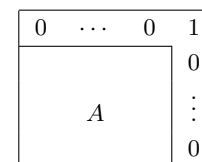
Megoldás: Mivel $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, ezért rangja legfeljebb $\min\{n, m\} = m$ lehet. Hasonlóan, B rangja is legfeljebb m lehet. Viszont AB egy $n \times n$ -es mátrix:



Ezért, ha a determinánsa nem lenne 0, akkor a rangja n kellene, hogy legyen. Viszont $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} = m$, ezért legfeljebb m lehet a rangja, de $m < n$.

17. Igazoljuk, hogy minden mátrix kibővíthető egy sorral és egy oszloppal úgy, hogy a kibővített mátrix rangja nagyobb legyen, mint az eredetié. Mutassunk példát arra, hogy ehhez nem mindig elegendő az egy sorral bőítés.

Megoldás: Legyen A az eredeti mátrix, és vegyünk hozzá első sorként és utolsó oszlopként csupa nullákat, kivéve a jobb felső elemet, ami legyen 1. Világos, hogy az így kapott mátrixban az utolsó oszlop nem áll elő a többi oszlop lineáris kombinációjaként, ezért a kapott mátrixból eggyel több független oszlop választható ki, mint az eredetiből. A rang tehát nőtt eggyel.



Példa arra, hogy egyetlen sor hozzávétele nem mindig elegendő: tekintsük az $n \times n$ -es egység mátrixot. Ehhez akárhogy is veszünk hozzá még egy sort, a rang nem nőhet, hiszen teljes rangú volt már eleve is.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha a 3×3 -as, invertálható mátrix minden eleme 3-mal osztva 1 maradékkal, akkor az A^{-1} mátrix elemei között van olyan, ami nem egész.

Megoldás: Ha egy mátrix minden eleme egész szám, akkor a determinánsa is egész, hiszen a determináns definíciójában minden szorzat és ezért minden összeg (különbség) egész szám:

$$\sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} \prod a_{i, \pi(i)} = \text{egész} \pm \text{egész} \pm \dots \pm \text{egész} = \text{egész}.$$

Ezért $\det(A)$ egy egész szám. Tudjuk, hogy

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$

így elég lenne bebizonyítani, hogy $\det(A) \neq 1$. Megint nézzünk rá a determináns definíciójára, azon belül is a szorzatokra. Itt csupa háromtagú szorzat szerepel, minden tag 1-et ad maradékkal hárommal osztva. Akkor viszont a szorzatuk is 1-et ad maradékkal. Ezért felváltva adok össze olyan számokat, amik 1-et adnak maradékkal. Mivel a mátrix 3×3 -as, ezért $3! = 6$ bástyaelhelyezés van. A determináns modulo 3 ezért így néz ki:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 0,$$

azaz osztható lesz 3-al. De 1 nem osztható hárommal, ezért $\det(A)$ nem lehet 1. Azt kaptuk tehát, hogy $\det(A^{-1})$ tényleg tört, és ezért nem lehet A^{-1} minden eleme egész.

19. Bizonyítsuk be, hogy ha az A $n \times n$ -es invertálható mátrix minden eleme páros, akkor az A^{-1} mátrixnak legalább n eleme nem egész.

Megoldás: Legyenek az A mátrix elemei a_{ij} és A^{-1} elemei b_{ji} . Szorozzuk össze gondolatban A -t A^{-1} -el, és nézzük a kapott egység mátrix főátlóbeli elemeit, hogy hogyan keletkeztek. Ezeket úgy kaptuk, hogy az A i -ik sorát skalárisan szoroztuk az A^{-1} i -ik oszlopával, vagyis minden i -re

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = 1.$$

Itt az a_{ij} számok a feltétel miatt mind párosak. Ha a b_{ji} számok mind egész számok lennének, akkor az egész összeg is páros lenne, ami lehetetlen, mivel 1 páratlan. Vagyis azt kaptuk, hogy az i -ik sorban legalább az egyik b_{ji} nem egész. Ez igaz minden i -re, vagyis az A^{-1} minden oszlopában van legalább egy tört szám. Összesen pedig n oszlop van.

Megjegyzés: ha az $A^{-1}A$ szorzatot néztük volna, akkor azt kaptuk volna, hogy A^{-1} minden sorában van tört. Ezért az igazság az, hogy A^{-1} minden sorában és minden oszlopában van legalább egy tört.

20. Bizonyítsuk be, hogy egy mátrix egy elemét megváltoztatva a rang legfeljebb 1-gyel változik.

Megoldás: A rangot meg tudjuk határozni Gauss-eliminációval: az elimináció után a vezéregyesek száma megegyezik a ranggal. Ha a mátrixban egy elemet megváltoztatunk, akkor az elimináció során az annyit tud változtatni, hogy az adott oszlopban vagy keletkezik egy újabb vezéregyes, vagy eltűnik egy már meglévő (persze az is lehet, hogy nem változtat semmin). Az első esetben 1-el csökken a rang, a másodikban 1-el nő, a harmadikban pedig nem változik.

21. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit (ha van nekik)!

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Gauss-eliminációval: Ha az A mátrix inverzét szeretnénk meghatározni, akkor a $(A|E)$ mátrixot addig elimináljuk, amíg $(E|B)$ alakú nem lesz. Ha ez sikerül, akkor $B = A^{-1}$, ha nem, akkor a vonal bal oldalán nem az egység mátrix lesz, hanem valamivel "kevesebb". Ilyenkor a mátrix nem invertálható. De a mátrix rangja kiolvasható: a vezéregyesek számával egyenlő.

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ & \boxed{1} & 1 & | & 0 & 1 & -2 \\ & 0 & -3 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ & \boxed{1} & 1 & | & 0 & 1 & -2 \\ & 0 & \boxed{1} & | & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ & \boxed{1} & 0 & | & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-5}{3} \\ & & \boxed{1} & | & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

22. Határozzuk meg minden x értékre az alábbi mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix}$$

Megoldás: A bal felső 2×2 -es részmátrix determinánása x értékétől függetlenül sosem nulla, ezért a rang mindig legalább 2. Három akkor tud lenni a rang, ha a mátrix determinánása nem nulla. Eliminációval ezt kapjuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & x+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & x+5 \end{pmatrix}$$

Ha $x \neq -5$, akkor a rang 3, egyébként 2.

23. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sor- oszlop- és determinánsrangját, és ha van az inverzüket.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 15 \\ 6 & 2 & 10 \\ -9 & -3 & 15 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 6 \\ 10 & 1 & -9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: (a) determináns = 0; rang = 2; nincs inverz.

(b) determináns = 0; rang = 2; nincs inverz.

(c) determináns = 197; rang = 3; inverz:

$$\frac{1}{197} \cdot \begin{pmatrix} -18 & 33 & -7 \\ -20 & -29 & 36 \\ 51 & 5 & -13 \end{pmatrix}.$$

(d) determináns = 0; rang = 3; nincs inverz.

24. A c valós paraméter milyen értékére lesz az alábbi mátrix rangja minimális? És a determinánása?

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 1 \\ 6 & 18 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & 3c & c^2 \\ 0 & 2 & c^2 & 2c \end{pmatrix}.$$

Megoldás: A bal felső 2×2 -es részmátrix determinánása nem nulla, ezért a mátrix rangja legalább kettő. Kezdjük el eliminálni:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 & 1 \\ 6 & 18 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & 3c & c^2 \\ 0 & 2 & c^2 & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -6 & \\ 0 & 3c+3 & c^2-1 & \\ 2 & c^2 & 2c & \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & \\ 3c+3 & c^2-1 & \\ c^2-1 & 2c+2 & \end{vmatrix} =$$

$$3 \begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & \\ 3(c+1) & (c+1)(c-1) & \\ (c+1)(c-1) & 2(c+1) & \end{vmatrix} = 3(c+1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & \\ 3 & (c-1) & \\ (c-1) & 2 & \end{vmatrix} =$$

$$3(c+1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & \\ 3 & (c-1) & \\ 2 - \frac{1}{3}(c-1)^2 & \end{vmatrix}.$$

Ez utóbbi alakból látszik, hogy a rang mindig legalább három, és akkor nem négy, ha a determináns nulla. A determináns kétféleképpen lehet nulla: $c+1 = 0$ vagy $2 - \frac{1}{3}(c-1)^2 = 0$. A lehetséges értékek tehát

$$c = -1 \quad \text{vagy} \quad c = \pm\sqrt{6} + 1.$$

1. Lineáris-e az az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés, amelyre tetszőleges (u, v) vektor képe a következő:

- (a) $\mathcal{A}((u, v)) = (-u, 2v)$ (b) $\mathcal{A}((u, v)) = (uv, v)$
 (c) $\mathcal{A}((u, v)) = (4, 3u)$ (d) $\mathcal{A}((u, v)) = (u + v, 0)$

2. Egy $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció az $(1, 2)$ vektorhoz a $(6, 7)$ vektort, a $(-1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 9)$ vektort rendeli. Mit rendel $\mathcal{A}$ az $(5, 6)$ vektorhoz?

3. Lineáris leképezések-e az alábbi függvények?

- (a) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x, \quad g(x) = 5 + x.$
 (b) $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f((a, b)) = a + b, \quad g((a, b)) = a \cdot b.$
 (c) Konvergens sorozatokhoz hozzárendeljük a határértéküket.
 (d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(v) = u \cdot v$ ahol u tetszőleges rögzített vektor.
 (e) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(v) = u \times v$ ahol u tetszőleges rögzített vektor.
 (f) $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}.$

4. Lineárisak-e a háromdimenziós tér alábbi leképezései? Ha igen, írjuk fel a mátrixukat a szokásos bázisban, illetve határozzuk meg a képterüket és magterüket, valamint ezek dimenzióját is.

- (a) az identitás-transzformáció, (b) a zérus-transzformáció,
 (c) a z tengely körüli 90 fokos elforgatás, (d) az y tengely körüli α szögű elforgatás,
 (e) az x tengelyre való vetítés, (f) az $y = z$ síkra való vetítés.

5. A síkon a $B = \{(2, 0), (0, 2)\}$ és a $C = \{(1, 1), (0, 1)\}$ vektorrendszerek bázis alkotnak.

- (a) Írd fel a szokásos bázisban megadott $(2, 4)$ vektort mindkét bázisban.
 (b) Legyen $\mathcal{A}$ az a transzformáció, ami az egyik bázist a másikba viszi (a megfelelő sorrendben). Írd fel $[\mathcal{A}]_{B,C}$ -t.
 (c) Mi lesz a $(2, 4)$ vektor képe $\mathcal{A}$ szerint? És $\mathcal{A}^{-1}$ szerint?

6. Milyen leképezésekhez tartoznak az alábbi mátrixok (a szokásos bázisban felírva)?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

7. Számolás nélkül lásd be, hogy

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos(k\varphi) & -\sin(k\varphi) \\ \sin(k\varphi) & \cos(k\varphi) \end{pmatrix}$$

8. Legyen $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ lineáris leképezés. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- (a) Ha $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$ akkor $\langle \mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n) \rangle = W.$
 (b) Ha $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$ akkor $\langle \mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n) \rangle = \text{Im}(\mathcal{A}).$
 (c) Ha $\langle \mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n) \rangle = \text{Im}(\mathcal{A})$ akkor $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V.$
 (d) Ha $\{v_1, \dots, v_n\}$ független V -ben, akkor $\{\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n)\}$ is független W -ben.
 (e) Ha $\{\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n)\}$ független W -ben, akkor $\{v_1, \dots, v_n\}$ is független V -ben.

9. A legfeljebb harmadfokú polinomok vektorterében mi lesz a deriválás, mint lineáris leképezés mátrixa? Mennyi a rangja?

10. Adjuk meg $\text{Im}(\mathcal{A})$ és $\text{Ker}(\mathcal{A})$ egy-egy bázisát, ha az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés A mátrixa (a szokásos bázisban felírva) a következő:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

11. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere és legyen $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ egy lineáris transzformáció. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorokból álló bázisban felírva az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzunk meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\mathcal{A}).$

12. Igazoljuk, hogy bármely $\mathcal{A}$ lineáris leképezésre pontosan akkor lesz $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$, ha $u - v \in \text{Ker}(\mathcal{A}).$

13. Az $\mathcal{A}$ lineáris transzformációra $\text{Im}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A}).$ Bizonyítsd be, hogy $\mathcal{A}^2 = 0.$

14. A V vektortérnek legyen W egy altere. Adjunk példát olyan lineáris transzformációra, melynek W a képtere, és olyanra is, melynek W a magtere.

15. Mely valós vektortereknek létezik olyan lineáris transzformációja, melynek kép- és magtere egybeesik?

16. Legyen $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ lineáris leképezés és A egy tetszőleges bázisban felírt mátrixa. Igazold, hogy $r(A) = \dim \text{Im}(\mathcal{A}).$

17. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}^{2010} = \text{id}$ valamely lineáris transzformációra. Mennyi $\mathcal{A}$ mátrixának rangja?

18. Lineárisak-e a következő $\mathcal{A} : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ leképezések, ahol $C(\mathbb{R})$ a folytonos valós függvények vektortere.

- (a) $\mathcal{A}(f(x)) = f(x)^2$ (b) $\mathcal{A}(f(x)) = f(x^2),$
 (c) $\mathcal{A}(f(x)) = f(2x)$ (d) $\mathcal{A}(f(x)) = f(x) + f(-x).$

19. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció egy 2010 dimenziós V vektortéren és legyen A az $\mathcal{A}$ valamely bázisban felírt mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy ha $\dim \text{Im}(\mathcal{A}) = 2000$, akkor $\det(A) = 0.$

1. Lineáris-e az az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés, amelyre tetszőleges (u, v) vektor képe a következő:

- (a) $\mathcal{A}((u, v)) = (-u, 2v)$ (b) $\mathcal{A}((u, v)) = (uv, v)$
 (c) $\mathcal{A}((u, v)) = (4, 3u)$ (d) $\mathcal{A}((u, v)) = (u + v, 0)$

Megoldás:

(a) Lineáris: $\mathcal{A}(\lambda(u, v)) = (-\lambda u, 2\lambda v) = \lambda(-u, 2v) = \lambda\mathcal{A}((u, v))$, valamint

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((u_0 + u_1, v_0 + v_1)) &= (- (u_0 + u_1), 2(v_0 + v_1)) \\ &= (-u_0, 2v_0) + (-u_1, 2v_1) = \mathcal{A}((u_0, v_0)) + \mathcal{A}((u_1, v_1)).\end{aligned}$$

(b) Nem lineáris: $\mathcal{A}((\lambda u, \lambda v)) = (\lambda u \lambda v, \lambda v) \neq \lambda(uv, v) = \lambda\mathcal{A}((u, v))$.

(c) Nem lineáris: $\mathcal{A}((\lambda u, \lambda v)) = (4, 3\lambda u) \neq \lambda(4, 3u) = \lambda\mathcal{A}((u, v))$.

(d) Lineáris: $\mathcal{A}((\lambda u, \lambda v)) = (\lambda u + \lambda v, 0) = \lambda(u + v, 0) = \lambda\mathcal{A}((u, v))$, és

$$\begin{aligned}\mathcal{A}((u_0 + u_1, v_0 + v_1)) &= ((u_0 + u_1) + (v_0 + v_1), 0) \\ &= (u_0 + v_0, 0) + (u_1 + v_1, 0) = \mathcal{A}((u_0, v_0)) + \mathcal{A}((u_1, v_1)).\end{aligned}$$

2. Egy $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció az $(1, 2)$ vektorhoz a $(6, 7)$ vektort, a $(-1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 9)$ vektort rendeli. Mit rendel $\mathcal{A}$ az $(5, 6)$ vektorhoz?

Megoldás: Legyen

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Az $\mathcal{A}(a)$ és $\mathcal{A}(b)$ értékeket ismerjük. Kifejezzük c -t az a és b egy lineáris kombinációjaként:

$$c = \alpha a + \beta b,$$

és ebből az $\mathcal{A}$ linearitását felhasználva

$$\mathcal{A}(c) = \mathcal{A}(\alpha a + \beta b) = \alpha \mathcal{A}(a) + \beta \mathcal{A}(b).$$

Mivel a két vektor összege és különbsége jól kezelhető, most a lineáris egyenletrendszer megoldása helyett (amivel kiszámolnánk α -t és β -t) trükközünk.

$$\begin{aligned}a + b &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \end{pmatrix} \\ a - b &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Akkor viszont

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \frac{14}{4} \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Innen pedig

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{A}} 6 \begin{pmatrix} \frac{14}{4} \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \end{pmatrix} = \mathcal{A}(c).$$

3. Lineáris leképezések-e az alábbi függvények?

- (a) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x$, $g(x) = 5 + x$.
 (b) $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f((a, b)) = a + b$, $g((a, b)) = a \cdot b$.
 (c) Konvergens sorozatokhoz hozzárendeljük a határértéküket.
 (d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(v) = u \cdot v$ ahol u tetszőleges rögzített vektor.
 (e) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(v) = u \times v$ ahol u tetszőleges rögzített vektor.
 (f) $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$.

Megoldás:

(a) f igen, g nem; (b) f igen, g nem; (c) igen; (d) igen; (e) igen; (f) nem.

4. Lineárisak-e a háromdimenziós tér alábbi leképezései? Ha igen, írjuk fel a mátrixukat a szokásos bázisban, illetve határozzuk meg a képterület és magterület, valamint ezek dimenzióját is.

- (a) az identitás-transzformáció, (b) a zérus-transzformáció,
 (c) a z tengely körüli 90 fokos elforgatás, (d) az y tengely körüli α szögű elforgatás,
 (e) az x tengelyre való vetítés, (f) az $y = z$ síkra való vetítés.

Megoldás:

(a) Az $\text{id}(v) = v$ transzformációról van szó, ami könnyen láthatóan lineáris. Ahhoz, hogy a mátrixot meghatározzuk, elég megnézni egy bázison a hatását. A szokásos bázist használva:

$$[\text{id}] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\text{id}] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\text{id}] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ezt tömörebb formában így is írhatnánk: $[\text{id}]E = E$, amiből következik, hogy $[\text{id}] = E$. A magtér azon elemek, amiket a nullvektorba visz: ez csak a nulla, míg a képtér az egész tér lesz.

(b) Lineáris, mátrixa a csupa nulla mátrix, magtere az egész tér, képtere a nulla.

(c) Lineáris, magtere a nulla, képtere az egész tér. Mátrixá:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Mint (c), csak a mátrix lesz más.

(e) Lineáris, képtere azon vektorokból áll, amiknek x koordinátája nulla, magtere pedig azokból, amiknek csak az x koordinátája nem nulla. Mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) Ez is lineáris, képtere az $y = z$ sík, magtere az erre a síkra merőleges origón átmenő egyenes.

5. A síkon a $B = \{(2, 0), (0, 2)\}$ és a $C = \{(1, 1), (0, 1)\}$ vektorrendszerek bázis alkotnak.

(a) Írd fel a szokásos bázisban megadott $(2, 4)$ vektort mindkét bázisban.

(b) Legyen $\mathcal{A}$ az a transzformáció, ami az egyik bázist a másikba viszi (a megfelelő sorrendben). Írd fel $[\mathcal{A}]_{B,C}$ -t.

(c) Mi lesz a $(2, 4)$ vektor képe $\mathcal{A}$ szerint? És $\mathcal{A}^{-1}$ szerint?

Megoldás:

(a) Legyen a szokásos bázis $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. A $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_S$ definíció szerint ezt jelenti:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ha a B bázisban akarjuk felírni, akkor olyan α, β számokat keresünk, melyre

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Könnyen látható, hogy $\alpha = 1$, $\beta = 2$ megfelel, ezért a vektor koordinátái: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$. Ha-

sonlóan eljárva C esetében ezt kapjuk: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_C$. Ezek a feladatok mindig egy egyenletrendszert megoldásához illetve mátrix invertálásához vezetnek.

(b) Ezt most kétféleképpen is megoldjuk. Persze a két megoldási módszer lényegében ugyan az. Olyan A mátrixot keresünk, amire igaz, hogy

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ezt picit tömörebben felírva:

$$A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel bázisból csináltuk, vagy akár ki is számolhatnánk, a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható. Az inverzzel beszorozva megkapjuk A -t. Most nézzük másképp is.

Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor előáll a B bázis egy lineáris kombinációjaként, méghozzá így:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ebből a mátrix:

$$[A]_{B,C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

6. Milyen leképezésekhez tartoznak az alábbi mátrixok (a szokásos bázisban felírva)?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Megoldás: (a) Identitás.

(b) x tengelyre vetítés, hiszen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) zérus transzformáció ami mindent a 0-ba visz.

(d) Ez pont az egységmátrix λ -szorosa, ezért ez egy λ -szoros nyújtás.

(e) Itt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ képe $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ lesz, így ez az x tengelyre való tükrözés.

(f) Itt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ képe $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$, ezért ez a 90-fokos forgatás, óra mutató járásával megegyező irányban.

(g) Ez a φ szöggel való elforgatás.

7. Számolás nélkül lásd be, hogy

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos(k\varphi) & -\sin(k\varphi) \\ \sin(k\varphi) & \cos(k\varphi) \end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrixhoz tartozó transzformáció pont a φ -vel való elforgatás. Azt is tudjuk, hogy két transzformáció kompozíciójához (egymás után elvégzése) tartozó mátrix pont a megfelelő mátrixok szorzata. Tehát a k -ik hatvány megfelel a " k -szor φ " szöggel való forgatásnak.

8. Legyen $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ lineáris leképezés. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) Ha $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$ akkor $\langle \mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n) \rangle = W$.

(b) Ha $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$ akkor $\langle \mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n) \rangle = \text{Im}(\mathcal{A})$.

(c) Ha $\langle \mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n) \rangle = \text{Im}(\mathcal{A})$ akkor $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$.

(d) Ha $\{v_1, \dots, v_n\}$ független V -ben, akkor $\{\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n)\}$ is független W -ben.

(e) Ha $\{\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n)\}$ független W -ben, akkor $\{v_1, \dots, v_n\}$ is független V -ben.

Megoldás:

(a) Hamis. Legyen például $\mathcal{A}$ az a leképezés, ami mindent a 0-ba visz.

(b) Igaz. Legyen ugyanis $w \in \text{Im}(\mathcal{A})$. Ekkor $w = \mathcal{A}(v)$ valamely $v \in V$ -re. Mivel $v_1, \dots, v_n$ generátorrendszer, vannak olyan λ_i számok, hogy

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$

De akkor $\mathcal{A}$ -t ráeresztve mindkét oldalra, és a linearitást kihasználva kapjuk, hogy

$$w = \lambda_1 \mathcal{A}(v_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(v_2) + \dots + \lambda_n \mathcal{A}(v_n),$$

vagyis $w \in \langle \mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n) \rangle$. Ezzel beláttuk, hogy

$$\langle \mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n) \rangle \subseteq \text{Im}(\mathcal{A}).$$

A fordított tartalmazás nyilvánvaló.

(c) Hamis. Például legyen $\mathcal{A}$ az a leképezés, ami mindent a 0-ba visz, és legyen V dimenziója nagyobb mint n .

(d) Hamis. Megint jó példának a mindent 0-ba vivő leképezés.

(e) Igaz. Tegyük fel, hogy

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Azt szeretnénk belátni, hogy ezesetben a λ_i -k mind nullák. Eresszük rá $\mathcal{A}$ -t mindkét oldalra. A linearitást használva ezt kapjuk:

$$\lambda_1 \mathcal{A}(v_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(v_2) + \dots + \lambda_n \mathcal{A}(v_n) = 0.$$

De ez csak úgy lehet, ha $\lambda_i = 0$ minden i -re, hiszen a feltétel szerint az $\mathcal{A}(v_i)$ vektorok függetlenek.

9. A legfeljebb harmadfokú polinomok vektorterében mi lesz a deriválás, mint lineáris leképezés mátrixa? Mennyi a rangja?

Megoldás: A harmadfokú polinomok vektorterében a szokásos bázis az $\{1, x, x^2, x^3\}$ vektorrendszer. Ahhoz, hogy a leképezést megadjuk, megint elég a bázison megnézni a hatását:

$$\partial 1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$\partial x = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$\partial x^2 = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$\partial x^3 = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

Ebből a mátrix:

$$\partial = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Adjuk meg $\text{Im}(\mathcal{A})$ és $\text{Ker}(\mathcal{A})$ egy-egy bázisát, ha az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés A mátrixa (a szokásos bázisban felírva) a következő:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Határozzuk meg először $\text{Ker}(\mathcal{A})$ -t. $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \{x : \mathcal{A}(x) = 0\}$, azaz egy (homogén) lineáris egyenletrendszer megoldásait keressük. Gauss elimináció:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Amiből $x_1 = -x_3$ és $x_2 = -x_4$, azaz a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

alakú vektorok lesznek az $\mathcal{A}$ magjában. Ez egy kétdimenziós tér, amiben bázis lesz mondjuk

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ha a magtér két dimenziós, akkor a képtér is az, mert a kettő dimenzió összege kiadja az egész tér dimenzióját, ami most négy. A képtérben pontosan a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ y + 2x \end{pmatrix}$$

alakú vektorok vannak. $\text{Im}(\mathcal{A})$ bázisa lesz mondjuk

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

11. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere és legyen $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ egy lineáris transzformáció. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorokból álló bázisban felírva az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzunk meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\mathcal{A})$.

Megoldás: Határozzuk meg előbb a $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor koordinátáit is a megadott bázisban.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

amiből $\alpha = 2$, $\beta = 1$, azaz az új bázisban a vektor koordinátái: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Most, hogy már ugyan abban a bázisban van ez is, mint a mátrix, az, hogy a magban legyen azt jelenti, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ez pedig, elvégezve a szorzást: $2 + x = 0$ és $2y + 1 = 0$, amiből kapjuk, hogy

$$x = -2 \quad \text{és} \quad y = -\frac{1}{2}.$$

12. Igazoljuk, hogy bármely $\mathcal{A}$ lineáris leképezésre pontosan akkor lesz $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$, ha $u - v \in \text{Ker}(\mathcal{A})$.

Megoldás:

$$\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) \iff \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v) = 0 \iff \mathcal{A}(u - v) = 0 \iff u - v \in \text{Ker}(\mathcal{A}).$$

13. Az $\mathcal{A}$ lineáris transzformációra $\text{Im}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A})$. Bizonyítsd be, hogy $\mathcal{A}^2 = 0$.

Megoldás: $\mathcal{A}^2$ is egy lineáris leképezés, ami pontosan akkor 0, ha minden elemet a 0-ba visz, vagyis, ha minden $v \in V$ -re $\mathcal{A}^2(v) = 0$. $\text{Im}(\mathcal{A})$ -ban az $\mathcal{A}(v)$ alakú elemek vannak, de a feltétel szerint ezek mind benne vannak $\text{Ker}(\mathcal{A})$ -ban is, így $\mathcal{A}$ az $\mathcal{A}(v)$ alakú elemeket a 0-ba viszi. Másszóval: $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = 0$. Tehát $\mathcal{A}^2(v) = 0$ bármilyen $v \in V$ -re.

14. A V vektortérnek legyen W egy altere. Adjunk példát olyan lineáris transzformációra, melynek W a képtere, és olyanra is, melynek W a magtere.

Megoldás: Vegyük azt a leképezést, ami minden V -beli vektort rávetít a W altérre. Ez lineáris, és persze a képtere W . Ennek a mátrixát is felírhatjuk a következőképpen. Legyen $b_1, \dots, b_n$ egy olyan bázisa V -nek, hogy $b_1, \dots, b_k$ bázisa W -nek (másképp: W egy bázisát egészítsük ki V egy bázisává). Ebben a bázisban a transzformáció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

ahol E a $k \times k$ -as egységmátrix.

Ugyan ebben a bázisban, a W elemei pontosan azok, amiknek az utolsó $n - k$ koordinátája nulla. Ezért a

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right)$$

leképezésnek a magtere pont W .

15. Mely valós vektortereknek létezik olyan lineáris transzformációja, melynek kép- és magtere egybeesik?

Megoldás: A dimenzótétel alapján tudjuk, hogy

$$\dim(\text{Im}(\mathcal{A})) + \dim(\text{Ker}(\mathcal{A})) = \dim(V).$$

Ha $\text{Im}(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{A})$, akkor az előző azonosság miatt $\dim(V)$ páros. Második lépésben megmutatjuk, hogy minden páros dimenziós vektortérben van megfelelő transzformáció. Tegyük fel, hogy $\dim(V) = 2n$ és legyen $\mathcal{A}$ az a leképezés, amit az alábbi hozzárendelés definiál:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ez nyilvánvalóan lineáris, és teljesül a $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \text{Im}(\mathcal{A})$ követelmény.

16. Legyen $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ lineáris leképezés és A egy tetszőleges bázisban felírt mátrixa. Igazold, hogy $r(A) = \dim \operatorname{Im}(\mathcal{A})$.

Megoldás: Tekintsük az A mátrix oszlopait, mint vektorokat. Legyenek ezek $a_1, \dots, a_n$. Ekkor $\operatorname{Im}(\mathcal{A}) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. $r(A)$ pedig pont az volt, hogy hány lineárisan független vektort tudunk kiválasztani az $a_1, \dots, a_n$ vektorok közül.

17. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}^{2010} = \operatorname{id}$ valamely lineáris transzformációra. Mennyi $\mathcal{A}$ mátrixának rangja?

Megoldás: Legyen A a leképezés (valamilyen bázisban felírt) mátrixa. Ekkor $A^{2010} = E$. Ezért A invertálható, jelesül $A^{-1} = A^{2009}$. De akkor $\det(A) \neq 0$ és így a rang determinánsos definíciójából $r(A) = \dim(V)$ maximális.

18. Lineárisak-e a következő $\mathcal{A} : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ leképezések, ahol $C(\mathbb{R})$ a folytonos valós függvények vektortere.

(a) $\mathcal{A}(f(x)) = f(x)^2$

(b) $\mathcal{A}(f(x)) = f(x^2)$,

(c) $\mathcal{A}(f(x)) = f(2x)$

(d) $\mathcal{A}(f(x)) = f(x) + f(-x)$.

Megoldás:

(a) Nem lineáris, mert $\mathcal{A}(\lambda f) = (\lambda f)^2 \neq \lambda f^2 = \lambda \mathcal{A}(f)$.

(b), (c), (d) Lineáris.

19. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció egy 2010 dimenziós V vektortéren és legyen A az $\mathcal{A}$ valamely bázisban felírt mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy ha $\dim \operatorname{Im}(\mathcal{A}) = 2000$, akkor $\det(A) = 0$.

Megoldás: Mivel $r(A) = \dim \operatorname{Im}(\mathcal{A})$, és $2000 < 2010$ ezért A nem teljes rangú. De akkor a determinánsa sem lehet nem-nulla.

1. Tudjuk, hogy egy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés magtere csak a nullvektorból áll. Igazoljuk az alábbi állításokat:
 - (a) Tetszőleges nemnulla vektor képe nem nullvektor.
 - (b) Különböző vektorok képe különböző.
 - (c) A képtér dimenziója megegyezik a kiindulási vektortér dimenziójával.

2. Adjuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, -vektorait és -altereit.

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Határozzuk meg az alábbi mátrixok karakterisztikus polinomját, sajátértékeit és sajátvektorait, majd állapítsuk meg, hogy van-e sajátvektorokból álló bázis.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Mi a magtere és képtere a valós függvények vektorteréből a valós számok terébe képző, $\Phi(f) = f(1)$ leképezésnek? Legyen $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ az a leképezés, melyre $\Psi(c)(x) = c$. Mik lesznek a $\Phi(\Psi)$ leképezés sajátértékei és sajátvektorai? Hát a sajátalterei?
5. Igaz-e, hogy minden altér valamilyen lineáris leképezés sajátaltere?
6. P projekció, ha $P^2 = P$. Mit mondhatunk egy projekció sajátértékeiről?
7. (Az előző feladat segítségével) határozd meg, hogy milyen c -re invertálható $P + cE$, ahol P egy projekció.
8. $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ tükrözés, ha $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = v$ minden v vektorra. Mi lehet a tükrözés mátrixának determinánsa? Határozzuk meg a tükrözés transzformáció lehetséges sajátértékeit.
9. Keressünk olyan 2×2 -es, illetve 3×3 -as valós mátrixot, melynek nincsen valós sajátértéke.
10. A négyzetes A mátrixra $A = A^3$. Bizonyítsuk be, hogy A -nak van sajátvektora, és sajátértékei csak a $-1, 0, 1$ lehetnek.

11. Határozd meg az alábbi leképezések sajátolgait, a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében.

- (a) $f(x) \mapsto f'(x)$,
- (b) $f(x) \mapsto xf'(x)$.

12. Legyenek $v_1, v_2, \dots, v_n$ a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai és legyen $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha a $v_1 + \mathcal{A}(v_1), v_2 + \mathcal{A}(v_2), \dots, v_n + \mathcal{A}(v_n)$ lineárisan összefüggőek, akkor $\mathcal{A}$ -nak a (-1) sajátértéke.

13. Bizonyítsuk be, hogy ha az A invertálható mátrixnak sajátértéke a λ valós szám, akkor $\lambda \neq 0$ és az A mátrix inverzének sajátértéke lesz az $\frac{1}{\lambda}$ szám.

14. Legyen A valós (nem feltétlenül négyzetes) mátrix. Igazoljuk, hogy ha a $\lambda \neq 0$ valós szám sajátértéke az $A^T A$ mátrixnak, akkor sajátértéke az AA^T mátrixnak is.

15. Legyen V nem nulla (de véges) dimenziós vektortér és $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha $\text{Im}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A})$ teljesül, akkor $\mathcal{A}$ -nak a 0 sajátértéke.

16. Legyen A négyzetes mátrix, λ az egyik sajátértéke és v egy ehhez tartozó sajátvektor. Bizonyítsuk be, hogy v az A^3 mátrixnak is sajátvektora, és állapítsuk meg, hogy A^3 milyen sajátértékéhez tartozik.

17. Legyenek A és B $n \times n$ -es mátrixok és tegyük fel, hogy B -nek van inverze. Bizonyítsuk be, hogy ha λ sajátértéke A -nak, akkor sajátértéke $B^{-1}AB$ -nak is.

18. Legyenek A és B $n \times n$ -es mátrixok. Igaz-e, hogy ha λ valós szám sajátértéke A -nak is és B -nek is, akkor sajátértéke AB -nek is? És ha v sajátvektora A -nak és B -nek is, akkor AB -nek is sajátvektora?

19. Mutassuk meg, hogy ha $v_1, \dots, v_k$ az $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció sajátvektorai, melyekhez páronként különböző sajátértékek tartoznak, akkor a megadott vektorok lineárisan függetlenek.

20. Tudjuk, hogy az A mátrixnak sajátértéke λ . Igazoljuk, hogy a $B = A^2 + 2E$ mátrixnak sajátértéke $\lambda^2 + 2$.

21. Legyen $v \in \mathbb{R}^n$ az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix sajátvektora és legyen $k_A(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ a karakterisztikus polinom. Bizonyítsuk be, hogy $k_A(A)v = 0$, azaz $a_n A^n v + a_{n-1} A^{n-1} v + \dots + Av + a_0 v = 0$.

1. Tudjuk, hogy egy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés magtere csak a nullvektorból áll. Igazoljuk az alábbi állításokat:

- (a) Tetszőleges nemnulla vektor képe nem nullvektor.
 (b) Különböző vektorok képe különböző.
 (c) A képtér dimenziója megegyezik a kiindulási vektortér dimenziójával.

Megoldás:

- (a) $\mathcal{A}(v) = 0$ pontosan akkor, ha $v \in \text{Ker}(\mathcal{A})$, de $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \{0\}$, így ekkor $v = 0$.
 (b) $\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(u) \iff \mathcal{A}(v - u) = 0 \iff v - u \in \text{Ker}(\mathcal{A}) \iff v - u = 0$, azaz ha $v = u$.
 (c) Dimenziótétel szerint $\dim \text{Im}(\mathcal{A}) + \dim \text{Ker}(\mathcal{A}) = \dim(V)$. Mivel $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \{0\}$, ezért $\dim \text{Ker}(\mathcal{A}) = 0$. Átrendezve az egyenletet, kapjuk a megoldást.

2. Adjuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, -vektorait és -altérét.

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Egy A mátrix sajátértékei a $\det(A - \lambda E) = 0$ egyenlet λ megoldásai, sajátvektorai pedig az adott λ sajátértékekre az $Av = \lambda v$ nem nulla megoldásai. Praktikusán ezeket Gauss-eliminációval határozzuk meg, az $(A - \lambda E)v = 0$ egyenletből.

(a)

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 7 \\ -3 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(-5 - \lambda) - 7 \cdot (-3) = \lambda^2 - 4.$$

Ebből látszik, hogy a sajátértékek a $\lambda_{1,2} = \pm 2$. A $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 - \lambda_1 & 7 & 0 \\ -3 & -5 - \lambda_1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{7} & 0 \end{array} \right)$$

Azaz a $\lambda_1 = 2$ -höz tartozó v sajátvektor alakja:

$$v = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}y \\ y \end{pmatrix}, \text{ ahol } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A megfelelő sajátaltér pedig

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

A $\lambda_2 = -2$ -höz tartozó sajátvektorok a

$$v = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}, \quad y \neq 0$$

alakú vektorok lesznek.

- (b) Sajátértékek: $\lambda_1 = 5$ és $\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$. A megfelelő sajátaltér:

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ és } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ (\sqrt{3} - 1)t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ és } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ (-\sqrt{3} - 1)t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (c) Sajátértékek: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$. A megfelelő sajátaltér:

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \text{ és } \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Határozzuk meg az alábbi mátrixok karakterisztikus polinomját, sajátértékeit és sajátvektorait, majd állapítsuk meg, hogy van-e sajátvektorokból álló bázis.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Nyaf-nyaf.

4. Mi a magtere és képtere a valós függvények vektortereéből a valós számok terébe képző, $\Phi(f) = f(1)$ leképezésnek? Legyen $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ az a leképezés, melyre $\Psi(c)(x) = c$. Mik lesznek a $\Phi(\Psi)$ leképezés sajátértékei és sajátvektorai? Hát a sajátaltér?

Megoldás: $\text{Ker}(\Phi) = \{f : \Phi(f) = 0\} = \{f : f(1) = 0\}$. $\text{Im}(\Phi) = \{\Phi(f) : f \text{ függvény}\} = \mathbb{R}$, mert bármely x valós számhoz van olyan f függvény, amire $f(1) = x$.

A Ψ leképezés egy c valós számhoz hozzárendeli azt a függvényt, ami minden helyen c -t vesz fel. Ezért, ha f egy tetszőleges függvény, akkor $\Psi(\Phi(f))$ az a függvény, ami minden helyen $f(1)$ -et vesz fel. Ennek egyetlen sajátértéke az 1 és sajátvektorai a nem nulla konstans függvények.

5. Igaz-e, hogy minden altér valamilyen lineáris leképezés sajátaltéré?

Megoldás: Ez igaz. Megfelelő leképezés lesz az adott altérre vetítés. Ezt a leképezést a következőképpen tudjuk megadni. Legyen $W \leq V$ a két szóban forgó vektortér, és legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis W -ben. Egészítsük ezt ki bázissá V -ben a $c_1, \dots, c_k$ vektorokkal. Ekkor a W -re vetítés mátrixa a $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_k$ bázisban az a mátrix, melynek bal felső $n \times n$ -es részmátrixa az egységmátrix, és minden más eleme nulla.

A leképezésnek W tényleg sajátaltéré a $\lambda = 1$ sajátértékkel: ha $v \in W$, akkor $\mathcal{A}(v) = v$. Ha pedig $v \notin W$, akkor v iránya megváltozik, ezért nem lehet sajátvektor.

6. P projekció, ha $P^2 = P$. Mit mondhatunk egy projekció sajátértékeiről?

Megoldás: Ha λ sajátérték, akkor egy megfelelő sajátvektorra $Pv = \lambda v$. Beszorozva P -vel mindkét oldalt, kapjuk, hogy $P(Pv) = P(\lambda v)$, egyszerűsítve: $Pv = \lambda Pv$, leosztva: $\lambda = 1$ vagy $\lambda = 0$.

7. (Az előző feladat segítségével) határozd meg, hogy milyen c -re invertálható $P + cE$, ahol P egy projekció.

Megoldás: Egy A mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(A) \neq 0$. Ezt alkalmazva, $P + cE$ pontosan akkor invertálható, ha $\det(P + cE) \neq 0$. De ez csak a P sajátértékeinek (-1) -szeresére nulla, ami az előző feladat szerint csak a -1 és a 0 lehet. Tehát minden $c \notin \{-1, 0\}$ -ra $P + cE$ invertálható.

8. $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ tükrözés, ha $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = v$ minden v vektorra. Mi lehet a tükrözés mátrixának determinánsa? Határozzuk meg a tükrözés transzformáció lehetséges sajátértékeit.

Megoldás: Ha az $\mathcal{A}$ tükrözés mátrixa A , akkor $A^2 = E$, ezért $\det(A^2) = \det(A)^2 = \det(E) = 1$. Vagyis $\det(A) = \pm 1$. Ami a lehetséges sajátértékeket illeti: ha $Av = \lambda v$, akkor ezt A -val beszorozva $A^2v = A\lambda v$. Ezt egyszerűsítve $Ev = \lambda Av = \lambda^2 v$, vagyis $v = \lambda^2 v$. Ez csak $\lambda = \pm 1$ -re teljesülhet.

9. Keressünk olyan 2×2 -es, illetve 3×3 -as valós mátrixot, melynek nincsen valós sajátértéke.

Megoldás: Akkor nem lesz valós sajátértéke a mátrixnak, ha a karakterisztikus polinomjának nincsen valós gyöke. Nézzük először a 2×2 -es esetet. Egy ilyen mátrixnak a karakterisztikus polinomja másodfokú. A $x^2 + 1 = 0$ -nak nincsen valós gyöke. Most próbáljunk egy olyan mátrixot csinálni, aminek a karakterisztikus

polinomja éppen $\lambda^2 + 1$ lesz. Ez jó lesz:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezt egyébként szemléletesen is lehetne látni: a sík 90 fokos elforgatása minden vektor irányát megváltoztatja, a nullvektor kivételével.

A 3×3 -as esetben a karakterisztikus polinom harmadfokú, és minden harmadfokú polinomnak van valós gyöke, ezért ilyen mátrix nincsen.

Miért van minden harmadfokú polinomnak legalább egy valós gyöke? Egyrészt a harmadfokú polinomoknak van olyan helyettesítési értéke, ahol pozitív, és olyan is, ahol negatív értéket vesznek fel, és akkor – mivel folytonosak – Bolzano tétele miatt lesz egy olyan helyettesítési érték is, ahol nulla. Másrészt az algebra alaptétele szerint egy harmadfokú polinomnak pontosan három komplex gyöke van. De ha z gyök, akkor $\bar{z}$ is gyök, ezért a harmadik gyöknek biztosan valósnak kell lennie (ha nem lenne az, akkor annak a konjugáltja is gyök lenne, de az már négy gyök lenne, ami túl sok). Ebből speciálisan az is látszik, hogy ha egy harmadfokú polinomnak van két valós gyöke, akkor pontosan három van.

10. A négyzetes A mátrixra $A = A^3$. Bizonyítsuk be, hogy A -nak van sajátvektora, és sajátértékei csak a $-1, 0, 1$ lehetnek.

Megoldás: Rendezzük át az egyenletet: $A = A^3 \Leftrightarrow A(A + E)(A - E) = 0$. Ezért determinánsok szorzástételéből kapjuk, hogy $\det(A) \det(A + E) \det(A - E) = \det(0) = 0$. A szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tagja nulla, azaz a következő esetek lehetségesek:

- $\det(A - 0 \cdot E) = 0$, ami azt jelenti, hogy a 0 sajátérték,
- $\det(A - 1 \cdot E) = 0$, miszerint az 1 sajátérték,
- $\det(A - (-1) \cdot E) = 0$, vagyis a -1 sajátérték.

Más eset pedig nem lehetséges, mert ha v sajátvektor, akkor

$$Av = A^3v = A^2\lambda v = \lambda A^2v = \lambda A(Av) = \lambda^2 Av = \lambda^3 v.$$

Azaz $\lambda = \lambda^3$, ami csak úgy lehet, ha $\lambda \in \{0, \pm 1\}$.

11. Határozd meg az alábbi leképezések sajátértékeit, a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében.

(a) $f(x) \mapsto f'(x)$,

(b) $f(x) \mapsto xf'(x)$.

Megoldás:

(a) A leképezés mátrixa a szokásos $\{1, x, x^2\}$ bázisban:

$$\partial = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezért a sajátértékek a $\det(\partial - \lambda E) = 0$ megoldásai csak a $\lambda = 0$ lehet (ez háromszoros sajátérték). Sajátvektor pedig nicsen. Egyébként ha f sajátvektor lenne, akkor $f' = c \cdot f$ teljesülne valamilyen konstanssal. Egyrészt ez egy differenciálegyenlet, aminek megoldása e^x , ami nem polinom, másrészt deriváláskor egy polinom fok csökken, ezért polinom megoldása nem is lehet.

(b) Jelöljük A -val a leképezést, és nézzük, hogy mit csinál a leképezésünk a szokásos $\{1, x, x^2\}$ bázissal. $A(1) = x \cdot 0 = 0$, $A(x) = x \cdot 1 = x$, $A(x^2) = x \cdot 2x = 2x^2$. Ezt vektorosan:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ebből már látszik, hogy a $(0, 1, 0)$ és a $(0, 0, 1)$ vektorok sajátvektorok. Az utóbbihoz tartozó sajátérték 2, míg az előbbihez 1.

A sajátértékek: 0, 1, 2, sajátpolinomok: x, x^2 .

12. Legyenek $v_1, v_2, \dots, v_n$ a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai és legyen $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha a $v_1 + \mathcal{A}(v_1), v_2 + \mathcal{A}(v_2), \dots, v_n + \mathcal{A}(v_n)$ lineárisan összefüggőek, akkor $\mathcal{A}$ -nak a (-1) sajátértéke.

Megoldás: Az, hogy a $v_1 + \mathcal{A}(v_1), v_2 + \mathcal{A}(v_2), \dots, v_n + \mathcal{A}(v_n)$ vektorok lineárisan összefüggőek, azt jelenti, hogy vannak olyan nem mind nulla α_i számok, hogy

$$\alpha_1(v_1 + \mathcal{A}(v_1)) + \alpha_2(v_2 + \mathcal{A}(v_2)) + \dots + \alpha_n(v_n + \mathcal{A}(v_n)) = 0.$$

Ezt, a linearitást felhasználva, átalakítva:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = 0.$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$. Ez biztosan nem nulla, mert a feltétel szerint a $v_1, \dots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek, és az α_j számok nem mindegyike nulla. Tehát egy $0 \neq w$ vektorra: $w + A(w) = 0$, amit

rendezve: $A(w) = -w$. Tehát w sajátvektor, és a hozzá tartozó sajátérték éppen -1 .

13. Bizonyítsuk be, hogy ha az A invertálható mátrixnak sajátértéke a λ valós szám, akkor $\lambda \neq 0$ és az A mátrix inverzének sajátértéke lesz az $\frac{1}{\lambda}$ szám.

Megoldás: Ha A invertálható, akkor $\det(A) \neq 0$, azaz $\det(A - 0E) \neq 0$, így valóban a 0 nem lehet sajátérték. Legyen λ sajátérték, és v egy hozzá tartozó sajátvektor. Ekkor $Av = \lambda v$, amit beszorozva A^{-1} -el, kapjuk, hogy $A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v$. Ezt átalakítva: $\frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$, ami tényleg azt jelenti, hogy A^{-1} -nek az $\frac{1}{\lambda}$ sajátértéke, és a hozzá tartozó sajátvektor a v .

14. Legyen A valós (nem feltétlenül négyzetes) mátrix. Igazoljuk, hogy ha a $\lambda \neq 0$ valós szám sajátértéke az $A^T A$ mátrixnak, akkor sajátértéke az AA^T mátrixnak is.

Megoldás: Ha $A^T Av = \lambda v$, akkor beszorozva A -val, kapjuk, hogy $A(A^T Av) = A\lambda v$, ami nem más mint, $AA^T(Av) = \lambda(Av)$, vagyis AA^T -nak λ -hoz tartozó sajátvektora lesz Av . Kérdés: Av miért lesz nem-nulla? Válasz: ha nulla lenne, akkor $A^T Av$ is nulla lenne, de ez egyenlő egy nem-nulla λ és egy nem-nulla v szorzatával, ami nem lehetséges.

15. Legyen V nem nulla (de véges) dimenziós vektortér és $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha $\text{Im}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A})$ teljesül, akkor $\mathcal{A}$ -nak a 0 sajátértéke.

Megoldás: Az, hogy 0 sajátérték, azt jelenti, hogy van egy olyan nem nulla v vektor, amire $\mathcal{A}(v) = 0v = 0$, vagyis $v \in \text{Ker}(\mathcal{A})$. Tehát azt kell bizonyítani, hogy $\text{Ker}(\mathcal{A})$ tartalmaz nem nulla vektort: $\text{Ker}(\mathcal{A}) \neq \{0\}$. Ezt indirekt látjuk be. Ha $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \{0\}$ lenne, akkor az $\text{Im}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A})$ feltevés miatt $\text{Im}(\mathcal{A}) = \{0\}$ lenne, és akkor a dimenzió tétel szerint $\dim(V) = \dim \text{Ker}(\mathcal{A}) + \dim \text{Im}(\mathcal{A}) = 0 + 0 = 0$ lenne. De ez ellentmondás, mert feltettük, hogy $\dim(V) \neq 0$.

16. Legyen A négyzetes mátrix, λ az egyik sajátértéke és v egy ehhez tartozó sajátvektor. Bizonyítsuk be, hogy v az A^3 mátrixnak is sajátvektora, és állapítsuk meg, hogy A^3 milyen sajátértékéhez tartozik.

Megoldás: Szorozzuk be $Av = \lambda v$ -t A^2 -tel balról.

$$A^3 v = A^2(\lambda v) = \lambda A^2 v = \lambda A(A(v)) = \lambda^2 Av = \lambda^3 v.$$

Tehát v sajátvektora A^3 -nek, és a λ^3 sajátértékhez fog tartozni.

17. Legyenek A és B $n \times n$ -es mátrixok és tegyük fel, hogy B -nek van inverze. Bizonyítsuk be, hogy ha λ sajátértéke A -nak, akkor sajátértéke $B^{-1}AB$ -nak is.

Megoldás: Számolásmentes megoldás: $B^{-1}AB$ ugyan annak az $\mathcal{A}$ transzformációnak a mátrixa, csak egy másik bázisban felírva (ez a B szerinti bázistranszformáció). A sajátértékek pedig csak a transzformációtól függenek, a mátrix reprezentációjától nem.

18. Legyenek A és B $n \times n$ -es mátrixok. Igaz-e, hogy ha λ valós szám sajátértéke A -nak is és B -nek is, akkor sajátértéke AB -nek is? És ha v sajátvektora A -nak és B -nek is, akkor AB -nek is sajátvektora?

Megoldás: Az első kérdésre *nem* a válasz. Legyen ugyanis $V = \mathbb{R}^2$, és legyen A és B a két koordinátára való vetítés:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mindkettőnek sajátértéke az 1, viszont AB a csupa nulla mátrix, aminek csak a 0 a sajátértéke.

A második igaz. Legyen λ és μ a két v -hez tartozó sajátérték: $Av = \lambda v$ és $Bv = \mu v$. ekkor $ABv = A(\mu v) = \mu A(v) = \mu \lambda v$, vagyis AB -nek a v sajátvektora, és a $\mu \lambda$ sajátértékhez tartozik.

19. Mutassuk meg, hogy ha $v_1, \dots, v_k$ az $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció sajátvektorai, melyekhez páronként különböző sajátértékek tartoznak, akkor a megadott vektorok lineárisan függetlenek.

Megoldás: Legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ a megfelelő, páronként különböző sajátértékek. Tegyük fel, hogy $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ összefüggőek. Ekkor van egy olyan $i \leq k$ szám, hogy bármely $i-1$ elemű részhalmaza X -nek független, de van i elemű összefüggő részhalmaza. Ezt a következőképpen lehet látni. Mivel mindegyik v_j sajátvektor, ezért nem nullák, így egy összefüggő rész legalább két vektort tartalmaz. Ha van két összefüggő vektor, akkor $i = 2$. Ha nincs, akkor kérdezzük meg, hogy van-e három összefüggő vektor. Ha van, akkor $i = 3$, ha nincs, akkor menjünk tovább négyre, stb.

Átszámozással feltehető, hogy $\{v_1, \dots, v_i\}$ összefüggő, de bármely $i-1$ -et kiválasztva közülük, a kapott vektorrendszer független.

Mivel $\{v_1, \dots, v_i\}$ összefüggő, az egyik tag, esetleges átszámozással feltehető, hogy mondjuk v_i , kifejezhető a többiből, azaz vannak $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$ nem mind nulla

számok, hogy

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1}.$$

Eresszük rá $\mathcal{A}$ -t:

$$\begin{aligned} v_i &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} \\ \mathcal{A}(v_i) &= \mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1}) \\ \mathcal{A}(v_i) &= \mathcal{A}(\alpha_1 v_1) + \dots + \mathcal{A}(\alpha_{i-1} v_{i-1}) \\ \mathcal{A}(v_i) &= \alpha_1 \mathcal{A}(v_1) + \dots + \alpha_{i-1} \mathcal{A}(v_{i-1}) \\ \lambda_i v_i &= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} \lambda_{i-1} v_{i-1} \end{aligned}$$

Ha most az eredeti egyenletet megszorozzuk λ_i -el:

$$\lambda_i v_i = \alpha_1 \lambda_i v_1 + \dots + \alpha_{i-1} \lambda_i v_{i-1},$$

és ez utobbi két egyenletet kivonjuk egymásból, akkor ezt kapjuk:

$$0 = \alpha_1 (\lambda_i - \lambda_1) v_1 + \dots + \alpha_{i-1} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) v_{i-1}.$$

Mivel a λ_n számok mind különbözőek voltak, a fenti egyenlőség jobb oldalán nem minden együttható nulla. De akkor ez azt jelentené, hogy $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ összefüggő, ami ellentmond i választásának.

20. Tudjuk, hogy az A mátrixnak sajátértéke λ . Igazoljuk, hogy a $B = A^2 + 2E$ mátrixnak sajátértéke $\lambda^2 + 2$.

Megoldás: Legyen v az A λ -hoz tartozó egyik sajátvektora. Számoljuk ki Bv -t:

$$Bv = (A^2 + 2E)v = A^2 v + 2v = A(\lambda v) + 2v = \lambda^2 v + 2v = (\lambda^2 + 2)v.$$

Azt kaptuk, hogy $Bv = (\lambda^2 + 2)v$, ahogy a feladat kérte.

21. Legyen $v \in \mathbb{R}^n$ az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix sajátvektora és legyen $k_A(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ a karakterisztikus polinom. Bizonyítsuk be, hogy $k_A(A)v = 0$, azaz $a_n A^n v + a_{n-1} A^{n-1} v + \dots + Av + a_0 v = 0$.

Megoldás: $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Ha μ sajátértéke A -nak a v sajátvektorral, azaz $Av = \mu v$, akkor $\det(A - \mu E) = 0$, másként: $k_A(\mu) = 0$.

$$\begin{aligned} k_A(A)v &= a_n A^n v + a_{n-1} A^{n-1} v + \dots + Av + a_0 v \\ &= a_n \mu^n v + a_{n-1} \mu^{n-1} v + \dots + \mu v + a_0 v \\ &= k_A(\mu)v \\ &= 0v = 0. \end{aligned}$$

Egyébként a Cayley-Hamilton tétel szerint $k_A(A)$ a nullmátrix. Itt a behelyettesítés így van értve:

$$k_A(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E,$$

ami egy mátrix. Erre van egy könnyű, ám *hibás* bizonyítás: mivel $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, ezért $k_A(A) = \det(A - AE) = \det(0) = 0$. Ez hibás, hiszen egyrészt a bal oldalon egy mátrix áll, a jobb oldalon egy szám; másrészt ha az $A - \lambda E$ mátrixba a λ helyére A -t helyettesítünk, akkor valami egész furát kapunk :)

- Legyen $x = 1 + 2i$ és $y = 3 + 4i$. Számoljuk ki az alábbi értékeket: $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$, y^2 , $\sqrt{x}$.
- Alakítsuk trigonometrikus alakba az alábbi, kanonikus alakjaikkal megadott komplex számokat: $1 + i$, $5 - 12i$, $\sqrt{3} - i$, $\sin \alpha - i \cos \alpha$.
- Határozd meg $\sin 3\alpha$ -t és $\cos 3\alpha$ -t $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ segítségével.
Útmutatás: számoljuk ki $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3$ -t.
- Írjuk fel algebrai alakban és rajzoljuk is le a harmadik, negyedik és hatodik egységgyököket.
- Hány 12. egységgyök van a komplex 8. egységgyökök között?
- Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán: $z^2 + 2\bar{z} + 6 = 0$.
- Összeszoroztuk az összes n -edik egységgyököt. Mi lett az eredmény?
- Határozd meg (algebrai alakban) a $z^{2010} = 3 + 7i$ egyenlet összes megoldásának szorzatát.
- Mi a mértani helye a komplex számsíkon az $\frac{1+ti}{1-ti}$ alakú számoknak, ha $t \in \mathbb{R}$? És a $\frac{1+ti}{t+i}$ alakúaknak?
- Mi $|z|$, $|z_1 - z_2|$ és iz geometriai jelentése?
- Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy z_1 , z_2 , z_3 egy egyenesbe essenek?
- Mely z komplex számokra lesz $\frac{z}{\bar{z}}$ tisztán képzetes?
- Mely z komplex számokra lesz $z + \bar{z}^2$ valós?
- Milyen pozitív egész n -re lesz valós a $(\sqrt{3} - i)^n$ szám?
- Mi a $z = (1 - i)^{2010} - i(1 + i)^{2012}$ komplex szám kanonikus alakja?
- Mutassuk meg, hogy egységgyökök szorzata is egységgyök. mi a feltétele annak, hogy egységgyökök összege is egységgyök legyen?
- Legyen $z + z^{-1} = 2 \cos \alpha$. Mennyi $z^{2010} + z^{-2010}$?
- Jellemezzük azon komplex (a, b) számpárokat, melyekre $a + b$, $ab \in \mathbb{R}$.
- Oldjuk meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán:

$$z^2 + (1 + i)\bar{z} + 4i = 0.$$

- Add meg algebrai alakban az alábbi egyenlet összes olyan komplex megoldását, amelynek mind a valós, mind a képzetes része negatív.

$$i \cdot z^6 = (7 + i)^2 + \frac{2 - 30i}{1 - i}$$

- Tegyük fel, hogy a z komplex számra teljesül, hogy z képzetes része nem 0, de a $z + \frac{1}{z}$ komplex szám képzetes része 0. Határozzuk meg $|z|$ -t.
- A z komplex számról tudjuk, hogy $|z| = 1$ és, hogy a $z - iz$ komplex szám képzetes része 0. Határozzuk meg z^8 értékét.
- Hol helyezkednek el a komplex számsíkon azon z komplex számok, melyekre
 - $\text{Im}(4i - z) = 6$;
 - $\text{Re}(iz + 5) \leq 7$;
 - $|z - 1 + 2i| < 13$;
 - $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
- Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(a) $z^2 + 3 = 0$	(á) $z^2 = i z $	(b) $z^2 = iz$
(c) $ z = 2z + i$	(cs) $z^2 - 5 + 12i = 0$	(d) $z^4 - 3z^2 - 1 = 0$
(dz) $z^2 - 12z + 13 - 4i = 0$	(dzs) $\sqrt{z} = z^{2010}$	(e) $z + \sqrt{z} = 2 z $
(é) $z + \bar{z} = 2 z $	(f) $\bar{z} = z^{2010}$	(g) $z^2 + z + 1 = 0$
(gy) $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$	(h) $\frac{1}{iz} = \bar{iz}$	(i) $1 + iz - z^2 = 0$
(i) $z(1 + i) - \bar{z}(1 - i) = 2i$	(j) $2z + 3\bar{z} = 5 + 2i$	(k) $(2 + i)z^3 = -9 + 3i$
- Egy kör alakú mackósajt dobozban a hat darab egyforma körcikk alakú sajtból már csak három maradt. Mindhárom saj csúcsa a doboz középpontjában van, de egyébként tetszőlegesen helyezkednek el. Tekintsük a szomszédos sajtok közötti üres íveket, és mindháromra vegyük az ív végpontjait összekötő egyenes szakasz felezőpontját. Igazoljuk, hogy ez a három pont egy szabályos háromszöget alkot.
- Összeadtuk az összes n -edik egységgyököt. Mi lett az eredmény?
- Van-e a 9-ik egységgyökök között hat, melynek összege 0?
- Hol a hiba a következő "levezetésben"?

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$$

1. Legyen $x = 1 + 2i$ és $y = 3 + 4i$. Számoljuk ki az alábbi értékeket: $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$, y^2 , $\sqrt{x}$.

Megoldás:

$$x + y = (1 + 2i) + (3 + 4i) = 4 + 6i$$

$$x - y = -2 - 2i$$

$$x \cdot y = (1 + 2i)(3 + 4i) = 3 + 4i + 6i + 8i^2 = 3 + 10i - 8 = -5 + 10i$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + 2i}{3 + 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{3 + 2i - 8i^2}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$$

$$y^2 = (3 + 4i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4i + (4i)^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i.$$

$\sqrt{x}$ kiszámítása általában a trigonometrikus alakból a legkönnyebb: ha $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, akkor ennek n -ik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) : k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

Most $|x| = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $\tan \alpha = \frac{2}{1}$, ebből már meg lehet határozni a trigonometrikus alakot, és a két gyököt.

2. Alakítsuk trigonometrikus alakba az alábbi, kanonikus alakjaikkal megadott komplex számokat: $1 + i$, $5 - 12i$, $\sqrt{3} - i$, $\sin \alpha - i \cos \alpha$.

Megoldás:

- (a) $|1 + i| = \sqrt{2}$ és a bezárt szög $\frac{\pi}{4}$, ezért

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

- (b) $|5 - 12i| = \sqrt{169} = 13$, $\tan \arg(z) = \frac{-5}{12}$.

- (c) $|\sqrt{3} - i| = 2$. Határozzuk meg a szöget: $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$. A trigonometrikus alak

$$\sqrt{3} - i = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$

- (d) Használjuk fel az alábbi azonosságokat:

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$\sin \alpha = -\sin(-\alpha),$$

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha).$$

Ezekből kapjuk, hogy

$$\sin \alpha - i \cos \alpha = \cos(\pi/2 - \alpha) - i \sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha - \pi/2) + i \sin(\alpha - \pi/2).$$

3. Határozd meg $\sin 3\alpha$ -t és $\cos 3\alpha$ -t $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ segítségével.

Útmutatás: számoljuk ki $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3$ -t.

Megoldás: Kétféleképpen számoljuk ki $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3$ -t. Először a binomiális tétel segítségével: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 &= \cos^3 \alpha + 3i \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3i^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha + i^3 \sin^3 \alpha \\ &= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha) + i(3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha) \end{aligned}$$

Másrészt a trigonometrikus alakban megadott komplex számot könnyű hatványozni:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos(3\alpha) + i \sin(3\alpha).$$

De mivel ugyan azt számoltuk ki két különbözőképpen, a két eredmény egyenlő kell, hogy legyen:

$$\cos(3\alpha) + i \sin(3\alpha) = (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha) + i(3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha).$$

Két komplex szám viszont pontosan akkor egyenlő, ha valós részük és képzetes részük is egyenlő, ezért:

$$\cos(3\alpha) = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha,$$

$$\sin(3\alpha) = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha.$$

4. Írjuk fel algebrai alakban és rajzoljuk is le a harmadik, negyedik és hatodik egységgyököket.

Megoldás: Rajz: Az egységkört felosztom n egyenlő része az $(1, 0)$ ponttól kezdve. Az így kapott szabályos n szög csúcsai az n -ik egységgyökök.

Formálisan, ha $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ az n -ik egységgyökök, akkor

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

A következőket érdemes fejben tartani:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Harmadik egységgyökök: $1, \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Egyébként, a harmadik egységgyökök a $z^3 - 1 = 0$ polinom gyökei. Mivel az 1 gyök, ezért leosztva $z - 1$ -el kapjuk, hogy $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$. A másik két harmadik egységgyök ezek szerint a $z^2 + z + 1$ megoldásai.

Negyedik egységgyökök: $1, i, -1, -i$.

Hatodik egységgyökök: $\pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$.

5. Hány 12. egységgyök van a komplex 8. egységgyökök között?

Megoldás: Legyenek $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8$ a nyolcadik egységgyökök, azaz

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{8} + i \sin \frac{2k\pi}{8}.$$

ε_k akkor tizenkettedik egységgyök, ha $\varepsilon_k^{12} = 1$, formálisan, ha

$$\varepsilon_k^{12} = \cos \frac{12 \cdot 2k\pi}{8} + i \sin \frac{12 \cdot 2k\pi}{8} = \cos(3k\pi) + i \sin(3k\pi) = 1.$$

Azt kell megnézni, hogy ez mely 1 és 8 közé eső k számokra igaz. ε_k^{12} pontosan akkor egyenlő 1-gyel, ha $\cos(3k\pi) = 1$. Ez pedig a

$$3k\pi \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

$1 \leq k \leq 8$ megoldásai. A megfelelő k értékek a $k = 2, 4, 6, 8$. Azt kaptuk tehát, hogy négy darab tizenkettedik egységgyök van a nyolcadik egységgyökök között.

6. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán: $z^2 + 2\bar{z} + 6 = 0$.

Megoldás: Legyen $z = a + bi$. Ekkor az egyenletünk így alakul:

$$(a^2 - b^2 + 2a + 6) + (2b(a - 1))i = 0.$$

Ez csak úgy lehet, hogy ha a valós és képzetes rész is nulla, azaz

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 2a + 6 &= 0 \\ 2b(a - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Az utóbbiból $b = 0$ vagy $a = 1$. A $b = 0$ esetben $a^2 + 2a + 6 = 0$, ami lehetetlen, mert $a \in \mathbb{R}$. Ezért $a = 1$ és ebből $9 - b^2 = 0$, vagyis $b = \pm 3$. Tehát a két megoldás: $z_{1,2} = 1 \pm 3i$.

7. Összeszoroztuk az összes n -edik egységgyököt. Mi lett az eredmény?

Megoldás: Legyenek $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ az összes n -ik egységgyökök. Ezek mind gyökei a $z^n - 1 = 0$ egyenletnek, és ennek más gyöke nincs, ezért

$$z^n - 1 = (z - \varepsilon_1)(z - \varepsilon_2) \cdots (z - \varepsilon_n).$$

A jobboldalon a zárójeleket felbontva egy olyan polinomot kell, hogy kapjunk, aminek a konstans tagja -1 . Viszont a konstans tagot akkor kapjuk, ha minden zárójelen belül a konstans tagot választjuk. Tehát

$$(-1)^n \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n = -1.$$

De ki is számolhatnánk: ha $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, akkor

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n = \cos \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k\pi}{n} \right),$$

hiszen szorzáskor a szögek összeadódnak. Itt a $\sin$ és $\cos$ hasában egy számtani sorozat van. Kiszámolva az összeget, és egyszerűsítve, ahol lehet, ezt kapjuk:

$$\cos(\pi(n-1)) + i \sin(\pi(n-1)).$$

Ez -1 , ha n páros, és 1 , ha n páratlan.

8. Határozd meg (algebrai alakban) a $z^{2010} = 3 + 7i$ egyenlet összes megoldásának szorzatát.

Megoldás: Legyenek a $z^{2010} - 3 - 7i = 0$ egyenlet megoldásai rendre $z_1, \dots, z_{2010}$. Ekkor tudjuk, hogy

$$(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{2010}) = z^{2010} - 3 - 7i.$$

A zárójeleket felbontva a polinom konstans tagját akkor kapjuk meg, ha minden tagból a konstans tagot választjuk a szorzáshoz, azaz $z_1 \cdot z_2 \cdots z_{2010} = -3 - 7i$, és ez az, amit meg kellett határozni.

Második megoldás. Ki is számolhatjuk: legyen $3 + 7i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Ekkor az egyenlet megoldásai:

$$\sqrt[2010]{3 + 7i} = \sqrt[2010]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2010} + k\frac{2\pi}{2010}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2010} + k\frac{2\pi}{2010}\right) \right), k = 0, 1, \dots, 2009.$$

Szorzáskor a hosszok szorozódnak és a szögek összeadódnak, így a fenti számok szorzata:

$$r \left(\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{2010}(0 + 1 + \dots + 2009)\right) + i \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{2010}(0 + 1 + \dots + 2009)\right) \right).$$

A számtani sorozatot összeadva, egyszerűsítve: $r(\cos(\varphi+2009\pi)+i\sin(\varphi+2009\pi))$. Nyilván $\cos(\varphi+2009\pi) = -\cos \varphi$ és $\sin(\varphi+2009\pi) = -\sin \varphi$, így a keresett szorzat $-3-7i$.

9. Mi a mértani helye a komplex számsíkon az $\frac{1+ti}{1-ti}$ alakú számoknak, ha $t \in \mathbb{R}$? És a $\frac{1+ti}{t+i}$ alakúaknak?

Megoldás: (a) Vegyük észre, hogy

$$\left| \frac{1+ti}{1-ti} \right| = \frac{|1+ti|}{|1-ti|} = 1,$$

ezért az egységsugarú körön helyezkednek el (valahogy). Írjuk át trigonometrikus alakba:

$$1+ti = r(\alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad \text{és} \quad 1-ti = r(\alpha)(\cos \alpha - i \sin \alpha).$$

Itt $r(\alpha)$ a szögtől függő hossz, ami egyébként $r(\alpha) = \sqrt{1+\tan^2 \alpha}$, de erre semmi szükség nem lesz.

$$\frac{r(\alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{r(\alpha)(\cos \alpha - i \sin \alpha)} = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{(\cos \alpha - i \sin \alpha)} = \frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2}{1} = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha.$$

Szóval a kérdéses pontok a $\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$ alakú komplex számok, ahol α befutja a valós számokat. Ez az egységsugarú kör.

(b) Megint,

$$\left| \frac{1+ti}{t+i} \right| = 1.$$

Átírva trigonometrikus alakba, azt kapjuk, hogy a keresett pontok

$$\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\sin \alpha + i \cos \alpha}$$

alakúak, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\sin \alpha + i \cos \alpha} &= \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\sin \alpha + i \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha - i \cos \alpha}{\sin \alpha - i \cos \alpha} \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - i(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{1} = \sin 2\alpha - i \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Ez szintén az egységsugarú kör.

10. Mi $|z|$, $|z_1 - z_2|$ és iz geometriai jelentése?

Megoldás: Ha $z = a + bi$, akkor $|z|$ az $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ síkvektor hossza. Ha z_1 -e és

z_2 -t mint a sík egy-egy pontját nézzük, akkor $|z_1 - z_2|$ ezen két pont távolsága. Az iz pedig a z pont kilencven fokkal való elforgatása. Általában, ha w egység hosszú komplex szám, akkor wz a z vektor $\arg(w)$ szöggel való elforgatottja.

11. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy z_1, z_2, z_3 egy egyenesbe essenek?

Megoldás: Akkor esnek egy egyenesre, ha a két különbségvektornak $z_1 - z_2$ -nek és $z_2 - z_3$ -nek az irányegyenese (szöge) megegyezik, vagyis egymás valós számszorosai. Azaz, ha van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, amire $z_1 - z_2 = \lambda(z_2 - z_3)$. Még egy picit alakítva: akkor, ha $\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \in \mathbb{R}$. Persze feltettük, hogy a nevező nem nulla.

12. Mely z komplex számokra lesz $\frac{z}{\bar{z}}$ tisztán képzetes?

Megoldás: $\frac{z}{\bar{z}}$ hossza 1, ezért, ha ez tisztán képzetes, az csak úgy lehet, ha

$$\frac{z}{\bar{z}} = i.$$

Ezt most megoldjuk. Legyen $z = a + bi$. Ekkor a $z = i\bar{z}$ egyenlet átírva $a + bi = i(a - bi)$, tovább alakítva

$$a + bi = b + ai.$$

Ez csak úgy lehet, ha $a = b$. Vagyis a keresett számok a $z = a + ai$ alakúak, ahol $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

13. Mely z komplex számokra lesz $z + \bar{z}^2$ valós?

Megoldás:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (a - bi)^2 &= a + bi + a^2 - 2abi - b^2 \\ &= (a^2 + a - b^2) + i(b - 2ab). \end{aligned}$$

Ez pontosan akkor valós, ha képzetes része nulla: $b - 2ab = 0$. Ebből pedig $b = 0$ vagy $a = \frac{1}{2}$.

14. Milyen pozitív egész n -re lesz valós a $(\sqrt{3} - i)^n$ szám?

Megoldás: Az, hogy valós-e egy komplex szám, nyilván nem függ a hosszától, csak a szögétől. Ezért nyugodtan lenormálhatjuk, mert úgy könnyebb vele számolni. $|\sqrt{3} - i| = 2$, ezért $(\sqrt{3} - i)^n$ pontosan akkor valós, ha

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^n$$

valós. Ráismerhetünk, hogy a zárójel hasában egy tizenkettedik egységgyök van, méghozzá, ha

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{12} + i \sin \frac{2k\pi}{12},$$

akkor pont ε_{11} . A kérdés tehát az, hogy ε_{11}^n milyen n -ekre lesz valós. Ez csak akkor valós, ha $\varepsilon_{11}^n = 1$. Ez egy primitív tizenkettedik egységgyök (a 12-ik hatványa lesz először egy), ezért azokra az n -ekre lesz 1, amik oszthatók 12-vel.

15. Mi a $z = (1 - i)^{2010} - i(1 + i)^{2012}$ komplex szám kanonikus alakja?

Megoldás: Először írjuk át trigonometrikus alakba a hatványozandó számokat:

$$\begin{aligned} 1 - i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ 1 + i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Ekkor a megfelelő hatványok:

$$\begin{aligned} (1 - i)^{2010} &= \sqrt{2}^{2010} \left(\cos \frac{2010\pi}{4} - i \sin \frac{2010\pi}{4} \right) \\ (1 + i)^{2012} &= \sqrt{2}^{2012} \left(\cos \frac{2012\pi}{4} + i \sin \frac{2012\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Mivel $2010 = 251 \cdot 8 + 2$ és $2012 = 251 \cdot 8 + 4$, ezért mint szögértékek $\frac{2010\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ és $\frac{2012\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Algebrai alakba visszaírva

$$\begin{aligned} (1 - i)^{2010} &= 2^{1005} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \\ (1 + i)^{2012} &= 2^{1006} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Akkor viszont

$$\begin{aligned} z &= 2^{1005} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) - i2^{1006} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) \\ &= 2^{1005} \left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) - 2i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) \right) \\ &= 2^{1005} \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 + 2\sqrt{3}}{2} \right), \end{aligned}$$

ha nem számoltam el.

16. Mutassuk meg, hogy egységgyökök szorzata is egységgyök. mi a feltétele annak, hogy egységgyökök összege is egységgyök legyen?

Megoldás: Vegyünk valahány egységgyököt: ε_i legyen $k(i)$ -ik egységgyök, ahol

$i = 1, \dots, \ell$. Azt kell megmutatni, hogy

$$z = \prod_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i$$

is egységgyök. Könnyen láthatóan, ha z -t a $K = \Pi_{i=1}^{\ell} k(i)$ -edik hatványra emeljük, akkor 1-et kapunk:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i \right)^K &= \varepsilon_1^K \cdots \varepsilon_{\ell}^K \\ &= \left(\varepsilon_1^{k(1)} \right)^{\frac{K}{k(1)}} \cdots \left(\varepsilon_{\ell}^{k(\ell)} \right)^{\frac{K}{k(\ell)}} \\ &= 1^{\frac{K}{k(1)}} \cdots 1^{\frac{K}{k(\ell)}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ezért a szorzat K -edik egységgyök lesz. Igazából elég lett volna a $k(i)$ számok legkisebb közös többszörösére emelnünk a szorzatot.

17. Legyen $z + z^{-1} = 2 \cos \alpha$. Mennyi $z^{2010} + z^{-2010}$?

Megoldás: Ha $z = a + bi$, akkor $z^{-1} = r(a - bi)$, ahol $r = \frac{1}{a^2 + b^2}$. A feltevés szerint $z + z^{-1} = 2 \cos \alpha$, azaz $z + z^{-1}$ egy valós szám. Ez azt jelenti, hogy $a + bi + r(a - bi)$ képzetes része nulla: $bi - rbi = 0$. Ez kétféleképpen lehet, vagy $b = 0$, vagy $r = 1$. Nézzük először a $b = 0$ esetet. Ekkor $z = a$ és $z^{-1} = \frac{1}{a}$ valós számok. Valós számok között ismerjük az

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

összefüggést (ami könnyen kijön a számtani-mértani közepekre tanult egyenlőtlenségből). Viszont $2 \cos \alpha \leq 2$. Ezért ebben az esetben $a = 1$ és $\cos \alpha = 1$. Akkor viszont $z^{2010} + z^{-2010}$ megegyezik $z + z^{-1}$ -el.

A másik esetben $r = 1$. Ez azt jelenti, hogy z egység hosszú. Írjuk át trigonometrikus alakba

$$\begin{aligned} z^{2010} + \frac{1}{z^{2010}} &= \cos 2010\vartheta + i \sin 2010\vartheta + (\cos \vartheta - i \sin \vartheta)^{2010} \\ &= \cos 2010\vartheta + i \sin 2010\vartheta + \cos 2010\vartheta - i \sin 2010\vartheta \\ &= 2 \cos 2010\vartheta. \end{aligned}$$

De az eredeti egyenlőség miatt $2 \cos \theta = 2 \cos \alpha$, ezért

$$z^{2010} + z^{-2010} = 2 \cos 2010\alpha.$$

18. Jellemezzük azon komplex (a, b) számpárokat, melyekre $a + b$, $ab \in \mathbb{R}$.

Megoldás: Legyen $a = x_1 + iy_1$ és $b = x_2 + iy_2$. A feltevés szerint

$$\begin{aligned} a + b &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \in \mathbb{R} \text{ és} \\ ab &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ezek valóságosak, akkor és csak akkor, ha a képzetes részüik nulla, vagyis

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= 0, \\ x_1y_2 + x_2y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Az első egyenlőség miatt $a = x_1 + iy$, $b = x_2 - iy$ alakú ($y = y_1 = -y_2$). A másodikból pedig az

$$y(x_2 - x_1) = 0$$

egyenlőséget kapjuk, amiből vagy $y = 0$, vagy $x_2 = x_1$. Ezért a következő alakú számokpárokat kapjuk:

$$(x + yi, x - yi),$$

ahol $x, y \in \mathbb{R}$.

19. Oldjuk meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán:

$$z^2 + (1 + i)\bar{z} + 4i = 0.$$

Megoldás: Legyen $z = a + bi$. Ekkor

$$\begin{aligned} z^2 + (1 + i)\bar{z} + 4i &= 0 \\ a^2 + 2abi - b^2 + (1 + i)(a - bi) + 4i &= 0 \\ a^2 + 2abi - b^2 + a - bi + ai + b + 4i &= 0. \end{aligned}$$

Akkor nulla, ha mind a valós mind a képzetes része is nulla

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + a + b &= 0 \\ 2ab - b + a + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Az első egyenlet nem más, mint $(a + b)(1 + a - b) = 0$, amiből következik, hogy $b = -a$ vagy $b = a + 1$. Ezeket behelyettesítve a másodikba:

Ha $b = -a$, akkor

$$\begin{aligned} 2ab - b + a + 4 &= 0 \\ -2a^2 + a + a + 4 &= 0 \\ a^2 - a - 2 &= 0. \end{aligned}$$

A megoldóképletből megkapunk a -ra két megoldást.

Ha pedig $b = a + 1$, akkor

$$\begin{aligned} 2ab - b + a + 4 &= 0 \\ 2a(a + 1) - (a + 1) + a + 4 &= 0 \\ 2a^2 + 2a + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Ennek nincsen megoldása.

20. Add meg algebrai alakban az alábbi egyenlet összes olyan komplex megoldását, amelynek mind a valós, mind a képzetes része negatív.

$$i \cdot z^6 = (7 + i)^2 + \frac{2 - 30i}{1 - i}$$

Megoldás: Számoljuk ki a jobb oldalt

$$\begin{aligned} (7 + i)^2 + \frac{2 - 30i}{1 - i} &= (7 + i)^2 + \frac{2 - 30i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} \\ &= (7 + i)^2 + \frac{2 + 1i - 30i + 30}{2} \\ &= 48 + 14i \frac{32 - 28i}{2} \\ &= 64. \end{aligned}$$

Most átosztunk i -vel ($\frac{1}{i} = -i$):

$$z^6 = -64i.$$

Írjuk át trigonometrikus alakba:

$$z^6 = 2^6 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$

Most hatodik gyököt vonunk. Még előtte, itt az általános képlet. Ha w komplex szám szöge α , akkor

$$\sqrt[n]{w} = \left\{ \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) : k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

Esetünkben $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, így

$$z \in 2 \cdot \left\{ \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6} : k = 0 \dots 5 \right\}.$$

Ezek egyébként a hatodik egységgyökök elforgatva $\frac{3\pi}{2}$ -el, és kétszeresre nyújtva. Már csak ki kell válogatni a feladatban kért tulajdonságúakat. Ehhez segítség az előző előtti mondat.

- 21.** Tegyük fel, hogy a z komplex számra teljesül, hogy z képzetes része nem 0, de a $z + \frac{1}{z}$ komplex szám képzetes része 0. Határozzuk meg $|z|$ -t.

Megoldás: Legyen $z = a + bi$ és számoljuk ki $z + z^{-1}$ képzetes részét.

$$a + bi + \frac{1}{a + bi} = a + bi + \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = a + \frac{a}{a^2 + b^2} + \left(b - \frac{b}{a^2 + b^2}\right)i.$$

A feltevés szerint tehát $b - \frac{b}{a^2 + b^2} = 0$, amit átalakítva a

$$b(1 - a^2 + b^2) = 0$$

összefüggéshez jutunk. Ekkor vagy $b = 0$ vagy $a^2 + b^2 = 1$. Az első lehetőség azonban nem lehetséges, mert a feladat szerint $b \neq 0$. Azt kaptuk, hogy $a^2 + b^2 = 1$, amiből $|z| = 1$ következik.

- 22.** A z komplex számról tudjuk, hogy $|z| = 1$ és, hogy a $z - iz$ komplex szám képzetes része 0. Határozzuk meg z^8 értékét.

Megoldás: Ha $z = a + bi$ akkor $a + bi - i(a + bi) = (a - b) + (b - a)i$, ezért az $\text{Im}(z - iz) = 0$ feltevés miatt $b = a$. A számunk tehát $a + ai$ alakú. De azt is tudjuk, hogy $|z| = 1$, ezért $2a^2 = 1$ és így $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tehát két ilyen z szám van:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{és} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Mind a kettő nyolcadik egységgyök, ezért $z^8 = 1$.

- 23.** Hol helyezkednek el a komplex számsíkon azon z komplex számok, melyekre

- (a) $\text{Im}(4i - z) = 6$;
 (b) $\text{Re}(iz + 5) \leq 7$;
 (c) $|z - 1 + 2i| < 13$;
 (d) $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Megoldás:

(a) $\text{Im}(4i - a - bi) = 4 - b = 6$, amiből $b = -2$. A keresett számok az X tengellyel párhuzamos, $(0, -2)$ ponton átmenő egyenes pontjai.

(b) $\text{Re}(i(a + bi) + 5) = 5 - b \leq 7$, amiből $b \geq -2$. A keresett pontok az X tengellyel párhuzamos, $(0, -2)$ ponton átmenő egyenesen, vagy felette vannak.

(c) Ezt geometriailag könnyebb látni, mint kiszámolni. A $|w| < R$ az origó középpontú, R sugarú kör belseje. A $|w - p| < R$ pedig a p -vel eltoltt ilyen kör, vagyis a p ponttól kisebb mint R távolságra levő pontok. A feladatban $|z - (1 - 2i)| < 13$ az $1 - 2i$ középpontú, 13 sugarú kör belseje.

(d) Átszorozva $z\bar{z} = 1$, vagyis $|z| = 1$. Ez az egységsugarú kör íve.

- 24.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

- (a) $z^2 + 3 = 0$ (á) $z^2 = i|z|$ (b) $z^2 = iz$
 (c) $|z| = 2z + i$ (cs) $z^2 - 5 + 12i = 0$ (d) $z^4 - 3z^2 - 1 = 0$
 (dz) $z^2 - 12z + 13 - 4i = 0$ (dzs) $\sqrt{z} = z^{2010}$ (e) $z + \sqrt{z} = 2|z|$
 (é) $z + \bar{z} = 2|z|$ (f) $\bar{z} = z^{2010}$ (g) $z^2 + z + 1 = 0$
 (gy) $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$ (h) $\frac{1}{iz} = \bar{iz}$ (i) $1 + iz - z^2 = 0$
 (í) $z(1 + i) - \bar{z}(1 - i) = 2i$ (j) $2z + 3\bar{z} = 5 + 2i$ (k) $(2 + i)z^3 = -9 + 3i$

Megoldás:

(a) $z^2 + 3 = 0$. Átrendezve: $z^2 = -3$, és akkor " $z = \sqrt{3}\sqrt{-1}$ ". Mivel i és $-i$ négyzete is -1 , ezért $z = \pm i\sqrt{3}$.

(á) $z^2 = i|z|$. Az egyenlet jobb oldala pusztán képzetes (mert $|z|$ valós), ezért az Y tengelyen fekszik. Olyan z -t keresünk tehát, amelyik négyzete (azaz a szögének megduplázásával kapott, megnyújtott vektor) az Y tengelyre esik. Mekkora lehet a hossza? Egyrészt a jobb oldal hossza: $|i|z| = |z|$, míg a bal oldal hossza: $|z^2| = |z|^2$, azaz a hosszakra kapjuk, hogy $|z|^2 = |z|$, amiből $|z| = 1$ vagy $|z| = 0$. A $|z| = 0$ -ból kapjuk a $z = 0$ megoldást. Ha pedig $|z| = 1$, akkor egy egységvektorral van dolgunk. Ráadásul egy olyan egységvektorral, melynek ha szögét megduplazzuk, akkor éppen $\frac{\pi}{2}$ -et kapunk. Ezért $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ illetve $\pi + \frac{\pi}{4}$. A megoldások trigonometrikus alakban:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \\ z_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right). \end{aligned}$$

(b) $z^2 = iz$. Átrendezve: $z^2 - iz = z(z - i) = 0$, amiből $z = 0$ vagy $z = i$. (Szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla).

(c) $|z| = 2z + i$. Itt a bal oldal egy valós szám, ezért a jobb oldalnak is valósnak kell lennie. Ha $z = a + bi$, akkor ez azt jelenti, hogy $2(a + bi) + i \in \mathbb{R}$, azaz a képzetes része nulla: $2bi + i = 0$, amiből $b = -\frac{1}{2}$. Most beírva $z = a - \frac{1}{2}i$ -t az egyenletbe kapjuk, hogy $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} = 2a$, ami már egy sima valós egyenlet. Ezt megoldva megkapjuk a lehetséges értékeit.

(cs) $z^2 - 5 + 12i = 0$. Átrendezve $z^2 = 5 - 12i$, ezért a feladat nem más mint $\sqrt{5 - 12i}$ (két) értékének meghatározása. Ez a szokásos módon megy: trigonometrikus alakba írjuk, és aztán kifejezzük a gyököket:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \right) : k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

(d) $z^4 - 3z^2 - 1 = 0$. Helyettesítsük z^2 -et w -vel. Ekkor a $w^2 - 3w - 1 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk w -re, amit megoldva (mondjuk a megoldóképlettel) kapjuk, hogy

$$w_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Ezért az eredeti egyenlet így írható:

$$\left(z^2 - \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(z^2 - \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) = 0$$

A szorzat akkor nulla, ha valamelyik tag nulla, így kaptunk két egyenletet. Ezek másodfokú egyenletek z -re, azaz két-két megoldást várunk. Mindkét esetben egy konkrét szám gyökeit kell kiszámítani, ami ugyan úgy megy, mint eddig.

(dz) $z^2 - 12z + 13 - 4i$. A másodfokú egyenlet megoldóképletével:

$$z_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(13 - 4i)}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{92 + 16i}}{2}.$$

Igy megint csak a $\sqrt{92 + 16i}$ két értékének a meghatározása a feladat, ami ugyan úgy megy, mint eddig (trigonometrikus alak).

(dzs) $\sqrt{z} = z^{2010}$. Mekkora lehet z hossza? A hossza kapjuk, hogy $|\sqrt{z}| = |z^{2010}|$, azaz $\sqrt{|z|} = |z|^{2010}$, ami egy valós egyenlet, aminek két megoldása van: $|z| = 0$ vagy $|z| = 1$. Ha $|z| = 0$, akkor $z = 0$ ami valóban megoldás. Ha pedig $|z| = 1$, akkor megint az egységgyökök között keresgélünk: $z = z^{2 \cdot 2010}$, amiből $z^{4019} = 1$, így pont a 4019-ik egységgyököket kapjuk.

(e) $z + \sqrt{z} = 2|z|$. Helyettesítsük $\sqrt{z}$ -t w -vel. A végén majd figyelni kell, mert $\sqrt{z}$ -nek két értéke van. Ekkor kapjuk, hogy $w^2 + w = 2|w|^2 = 2|w|^2$. A jobb oldal megint valós szám, így muszáj, hogy a bal oldal is az legyen. Ezért ha $w = a + bi$, akkor kapjuk, hogy $a^2 + 2abi - b^2 + a + bi \in \mathbb{R}$, amiből $2abi + bi = 0$, azaz $b = 0$ vagy $a = -\frac{1}{2}$. Mindkét esetben visszaírva $a + bi$ -t az eredeti egyenletbe, kapunk egy egyenletet a -ra ill. b -re.

(é) $z + \bar{z} = 2|z|$. $2a = 2\sqrt{a^2 + b^2}$, $a^2 = a^2 + b^2$, $b = 0$. Akkor viszont ez egy valós egyenlet: $2a = 2a^2$.

(f) $\bar{z} = z^{2010}$. Trigonometrikus alakba átírva

$$r(\cos \alpha - i \sin \alpha) = r^{2010}(\cos 2010\alpha + i \sin 2010\alpha).$$

Mivel $r = r^{2010}$ ezért a hossza vagy nulla, vagy egy. A $z = 0$ jó megoldás lesz. Ha pedig egységvektor, akkor olyat keresünk, mit ha 2010-szer a saját szögével

elforgatunk, akkor pont az X -tengelyre vett tükörképét kapjuk. Másszóval, olyan α -t keresünk, amire $\cos \alpha = \cos 2010\alpha$ és $\sin \alpha = -\sin 2010\alpha$.

(g) $z^2 + z + 1 = 0$. Másodfokú megoldóképlettel

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

gy $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$. Ha egy z komplex szám kielégíti ezt az egyenletet, akkor a konjugáltja is, mert az együtthatók valósak. Ezt könnyű látni ha például mindkét oldal konjugáltját vesszük. Szóval, ha z megoldás, akkor erre a z -re teljesül a $\bar{z}^2 + 2z + 1 = 0$ egyenlet. Vonjuk ki a kettőt egymásból:

$$(z^2 - \bar{z}^2) + 2(\bar{z} - z) = 0.$$

Beírva $z = a + bi$ -t kapjuk, hogy

$$4abi + 2(-2bi) = 0.$$

Tehát $4abi = 4bi$, amiből $b = 0$ vagy $a = 1$. Mindkét esetben az eredeti egyenletből kapunk egy valós számokra vonatkozó egyenletet. A $b = 0$ -ból:

$$a^2 + 2a + 1 = 0.$$

Az $a = 1$ -ből:

$$(1 + bi)^2 + 2(1 - bi) + 1 = 0.$$

Mindkettőt a szokásos módon már meg lehet oldani.

(h) $\frac{1}{iz} = \bar{iz}$. Átszorozva $(iz)(\bar{iz}) = 1$, másképp $|iz| = 1$. Mivel $|i| = 1$ ezért $|z| = 1$. Tehát az egységkörív pontjai elégítik ki az egyenletet.

(i) $1 + iz - z^2 = 0$. Megoldóképlettel

$$z_{1,2} = \frac{i \pm \sqrt{(-i)^2 + 4}}{2} = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2}.$$

(í) $z(1 + i) - \bar{z}(1 - i) = 2i$. Legyen $w = z(1 + i)$. Ekkor az egyenlet így alakul: $w + \bar{w} = 2i$. Ha $w = a + bi$, akkor $2bi = 2i$ amiből kapjuk, hogy $b = 1$. Visszaírva w definíciójába: $a + i = z(1 + i)$, amiből

$$z = \frac{a + i}{1 + i}$$

megoldások adódnak.

(j) $2z + 3\bar{z} = 5 + 2i$. $2a + 2bi + 3a - 3bi = 5 + 2i$, $5a - bi = 5 + 2i$, $a = 1$, $b = -2$.
 $z = 1 - 2i$.

(k) $(2 + i)z^3 = -9 + 3i$. Átrendezve

$$\begin{aligned} z^3 &= \frac{-9 + 3i}{2 + i} \\ &= \frac{-9 + 3i}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i} \\ &= \frac{-15 + 15i}{5} \\ &= -3 + 3i \end{aligned}$$

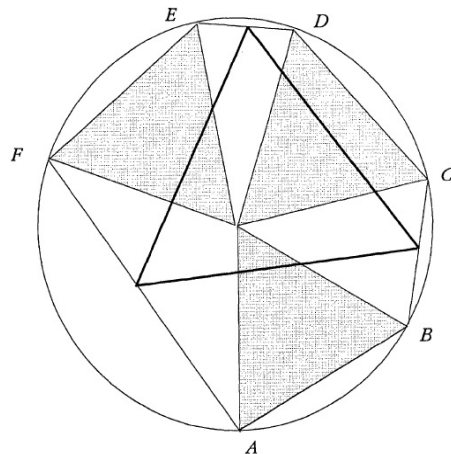
Átírjuk trigonometrikus alakba:

$$-3 + 3i = 3\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ),$$

és ebből már tudunk harmadik gyököt vonni.

25. Egy kör alakú mackósajt dobozban a hat darab egyforma körcikk alakú sajtból már csak három maradt. Mindhárom saj csúcsa a doboz középpontjában van, de egyébként tetszőlegesen helyezkednek el. Tekintsük a szomszédos sajtok közötti üres íveket, és mindháromra vegyük az ív végpontjait összekötő egyenes szakasz felezőpontját. Igazoljuk, hogy ez a három pont egy szabályos háromszöget alkot.

Megoldás: Helyezzük el a mackósajt dobozt a komplex számsíkon úgy, hogy a



közepe az origó legyen. Legyen z_1 az ábrán látható A csúcsnak megfelelő komplex szám, és hasonlóan z_2 és z_3 tartozzék a C és E csúcsokhoz. Legyen továbbá ε az

első hatodik egységgyök, $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$. Az ε -nal szorzás megfelel a 60° -os elforgatással. Azt kell bizonyítani, hogy $\varepsilon z_1 + z_2$, $\varepsilon z_2 + z_3$ és $\varepsilon z_3 + z_1$ egy szabályos háromszög csúcsai. Ez egyenértékű azzal, hogy a megfelelő oldalak megkaphatók egymásból egy 120° -os elforgatás után, vagyis le kell ellenőrizni, hogy

$$(\varepsilon z_3 + z_1) - (\varepsilon z_2 + z_3) = \varepsilon^2((\varepsilon z_2 + z_3) - (\varepsilon z_1 + z_2))$$

vagy

$$(\varepsilon z_1 + z_2) - (\varepsilon z_3 + z_1) = \varepsilon^2((\varepsilon z_2 + z_3) - (\varepsilon z_3 + z_1)).$$

Mindkettő könnyű számolással adódik az $\varepsilon^3 = -1$ és $\varepsilon - \varepsilon^2 = 1$ felhasználásával.

Megjegyzés: sehol nem használtuk fel, hogy a sajtszeleteknek megfelelő háromszögek nincsenek átfedésben egymással.

26. Összeadtuk az összes n -edik egységgyököt. Mi lett az eredmény?

Megoldás: Ha $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ az n -ik egységgyökök, akkor

$$z^n - 1 = (z - \varepsilon_1) \cdots (z - \varepsilon_n).$$

A jobb oldalon a zárójeleket kibontva z^{n-1} együtthatóját (előjeltől eltekintve) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$ féleképpen lehet megkapni. Viszont a bal oldalon z^{n-1} együtthatója nulla, ezért az n -ik egységgyökök összege is nulla. Ez egyébként páros n esetén geometriailag is látszik: minden egységgyöknek szerepel a negatívja is.

27. Van-e a 9-ik egységgyökök között hat, melynek összege 0?

Megoldás: Legyen $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{9} + i \sin \frac{2k\pi}{9}$ a k -ik kilencedik egységgyök. Ekkor ε_1 40° -os szöget zár be. Látható, hogy ε_3 , ε_6 és ε_9 mind harmadik egységgyökök is. Ezért $\varepsilon_3 + \varepsilon_6 + \varepsilon_9 = 0$. A maradék hat egységgyök jó lesz. Ezek összege azért nulla, mert az összes összege is nulla kell, hogy legyen.

28. Hol a hiba a következő "levezetésben"?

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$$

Megoldás: A hiba ott van, hogy $\sqrt{-1}$ egy halmaz, nem pedig egy szám, ti. minden nem nulla számnak két gyöke van a komplexek körében. Ezért a harmadik és negyedik egyenlőség értelmetlen.

1. Hányféleképpen sorakozhat fel egy állatidomár mögött egy oroszlán, egy tigris és egy jegesmedve? És ha még egy pingvin is van?
2. Egy emeletes ház szintjeit szeretnénk kifesteni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha piros, kék és sárga festékünk van és
 - (a) két emelet van; (b) három emelet van; (c) 20 emelet van;
 - (d) 20 emelet van és szomszédos szintek nem lehetnek egyszínűek?
3. Hányféleképpen tehetünk fel egy sakktáblára
 - (a) egy fekete és egy fehér bástyát; (b) két fehér bástyát;
 - (c) egy fekete, egy fehér és egy zöld bástyát; (d) három fehér bástyát?
4. A cukrászdában húszféle fagyí közül lehet választani. Hányféleképpen ehetünk három gombócot, ha esetleg többet is eszünk ugyanabból a fajtából és
 - (a) tölcsérbe kérjük (a sorrend számít),
 - (b) helybe kérjük (a sorrend nem számít)?
 És ha csak különbözőt veszünk?
5. (a) Hány 8-jegyű szám van?
 (b) Hány olyan 8-jegyű szám van, melynek szomszédos jegyei különbözők?
 (c) Hány olyan 8-jegyű szám van, melynek számjegyei között nem szerepel a 7-es?
 (d) Hány olyan 8-jegyű szám van, melynek számjegyei között szerepel a 7-es?
6. Hány olyan 5-tel osztható hatjegyű szám van, amelyben a számjegyek nem ismétlődnek?
7. Hányféleképp állhat egy sorba 4 lány és 4 fiú, ha felváltva kell állniuk?
8. Hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz 7 ember? És ha Kilián, Krizosztom és Liboriusz egymás mellé akarnak ülni? (Két ülémódot nem tekintünk különbözőnek, ha mindenkinek ugyanaz a két szomszédja).
9. Hányféleképpen oszthatunk szét az óvodában 25 gyerek közt 10 csokit, 6 rágót és 9 jégkrémet igazságosan? És nem feltétlenül igazságosan?
10. Hányféleképpen választhatunk ki három különböző 1 és 30 közötti egész számot úgy, hogy ezek összege páros legyen?
11. Hányféleképpen lehet kiosztani az 52 lapos franciákártya-csomagot 4 játékosnak úgy, hogy mindenki 13 lapot kapjon és egy kiválasztott játékos pontosan 2 ászt és 5 pikket kapjon?
12. Mik azok a természetes számok, amik végtelen sokszor fordulnak elő a Pascal-háromszögben?
13. Az $1, \dots, 9$ számokat felírtuk egy-egy cédulára és egy kalapba tettük. Hányféleképpen lehet egyszerre ötöt kihúzni úgy, hogy a számok szorzata osztható legyen 5-tel.
14. Hányféleképpen lehet eljutni az origóból a $(2, 3, 5)$ pontba úgy, hogy csak egységnyi hosszú jobbra, fel és előre lépések lehetségesek?
15. Hány n hosszú 01 sorozat van? Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak? Mennyi $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$?
16. Bizonyítsd be, hogy egy n elemű halmaznak ugyan annyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan. Mennyi $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$?
17. Egy n elemű halmaznak legfeljebb hány részhalmaza adható meg úgy, hogy semmelyik kettő metszete se legyen üres?
18. Igazold, hogy $\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$.
19. Hány éle van egy n csúcsú teljes gráfnak?
20. Van-e olyan legalább két pontú gráf, melyben minden pont foka különböző?
21. Igazold, hogy véges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros. És végtelen gráfban?
22. Igaz-e, hogy egy gráf, vagy a komplementere összefüggő? (Itt a 'vagy' nem kizáró-vagy!)
23. Határozzuk meg az összes, páronként nem izomorf egyszerű gráfot, melyre
 - (a) $v = 4, e = 5$ (b) $v = 5, e = 3$ (c) $v = 5, e = 7$ (d) $v = 5, e = 8$
 - (e) $v = 5$, minden pont foka legalább 3.
24. Van-e olyan egyszerű gráf, melyben a pontok foka rendre
 - (a) 1, 2, 2, 3, 3, 3 (b) 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4 (c) 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7
 - (d) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6 (e) 1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9 (f) 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7
 - (g) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6.
25. Rajzoljunk a komplementerével izomorf 5 csúcsú illetve 6 csúcsú gráfot (ha van)!
26. Lehet-e egy 366 csúcsú gráf izomorf a komplementerével?
27. Melyek azok a gráfok, melyekben bármely két élnek van közös pontja?
28. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráfban minden pont foka legalább kettő, akkor a gráfban van kör. Ha minden pont foka legalább három, akkor van benne páros hosszúságú kör.
29. Legyen Δ egy fában a maximális foksám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a fa legalább Δ darab első fokú csúcsot tartalmaz!
30. Egy adott $n \times k$ méretű csokoládéból hányféle kisebb csokoládét lehet csinálni? (Csak törni lehet).

1. Hányféleképpen sorakozhat fel egy állatidomár mögött egy oroszlán, egy tigris és egy jegesmedve? És ha még egy pingvin is van?

Megoldás: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$, ha pingvin is van, akkor $4!$.

2. Egy emeletes ház szintjeit szeretnénk kifesteni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha piros, kék és sárga festékünk van és

- (a) két emelet van; (b) három emelet van; (c) 20 emelet van;
(d) 20 emelet van és szomszédos szintek nem lehetnek egyszínűek?

Megoldás: (a) Egy emeletet a többitől függetlenül háromféle színnel festhetünk ki, ami 3^2 lehetőséget jelent.

- (b) 3^3 (c) 3^{20} .

(d) Az első szintet háromféle színnel festhetem ki, minden más szintet pedig kétfélével. Könnyű meggondolni, hogy így az összes lehetőséget pontosan egyszer számoltuk (nem okoz gondot az, hogy az első szintnél választottunk háromféle szín közül, és nem mondjuk a hetedik szintnél). A megoldás tehát $3 \cdot 2^{19}$.

3. Hányféleképpen tehetünk fel egy sakktáblára

- (a) egy fekete és egy fehér bástyát; (b) két fehér bástyát;
(c) egy fekete, egy fehér és egy zöld bástyát; (d) három fehér bástyát?

Megoldás: (a) Mivel megkülönböztethető a két bástya, ezért gondolkozhatunk így: az elsőt letehetjük 64-féle helyre, a másodikat pedig már csak 63-féle helyre. Tehát $64 \cdot 63$.

(b) Itt már nincs sorrendje a bástyák letételének. Ha különböző színűek lennének, akkor $64 \cdot 63$ lenne az eredmény. Viszont ha megcserélem a lerakott két bástyát, akkor az ugyan annak a lerakásnak felel meg. Összesen $2!$ féleképpen tudom megcserélni a két bástyát, ezért az eredmény: $\frac{64 \cdot 63}{2!}$. Másképp gondolkozva: ki kell választanom a 64 mezőből kettőt, ahova lerakom a bástyákat. Erre pont $\binom{64}{2}$ lehetőségem van.

- (c) $64 \cdot 63 \cdot 62$. (d) $\frac{64 \cdot 63 \cdot 62}{3!}$;

4. A cukrászdában húszféle fagyí közül lehet választani. Hányféleképpen ehetünk három gombócot, ha esetleg többet is eszünk ugyanabból a fajtából és

- (a) tölcsérbe kérjük (a sorrend számít),
(b) kehelybe kérjük (a sorrend nem számít)?

És ha csak különbözőt veszünk?

Megoldás:

- (a) Hárommat választok, és mindegyik húszféle lehet: 3^{20} .

- (b) $\binom{20+3-1}{3}$, ezt a táblázatbejárásos vagy az elválasztós módszerrel lehet bizonyítani.

- (c) Ha csak különbözőket veszünk és a sorrend számít, akkor $\frac{20!}{(20-3)!}$.

- (d) Kiválasztom a három különböző fagyilaltot a húszból: $\binom{20}{3}$.

Egy összefoglaló táblázatban

n -ből k -t	sorrend nem számít	sorrend számít
ismétlés nélkül	$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ismétléssel	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

5. (a) Hány 8-jegyű szám van?

(b) Hány olyan 8-jegyű szám van, melynek szomszédos jegyei különbözők?

(c) Hány olyan 8-jegyű szám van, melynek számjegyei között nem szerepel a 7-es?

(d) Hány olyan 8-jegyű szám van, melynek számjegyei között szerepel a 7-es?

Megoldás:

(a) Amire figyelni kell, hogy nullával nem kezdődhet egy szám. Ezért az első helyre (legnagyobb helyérték) 9-féle számjegyet tehetek, minden más helyre pedig tízfélét. Az eredmény: $9 \cdot 10^7$.

(b) Mint az előbb, most is 9 féle számjegyet tehetek a legnagyobb helyértékre, és minden más helyre is 9 félét, hiszen le van tiltva az a szomszéd, amit már letettem. Tehát: 9^8 .

(c) Első helyre nem tehetek 0-t és 7-est, a többi helyre pedig bármit, csak 7-est nem. Ezért $8 \cdot 9^7$.

(d) Ha a nyolcjegyű számok halmazából kivonjuk a 7-est tartalmazó nyolcjegyű számokat, akkor a maradék pont az, amit meg kellene számolni. Vagyis „jó = összes - rossz” alapon kapjuk, hogy $9 \cdot 10^7 - 8 \cdot 9^7$.

6. Hány olyan 5-tel osztható hatjegyű szám van, amelyben a számjegyek nem ismétlődnek?

Megoldás: A szám hatjegyű, ezért első jegye nem lehet 0, és osztható 5-tel, ezért utolsó jegye csak 0 vagy 5 lehet. Ezt a két esetet külön érdemes számolni. Nézzük meg, hányféle lehet, ha az utolsó jegye 5. Ekkor az első jegy lehet 8 féle mert 0 és 5 nem lehet. A második megint 8 mert 5 és az első jegy nem lehet. A következő 7 féle, majd 6 és 5, összesen $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1$. Ha az utolsó jegy 0, az ehhez teljesen hasonlóan megy. Az első jegy 9 féle lehet mert csak a 0-át kell kizárni, az összes lehetőség $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1$.

Összesen tehát $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1$ ilyen szám van.

7. Hányféleképp állhat egy sorba 4 lány és 4 fiú, ha felváltva kell állniuk?

Megoldás: Mivel az, hogy a lányok és a fiúk milyen sorrendben állnak, az egymástól teljesen független, ezért külön is kezelhetjük őket. Lányok egymást közt $4!$ féleképpen állhatnak sorrendben, fiúk szintén. Ez eddig $4! \cdot 4!$ féle sorrend, de még meg kell szorozni 2-vel, hisz lány is, fiú is kezdheti a sort. Összesen $2 \cdot 4! \cdot 4!$ féleképpen állhatnak sorrendbe.

8. Hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz 7 ember? És ha Kilián, Krizosztom és Liboriusz egymás mellé akarnak ülni? (Két ülémódot nem tekintünk különbözőnek, ha mindenkinek ugyanaz a két szomszédja).

Megoldás: Egy adott ülésrend nem változik meg, ha elforgatjuk, vagy tükrözzük. Az elforgatások és tükrözések egymás utáni végrehajtása megkapható hét elforgatás és két

tükrözés segítségével (azaz ha valaki másra tükröznénk, azt megkaphatjuk egy elforgatással és az eredeti tükrözéssel). Ezért az összes sorrendet ezek a transzformációk 7 ill. 2 elemű ekvivalenciaosztályokra bontják. Vagyis a megoldás: $\frac{7!}{7 \cdot 2}$.

Ha Kilián, Krizosztom és Liboriusz egymás mellé akarnak ülni, akkor először őket egy emberként kezeljük, leültetünk mindenkit, majd megnézzük, hogy ők hárman hányféle sorrendben lehetnek. Tehát először 5-en leülnek a kör alakú asztalhoz (az egyik virtuális ember a három megnevezett személy). Ez lehet $\frac{5!}{14}$ féle. Majd ezt meg kell szorozni $3!$ -al.

9. Hányféleképpen oszthatunk szét az óvodában 25 gyerek közt 10 csokit, 6 rágót és 9 jégkrémet igazságosan? És nem feltétlenül igazságosan?

Megoldás: Az igazságos szétosztáskor minden gyerek pontosan egy édességet kap. Először kiválasztjuk, hogy melyik 10 gyerek kap csokit: ez 25 különböző elemből 10 kiválasztása, tehát erre $\binom{25}{10}$ lehetőségünk van. A maradék 15 gyerekből kiválasztjuk azt a 6-ot, akik rágót kapnak: $\binom{15}{6}$. Mindenki másnak jégkrémet adunk (íratnánk, hogy $\binom{9}{9}$). Ezek független választások voltak, így $\binom{25}{10} \binom{15}{6}$ lehetőség van.

A nem feltétlenül igazságos szétosztásnál egy gyerek több édességet is kaphat. A 10 csokit $\binom{25+10-1}{10}$ féleképpen választhatom ki, mert egy gyerek többször is kaphat. A többi eset hasonlóan számolható ki. Az eredmény $\binom{34}{10} \binom{30}{6} \binom{33}{9}$.

10. Hányféleképpen választhatunk ki három különböző 1 és 30 közötti egész számot úgy, hogy ezek összege páros legyen?

Megoldás: Három ilyen számból 0 vagy 2 lehet páratlan. Az előbbi esetben 15 páros számból kell hármat kiválasztani, ez $\binom{15}{3}$ lehetőség. A második esetben pedig a 15 páros számból kell kettőt, a 15 páratlan számból pedig (az előzőektől függetlenül) egyet választani, ez $\binom{15}{2} \binom{15}{1}$. Összesen tehát $\binom{15}{3} + \binom{15}{2} \binom{15}{1}$ lehetőség van.

11. Hányféleképpen lehet kiosztani az 52 lapos franciákártya-csomagot 4 játékosnak úgy, hogy mindenki 13 lapot kapjon és egy kiválasztott játékos pontosan 2 ászt és 5 pikket kapjon?

Megoldás: Két esetre osztjuk a leszámítást, aszerint, hogy a kiválasztott játékos (legyen ez a továbbiakban X) megkapja-e a pikk ászt, vagy sem.

Ha nem, akkor $\binom{3}{2}$ féleképpen választhatunk két ászt, majd $\binom{12}{5}$ féleképp választhatunk 5 pikket a maradék 12 pikk közül. X további lapjait (6 darab) úgy választhatjuk, hogy sem pikk sem ász nem lehet. Ilyen lapból $54 - 13 - 4 + 1$ van, így a lehetőségek száma $\binom{36}{6}$. A másik három játékosnak a maradék 39 lapból választhatuk: $\binom{39}{13} + \binom{39-13}{13} + \binom{39-13-13}{13}$.

A másik esetben X megkapja a pikk ászt. Ezek után $\binom{3}{1}$ féleképpen kaphat még egy ászt és $\binom{12}{4}$ féleképp még 4 pikket. A többi lapjait pedig $\binom{36}{7}$ féleképpen. A másik három játékos ugyan úgy mint az előbb...

A megoldás tehát:

$$\left[\binom{3}{2} \binom{12}{5} \binom{36}{6} + \binom{3}{1} \binom{12}{4} \binom{36}{7} \right] \binom{39}{13} \binom{26}{13} \binom{13}{13}.$$

12. Mik azok a természetes számok, amik végtelen sokszor fordulnak elő a Pascal-háromszögben?

Megoldás: Vegyük észre, hogy ha $k > 1$ akkor $\binom{k}{i} > k$ minden i -re, ezért a k szám nem fordulhat elő a Pascal-háromszög k -ik sora alatt. Azt kaptuk tehát, hogy csak az 1 forduló végtelen sokszor.

13. Az $1, \dots, 9$ számokat felírtuk egy-egy cédulára és egy kalapba tettük. Hányféleképpen lehet egyszerre ötöt kihúzni úgy, hogy a számok szorzata osztható legyen 5-tel.

Megoldás: A számok szorzata pontosan akkor lesz osztható öttel, ha az 5-ös számjegyet kihúztuk. Az összes lehetséges húzások száma $\binom{9}{5}$ és ezek közül rossz az, amiben nem szerepel az ötös. Ez utóbbiak száma $\binom{8}{5}$. Vagyis a megoldás $\binom{9}{5} - \binom{8}{5}$.

14. Hányféleképpen lehet eljutni az origóból a $(2, 3, 5)$ pontba úgy, hogy csak egységnyi hosszú jobbra, fel és előre lépések lehetségesek?

Megoldás: Az X tengelyen kettőt kell pozitív irányba lépni, hármat az Y tengely pozitív irányába és ötöt a Z tengelyen. Ezeket a lépéseket ugyanakkor bármilyen sorrendben megtehetjük. Ez tehát annyi lehetőség, ahány sorrendje van 10 olyan elemnek, melyből 2, 3 illetve 5 azonos típusú (megkülönböztethetetlen). Ezért a válasz $\frac{10!}{2!3!5!}$.

15. Hány n hosszú 01 sorozat van? Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak? Mennyi $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$?

Megoldás: Az n hosszú 01 sorozat minden egyes helyén kétféle lehetőség közül választhatok. Az egyes választások függetlenek, ezért 2^n lehetőség van.

Egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van. Erre mutatunk két megoldást is.

Első megoldás: Egy adott részhalmazt úgy kaphatunk meg, hogy minden egyes elemről eldöntjük, hogy benne van-e a részhalmazban, vagy sem. Ez n független döntés, mindig kétfajta lehetőséggel. Tulajdonképpen a részhalmazok karakterisztikus függvényeit, mint $0 - 1$ sorozatokat számoltuk össze.

Második megoldás: Minden részhalmaz valahány elemű. A k elemű részhalmazok száma (definíció szerint) $\binom{n}{k}$, vagyis ha összeadom a 0-elemű, az 1-elemű, ..., az n -elemű részhalmazok számát, akkor megszámláltam mindent. A binomiális tétel szerint kapjuk, hogy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^n.$$

16. Bizonyítsd be, hogy egy n elemű halmaznak ugyan annyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan. Mennyi $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$?

Megoldás: Legyen az n elemű halmazunk páros elemszámú részhalmazából álló halmaza A és a páratlan elemszámúakéból álló pedig B . Keressünk egy kölcsönösen

egyértelmű leképezést A -ból B -be, vagyis állítsuk párba a páros és páratlan elemszámú részhalmazokat. Ezt a következő ötlettel lehet megtenni: egy páratlan halmazhoz vegyünk hozzá egy rögzített elemet. Így kapunk egy páros elemszámút. Kicsit kell azzal vacakolni, hogy mi van, ha ez a rögzített elem már eleve benne van a halmazban.

Másként: A páros elemű részhalmazok száma: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$, a páratlanoké pedig: $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$. Azt kell tehát megnézni, hogy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

Átrendezés és a binomiális tétel után kapjuk, hogy

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \pm \dots = (1 - 1)^n = 0^n = 0.$$

17. Egy n elemű halmaznak legfeljebb hány részhalmaza adható meg úgy, hogy semmelyik kettő metszete se legyen üres?

Megoldás: Legyen A a szóban forgó n elemű halmaz, és rögzítsünk egy $x \in A$ elemét. Összesen 2^{n-1} olyan részhalmaz található A -ban, amikben x szerepel, hiszen x -et a lehetséges 2^n darab részhalmaz fele tartalmazza. Ezen részhalmazok közül persze bármely kettő metszete nem üres, hisz x -et tartalmazza.

Többet viszont nem lehet megadni. Ennek az az oka, hogy ha a kiválasztott részhalmazok között szerepel egy $B \subseteq A$ halmaz, akkor $A \setminus B$ biztosan nincs kiválasztva. Tehát egy részhalmaz és a komplementere közül pontosan az egyiket lehet csak kiválasztani. Emiatt az egymást páronként metsző halmazokból álló halmazrendszer legfeljebb a részhalmazok felét, azaz 2^{n-1} részhalmazt tartalmazhat.

18. Igazold, hogy $\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$.

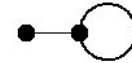
Megoldás: Legyen A és B r illetve s elemű diszjunkt halmazok. Ekkor $|A \cup B| = r + s$. Számoljuk össze, hogy hányféleképpen lehet kiválasztani $A \cup B$ -ből n elemet. Ez egyrészt $\binom{r+s}{n}$, ami az egyenlőség jobb oldala. Másrészt úgy is gondolkodhatunk, hogy először kiválasztunk A -ból k elemet, és B -ből a maradék $n - k$ elemet. Ez rögzített k -ra $\binom{r}{k} \binom{s}{n-k}$ lehetőség. Viszont k lehet nullától n -ig bármi; ezeket a lehetőségeket össze kell adni (ez egy esetszétválasztás aszerint, hogy A -ból hány elemet választunk, ezért kell összeadni). A kapott összeg pont az egyenlőség jobb oldala.

19. Hány éle van egy n csúcsú teljes gráfnak?

Megoldás: Bármely két csúcs között megy él, vagyis $\binom{n}{2}$ él van.

20. Van-e olyan legalább két pontú gráf, melyben minden pont foka különböző?

Megoldás: Az ábrán szereplő gráf minden fokszáma különböző. De egyszerű gráfok



között nincs olyan, aminek minden foka különböző lenne (hacsak nem az egycsúcsú gráfról van szó), hiszen különben a foksámok rendre $0, 1, \dots, n-1$ lennének. De egyszerre nem lehet 0 és $n-1$ fokú csúcs, mert az első senkivel nem lenne összekötve, míg a második mindenkivel.

21. Igazold, hogy véges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros. És végtelen gráfban?

Megoldás: Adjuk össze az összes foksámot! Ekkor minden csúcsból a rajta átmenő élek számát adtuk össze, de mivel egy élnek két vége van, ezért minden élet kétszer számoltuk. Tehát $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G)$, azaz a foksámok összege pont az élek számának kétszerese. De akkor ez egy páros szám, ezért nem lehetnek a páratlan fokúak páratlan sokan, hiszen akkor az összeg páratlan lenne.

22. Igaz-e, hogy egy gráf, vagy a komplementere összefüggő? (Itt a 'vagy' nem kizáró-vagy!)

Megoldás: Igaz. Tegyük fel ugyanis, hogy G nem összefüggő, van mondjuk k komponense. Válasszunk ki két tetszőleges csúcsot. Ha ezek különböző komponensben vannak, akkor a komplementerben lesz közöttük él. Ha pedig azonos komponensben vannak, akkor válasszunk egy harmadik pontot egy másik komponensből. Ekkor ezzel a harmadik ponttal mindkettő össze van kötve a komplementerben, így van közöttük (egy kettő hosszú) út. Azt kaptuk tehát, hogy bármely két pont között vezet vagy él vagy egy kettő hosszú út a komplementerben, vagyis $\bar{G}$ összefüggő.

23. Határozzuk meg az összes, páronként nem izomorf egyszerű gráfot, melyre

- (a) $v = 4, e = 5$ (b) $v = 5, e = 3$ (c) $v = 5, e = 7$ (d) $v = 5, e = 8$
(e) $v = 5$, minden pont foka legalább 3.

Megoldás:

(a) $v = 4, e = 5$. Egy 4 pontú, 5 élű gráfnak egy éle hiányzik, ahhoz hogy teljes gráf legyen. (Egy teljes 4 pontú gráfnak $\binom{4}{2} = 6$ éle van). Ezt az egy élet tetszőlegesen kiválasztva mindenképp az ábrán látható gráffal izomorf gráfot kapunk, így az ábrán látható egyetlen megfelelő gráf.

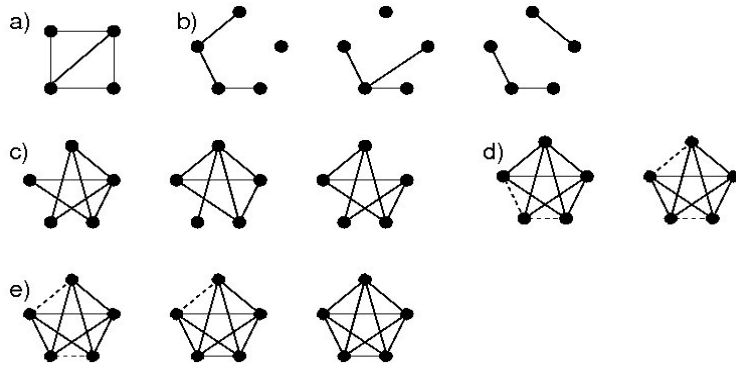
(b) $v = 5, e = 3$. Egy 5 pontú, 3 élű gráfnak mindig van két olyan éle melyeknek van közös végpontja, mert 3 olyan élnek, melyek közül semelyik kettőnek nincs közös csúcsa, 6 különböző végpontja lenne. Ehhez a két élhez a harmadikat többféleképpen is megválaszthatjuk. Lehet, hogy a három él egy utat alkot, lehet, hogy egy csillagot, de az is lehet, hogy a harmadik élnek nincs közös csúcsa az első kettővel. Tehát 3 páronként nem izomorf gráf van.

(c) $v = 5, e = 7$. Egy 5 pontú 7 élű gráfnak a komplementere egy 5 pontú 3 élű gráf,

amilyeneket épp az előző esetben vizsgáltunk. Továbbá két gráf pontosan akkor izomorf, ha a komplementerük izomorf. Így elég csak venni az előző gráfok komplementereit, ezek páronként nem izomorfak lesznek, és nem lesz további gráf, mely ezek egyikével ne lenne izomorf.

(d) $v = 5$, $e = 8$. Egy 5 pontú gráfnak csak két éle hiányzik, hogy teljes gráf legyen. (Egy teljes 5 pontú gráfnak $\binom{5}{2} = 10$ éle van). Így egyszerűbb azt megvizsgálni, hogy hányféleképpen hagyhatunk egy teljes gráfból két élet, hogy nem izomorf gráfokat kapjunk. Erre két lehetőségünk van: a két elhagyott élnek vagy van közös végpontja vagy nincs.

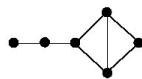
(e) $v = 5$, minden pont foka legalább 3. Egy 5 pontú gráfnak, melynek minden foka legalább 3, a komplementre bármely csúcsának foka legfeljebb 1. Így a keresett gráfok komplementere háromféle lehet: üres gráf (nincs éle), lehet egy éle vagy lehet két éle, de ezen két élnek nem lehet közös végpontja; ha a gráfnak legalább 3 éle lenne, akkor lenne két él, melyek lenne közös végpontja, így lenne a gráfnak legalább 2 fokú csúcsa. Tehát 3 páronként nem izomorf gráf van.



24. Van-e olyan egyszerű gráf, melyben a pontok foka rendre

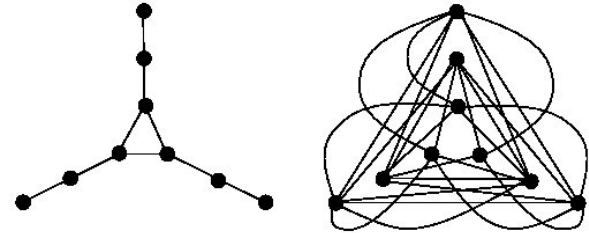
- (a) 1, 2, 2, 3, 3, 3 (b) 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4 (c) 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7
 (d) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6 (e) 1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9 (f) 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7
 (g) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6.

Megoldás: (a) 1, 2, 2, 3, 3, 3. Ez jó lesz:



(b) 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4. Nincs, mert a fokszámösszeg páratlan.

(c) 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7. A gráf komplementerének a foksámai a következők: 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1 (a gráf 9 csúcsú, így a gráf komplementerének foksámai megkaphatók, ha az eredeti gráf foksámainat kivonjuk 8-ból). Ilyen gráfok könnyen rajzolhatunk, ennek komplementere pedig a feladatnak megfelelő lesz.



(d) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6. Nincs, mert a fokszámösszeg páratlan.

(e) 1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9. Nincs ilyen gráf, mert ha lenne, akkor a 9 fokú minden csúccsal, a 8 fokú 1 kivételével minden csúccsal szomszédosnak kellene lennie, de ekkor legfeljebb csak 1 elsőfokú csúcsa lehetne a gráfnak, pedig nekünk 2 kellene.

(f) 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7. Nincs ilyen gráf, mert egy 7 csúcsú gráfnak nem lehet 6-nál nagyobb foksáma.

(g) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6. Nincs ilyen gráf, mert ha lenne, akkor a két 6 fokú csúcsnak minden másik csúccsal szomszédosnak kellene lennie, de ekkor nem lehet a gráfban 1 fokú csúcs.

25. Rajzoljunk a komplementerével izomorf 5 csúcsú illetve 6 csúcsú gráfot (ha van)!

Megoldás: 5 csúcsú: ötszög. Ennek komplementere egy „anagramma”, ami izomorf az ötszöggel. Hat pontú nincsen, hisz izomorf gráfok élszáma megegyezik. Tehát a teljes hatszög éleit kellene két osztályba sorolni, úgy, hogy ugyan annyi él legyen mindkét osztályban. Ez nem lehetséges, mert $|E(K_6)| = \binom{6}{2} = 15$ páratlan.

26. Lehet-e egy 366 csúcsú gráf izomorf a komplementerével?

Megoldás: Legyen G egy 366 csúcsú gráf. Ha G izomorf $\bar{G}$ -vel, akkor ugyan annyi élük kell, hogy legyen. A két gráfnak összesen annyi éle van, mint K_{366} -nak, ami $e(K_{366}) = \binom{366}{2}$. De ez egy páratlan szám, ezért nem lehet, hogy G -be ugyan annyi essen ezekből az élekből mint $\bar{G}$ -be. A válasz tehát: nem.

27. Melyek azok a gráfok, melyekben bármely két élnek van közös pontja?

Megoldás: Ha G -ben bármely két élnek van közös pontja, akkor G vagy háromszög (párhuzamos éleket is megengedve), vagy csillag (olyan gráf, amiben van egy csúcs, ami minden élnek az egyik végpontja; megint lehetnek párhuzamos élek, de itt hurokélek is) plusz esetleges izolált pontok. Az világos, hogy ezek a gráfok tényleg jók, és könnyű végiggondolni, hogy ha legfeljebb három csúcsa van a gráfnak, akkor csak ezek lehetnek.

A továbbiakban indukcióval igazoljuk az állítást. Tegyük fel, hogy n csúcsszámg tudjuk az állítás. Hagyjunk el egy olyan csúcsot, amitől még összefüggő marad a gráf. Ekkor amit kapunk (az indukció alapján) vagy egy csillag vagy egy háromszög. De a csillaghoz csak úgy tudjuk hozzávenni az elhagyott csúcsot a tulajdonság megőrzésével, hogy csillag maradjon, a háromszöghöz pedig sehog.

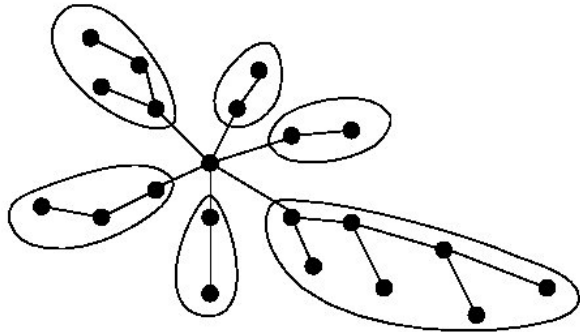
28. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráfban minden pont foka legalább kettő, akkor a gráfban van kör. Ha minden pont foka legalább három, akkor van benne páros hosszúságú kör.

Megoldás: Vegyük a gráfnak a(z egyik) maximális hosszú útját, P -t. Ilyen bizonyosan van, hiszen a gráf véges. Ennek az útnak van két végpontja, legyen az egyik v . Ekkor v minden szomszédja P -n van, hisz különben lehetne az utat növelni, ami ellentmondana a maximalitásnak. Viszont akkor készen is vagyunk, mert a fokszámokra tett feltevés miatt v -nek van két szomszédja az úton, ami az út közöttük lévő részével együtt egy kört alkot.

A második részben hasonlóan vegyünk egy P maximális utat, és ennek egy v végpontját. Ekkor v -nek van P -n legalább 3 szomszédja (minden szomszédja P -n van, annak maximalitása miatt). A szomszédoktól v -ig menő P -beli utak közül vagy van két páros, vagy van két páratlan. Ezek bármelyike meghatároz egy páros kört.

29. Legyen Δ egy fában a maximális fokszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a fa legalább Δ darab első fokú csúcsot tartalmaz!

Megoldás: Vegyünk egy Δ fokszámú csúcsot, és hagyjuk el a gráfból. Ekkor a fa szétesik Δ fára, hisz a fában nincs kör, ezért egy csúcsból kiinduló utak nem találkozhatnak újra. A Δ kisebb fa külön-külön tartalmaz legalább 2 első fokú pontot. Így ha ezeket újra összerakom a Δ fokszámú csúcsnál, a fában kell, hogy maradjon még Δ elsőfokú pont.



30. Egy adott $n \times k$ méretű csokoládéból hányféle kisebb csokoládét lehet csinálni? (Csak törni lehet).

Megoldás: Egy részcsokoládénak van egy x szélessége és egy y hosszúsága. Nyilván $1 \leq x \leq n$ és $1 \leq y \leq k$. A lehetséges fajták száma:

$$\sum_{1 \leq x, y \leq n, k} 1 = \sum_{1 \leq x \leq n} \left(\sum_{1 \leq y \leq k} 1 \right) = \sum_{1 \leq x \leq n} \left(\frac{k(k+1)}{2} \right) = \frac{k(k+1)}{2} \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Előző feladatsorról beszéljük meg a **22–26** feladatokat.

2. Bizonyítsd be, hogy $\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}$.

3. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mik lehetnek ezek a foksámok?

4. Határozzuk meg az összes olyan fát, amely izomorf a saját komplementerével. Az egymással izomorf megoldásokat tekintjük azonosnak.

5. Ketten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúzza egy élet. Az veszít, aki olyan élet húz be, amittől a gráfban kör keletkezik. A kezdő, vagy a másodiknak lépő fog nyerni, ha feltesszük, hogy mindketten a lehető legjobban játszanak?

6. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?

7. Határozzuk meg a síkon az x tengelyre való tükrözés, mint lineáris transzformáció mátrixát az $\{(1, 2), (1, 0)\}$ bázisban.

8. Van-e olyan lineáris transzformációja **(a)** $\mathbb{R}^3$ -nek **(b)** $\mathbb{R}^4$ -nek, aminek a képtere és magtere megegyezik?

9. Bizonyítsuk be, hogy az x vektor pontosan akkor sajátvektora az invertálható A mátrixnak, ha sajátvektora A^{-1} -nek.

10. Adjuk meg kanonikus alakban a $z^7 - 27z = 0$ egyenlet összes olyan komplex megoldását, melynek valós és képzetes része is nemnegatív.

11. Hány olyan 99 hosszú sorozat készíthető az a, b, c, d, e betűkből, amelyekben nincsenek sem szomszédos magánhangzók, sem szomszédos mássalhangzók?

12. Legyen $\mathcal{A}$ a szokásos háromdimenziós tér olyan lineáris transzformációja, melynek képtere két dimenziós. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $v \in \mathbb{R}^3$ vektor, ami sem a magtérnek, sem a képtérnek nem eleme.

13. Legyen $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció. Az $(1, 1)$ vektor $\mathcal{B}$ szerinti képe a $(4, 3)$ vektor, az $(1, 0)$ képe pedig a $(-1, 2)$ vektor. Adjuk meg $\mathcal{B}$ mátrixát a szokásos bázisban.

14. Adjuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és minden sajátértékéhez egy-egy sajátvektort is.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

15. Adjuk meg az alábbi egyenlet összes komplex megoldását kanonikus alakban.

$$(\sqrt{3} - i)z^4 = i.$$

16. Hány olyan hétjegyű szám létezik, melyben pontosan háromféle különböző számjegy szerepel és ezek egyike sem a nulla?

17. Legyen adott az $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ lineáris leképezés és a $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ bázis V -ben, valamint a $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ bázis W -ben. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathcal{A}$ leképezés B és C bázisok szerint felírt mátrixának minden sorában az elemek összege 1, akkor $c_1 + \dots + c_m \in \text{Im } \mathcal{A}$.

18. Létezik-e olyan G egyszerű gráf, melyre teljesül, hogy G -nek 25-tel több páros fokú csúcsa van, mint G komplementerének?

19. Tegyük fel, hogy egy lineáris leképezés mátrixa a $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bázisban az alábbi. Milyen p paraméter esetén teljesül, hogy $3b_1 - b_2 + pb_3 \in \text{Ker } \mathcal{A}$?

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

20. Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és a legkisebb sajátértékekhez keressünk egy sajátvektort.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ \sqrt{7} & 2 & \sqrt{5} \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

21. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenlet összes olyan komplex megoldását, amelyeknek valós része pozitív és képzetes része negatív.

$$\frac{7i+3}{7-3i}z^4 + 8(\sqrt{3}+i) = 0.$$

22. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán (az eredményt algebrai alakban adjuk meg).

$$z^2 + (1+i)\bar{z} + 4i = 0$$

23. Knoblauch úr elfelejtette a jelszavát és most szeretné kitalálni. A következőkre emlékszik:

1. A jelszó 11 karakterből áll, amelyek mindegyike az A, B, C, D, E és F betűk valamelyike.
2. A fenti hat betű közül az egyik 3-szor ismétlődik: három olyan betű van, ami kétszer ismétlődik, a többi kettő pedig csak egyszer szerepel a jelszóban.

(Ezek szerint Knoblauch úr jelszava lehet például DCABDFFEDBA.) Hány olyan jelszó készíthető, amely megfelel a fenti feltételeknek?

1. Előző feladatsorról beszéljük meg a **22–26** feladatokat.

2. Bizonyítsd be, hogy $\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}$.

Megoldás: Egyrészt ki lehetne számolni. De most egy kombinatorikus megoldást nézzünk meg. Legyen A egy n elemű halmaz, és B egy k elemű részhalmaza. A bal oldal, $\binom{n}{2}$, azt számolja, hogy hányféleképpen lehet kiválasztani két elemet A -ból. Ugyan ezt számolja a jobb oldal is, csak másként: a kiválasztott két elem lehet mindkettő B -beli: $\binom{k}{2}$; lehet az egyik A -beli, a másik B -beli: $k(n-k)$; és végezetül lehet mindkettő $A \setminus B$ -beli: $\binom{n-k}{2}$.

3. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mik lehetnek ezek a fokszámok?

Megoldás: Legyen a kétféle foksám $a, b > 0$. Ezek persze egész számok. Mivel egy fának mindig van legalább két elsőfokú csúcsa, ezért az egyik foksám, mondjuk b egyenlő 1-gyel. A 8 csúcsból k -nak a a foka, és ℓ -nek 1. Tudjuk továbbá, hogy $k + \ell = 8$, és azt is, hogy az összes foksám összege az élek kétszeresével egyenlő, ami jelen esetben $2 \cdot 7$.

Vagyis az alábbi egyenlőségeket tudjuk felírni:

$$\begin{aligned} k \cdot a + \ell \cdot b &= 14 \\ k + \ell &= 8 \\ b &= 1 \\ \ell &\geq 2 \end{aligned}$$

Átalakítva, azt kapjuk, hogy a $k(a-1) = 6$ egyenlet egész megoldásait keressük, azzal a feltétellel, hogy $0 < k < 7$. A következő esetek lehetségesek a (k, a) párra: $(1, 7)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(6, 2)$. Ilyen paraméterű fák vannak.

4. Határozzuk meg az összes olyan fát, amely izomorf a saját komplementerével. Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak.

Megoldás: Legyen T egy megfelelő n csúcsú fa. Ekkor az élek száma $e = n - 1$. A komplementergráf csúcsszáma ugyan annyi: $\bar{n} = n$ az élszáma pedig $\bar{e} = \binom{n}{2} - e$. Mivel a feltétel szerint $T \cong \bar{T}$, ezért az éleik száma meg kell, hogy egyezzen, azaz

$$n - 1 = \binom{n}{2} - (n - 1).$$

Ezt megoldva az $n = 1$ vagy $n = 4$ értékek lehetségesek. Ha $n = 1$, akkor az egy pontú gráfról van szó, ami persze fa, és izomorf a komplementerével. Ha $n = 4$, akkor több lehetőség jöhet elvben szóba. Hány négycsúcsú fa van? Biztos kell lennie két elsőfokú csúcsnak, ezért a másik két csúcs foksámát a, b -vel jelölve, tudjuk, hogy $1 + 1 + a + b = 2 \cdot 3 = 6$, vagyis $a + b = 4$. Itt a, b pozitív egész számok, ezért szimmetria okokból két eset lehetséges: $a = 1$ és $b = 3$ vagy $a = 2$ és $b = 2$. Az előbbi lehetőség egy olyan fát ad, aminek a gyökerének a foka 3, és van három elsőfokú levele; míg a második lehetőség

szerint egy 4 hosszú utat kapunk. Könnyű meggondolni, hogy a négy hosszú út izomorf a komplementerével, míg a másik fa nem.

5. Ketten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúzza egy élet. Az veszít, aki olyan élet húz be, amittől a gráfban kör keletkezik. A kezdő, vagy a másodiknak lépő fog nyerni, ha feltesszük, hogy mindketten a lehető legjobban játszanak?

Megoldás: n csúcson egy összefüggő körmentes gráfnak pontosan $n - 1$ éle van (mert egy fa), ezért egész addig biztos nem keletkezik kör (ha optimálisan játszanak), amíg a behúzott élek száma el nem éri $n - 1$ -et. Az, hogy ez kinél következik be, pedig n paritásán múlik.

6. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\bar{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?

Megoldás: Legyen n a T fa csúcsainak száma. Ekkor $|E(T)| = n - 1$ és $|E(\bar{T})| = \binom{n}{2} - |E(T)|$. Ezért ezt az egyenletet írhatjuk fel:

$$\binom{n}{2} - (n - 1) = 15(n - 1).$$

Ennek $n = 1$ és $n = 32$ a megoldásai.

7. Határozzuk meg a síkon az x tengelyre való tükrözés, mint lineáris transzformáció mátrixát az $\{(1, 2), (1, 0)\}$ bázisban.

Megoldás: Legyen $B = \{b_1, b_2\}$ a feladatban szereplő bázis és $\mathcal{A}$ a leképezésünk. Ekkor

$$[\mathcal{A}(b_1)]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad [\mathcal{A}(b_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért a megfelelő mátrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Van-e olyan lineáris transzformációja **(a)** $\mathbb{R}^3$ -nek **(b)** $\mathbb{R}^4$ -nek, aminek a képtere és magtere megegyezik?

Megoldás:

(a) Ha $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció, akkor a dimenzió tétel alapján

$$\dim \operatorname{Im}(\mathcal{A}) + \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = 3.$$

Ez nyilván nem teljesülhet, ha $\operatorname{Im}(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A})$, hisz akkor a dimenziójuk összege páros.

(b) Legyen $\mathcal{A}$ az a leképezés amit az alábbi hozzárendelés definiál:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ez jó lesz.

9. Bizonyítsuk be, hogy az x vektor pontosan akkor sajátvektora az invertálható A mátrixnak, ha sajátvektora A^{-1} -nek.

Megoldás: Tegyük fel, hogy $Ax = \lambda x$. Szorozzuk meg A^{-1} -el. Ekkor $x = A^{-1}(\lambda x) = \lambda A^{-1}x$, azaz $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$. A másik irány ugyan így megy.

10. Adjuk meg kanonikus alakban a $z^7 - 27z = 0$ egyenlet összes olyan komplex megoldását, melynek valós és képzetes része is nemnegatív.

Megoldás: Kiemelve z -t, a $z(z^6 - 27) = 0$ egyenlet megoldásait keressük. Ennek $z = 0$ biztosan megoldása, és ez a feladat szempontjából is megfelel, mert mind valós, mind képzetes része nem negatív.

Térjünk át a többi megoldást szolgáltató egyenletre: $z^6 = 27$. Vagyis a 27 hatodik gyökeit kell meghatározni. Ezek a hatodik egységgyökök $\sqrt[6]{27}$ -szeresei. Ezért elég kiválogatni a hatodik egységgyökök közül azokat, amiknek valós és képzetes része is nemnegatív. Ezek a következők: 1 és $\cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6}$. A feladat megoldásai pedig

$$\sqrt[6]{27} \quad \text{és} \quad \sqrt[6]{27} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

11. Hány olyan 99 hosszú sorozat készíthető az a, b, c, d, e betűkből, amelyekben nincsenek sem szomszédos magánhangzók, sem szomszédos mássalhangzók?

Megoldás: A feltétel szerint felváltva állnak a mással- és magánhangzók. Először eldöntjük, hogy milyen hangzóval kezdődjön a sor, és aztán megszámláljuk az ilyen lehetőségek számát.

Ha magánhangzóval kezdődik, akkor az első helyre tehetek kétféle, a másodikra háromféle, a harmadikra megint kétféle, stb.

$$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdots$$

Ha mássalhangzóval kezdődik, akkor pedig ugyan ezzel a gondolattal ennyit kapunk:

$$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdots$$

A kettőt összeadva megkapjuk az eredményt, ami: $2^{50}3^{49} + 3^{50}2^{49}$.

12. Legyen $\mathcal{A}$ a szokásos háromdimenziós tér olyan lineáris transzformációja, melynek képtere két dimenziós. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $v \in \mathbb{R}^3$ vektor, ami sem a magtérnek, sem a képtérnek nem eleme.

Megoldás: A dimenzió tétel miatt $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = 1$. Vegyük észre, hogy $\text{Im } \mathcal{A} \setminus \text{Ker } \mathcal{A} \neq \emptyset$, hiszen nagyobb a dimenziója. Két eset van.

(1) Ha $\text{Im } \mathcal{A} \supseteq \text{Ker } \mathcal{A}$, akkor mivel a tér három dimenziós és $\text{Im } \mathcal{A}$ csak kettő, van olyan vektor, ami nincs benne $\text{Im } \mathcal{A}$ -ban, és akkor a tartalmazás miatt $\text{Ker } \mathcal{A}$ -ban sem lehet benne. Tehát ez esetben készen vagyunk.

(2) Ha $\text{Ker } \mathcal{A} \setminus \text{Im } \mathcal{A} \neq \emptyset$, akkor válasszunk egy $v \in \text{Ker } \mathcal{A} \setminus \text{Im } \mathcal{A}$ és egy $w \in \text{Im } \mathcal{A} \setminus \text{Ker } \mathcal{A}$ vektort. Az állítjuk, hogy $v + w$ jó lesz. Egyrészt $\mathcal{A}(v + w) = \mathcal{A}(v) + \mathcal{A}(w) = \mathcal{A}(w) \neq 0$, vagyis $v + w \notin \text{Ker } \mathcal{A}$. Másrészt $v + w$ nem áll elő képként, hiszen, ha $v + w \in \text{Im } \mathcal{A}$ lenne, akkor mivel $\text{Im } \mathcal{A}$ vektortér, a különbségük, $v = (v + w) - w$ is $\text{Im } \mathcal{A}$ -beli lenne, de ez nem lehet, mert úgy választottuk v -t, hogy ne legyen benne.

13. Legyen $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció. Az $(1, 1)$ vektor $\mathcal{B}$ szerinti képe a $(4, 3)$ vektor, az $(1, 0)$ képe pedig a $(-1, 2)$ vektor. Adjuk meg $\mathcal{B}$ mátrixát a szokásos bázisban.

Megoldás: Ahhoz, hogy megadjuk a mátrixot, ismerni kellene $\mathcal{B}$ hatását a báziselemeken. Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektoron ismerjük a feladatból, ezért $\mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ -et kellene meghatározni.

$$\mathcal{B} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \mathcal{B} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A mátrix ezért

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Adjuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és minden sajátértékéhez egy-egy sajátvektort is.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A karakterisztikus polinom

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4,$$

aminek gyökei $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 4$. Ezek tehát a sajátértékek.

λ_1 -hez tartozó sajátvektorok:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-1 & 2 & 0 \\ 1 & 3-1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \end{array} \right),$$

amiből kapjuk, hogy a λ_1 -hez tartozó sajátaltér elemei $\begin{pmatrix} 2x \\ -x \end{pmatrix}$ alakúak, ahol $x \in \mathbb{R}$.

λ_2 -höz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-4 & 2 & 0 \\ 1 & 3-4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \end{array} \right),$$

amiből kapjuk, hogy a λ_2 -höz tartozó sajátaltér elemei $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ alakúak, ahol $x \in \mathbb{R}$.

15. Adjuk meg az alábbi egyenlet összes komplex megoldását kanonikus alakban.

$$(\sqrt{3} - i)z^4 = i.$$

Megoldás: Átrendezve:

$$z^4 = \frac{i}{\sqrt{3} - i} = \frac{i}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{\sqrt{3}i}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

ahol $\alpha = 120^\circ$. A negyedik egységgyökök $1, i, -1, -i$. Ezeket kell elforgatni 120 fokkal, majd beszorozni $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ -el.

16. Hány olyan hétjegyű szám létezik, melyben pontosan háromféle különböző számjegy szerepel és ezek egyike sem a nulla?

Megoldás: Kiválsztjuk először, hogy melyik három számjegy szerepeljen. Ezt $\binom{9}{3}$ féleképpen lehet megtenni, mert a nullát nem akarjuk kiválasztani. Most számoljuk meg, hogy ha már meg van, hogy melyik három szám szerepeljen, akkor hány eset van.

Az összes lehetőség 3^7 , de ezek közül rossz az, amikor csak egy fajta számjegy szerepel és amikor csak kétfajta. Azon sorozatok száma, amikor csak egyféle számjegy szerepel $\binom{3}{1}1^7$. Amikor pedig csak kettő, azok száma $\binom{3}{2}2^7$. De itt azokat újra megszámloltuk, amikben csak egyféle számjegy szerepel. Azért, hogy ne kétszer vonjuk ki őket, ezeket még egyszer hozzá kell adni. Vagyis az összes lehetőségek száma

$$3^7 - \binom{3}{2}2^7 + \binom{3}{1}1^7.$$

A feladat megoldása pedig

$$\binom{9}{3} \left(3^7 - \binom{3}{2}2^7 + \binom{3}{1}1^7 \right).$$

17. Legyen adott az $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ lineáris leképezés és a $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ bázis V -ben, valamint a $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ bázis W -ben. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathcal{A}$ leképezés B és C bázisok szerint felírt mátrixának minden sorában az elemek összege 1, akkor $c_1 + \dots + c_m \in \text{Im } \mathcal{A}$.

Megoldás: Ha a mátrix elemei $\alpha_{i,j}$, akkor definíció szerint

$$\begin{aligned} \mathcal{A}b_1 &= \alpha_{1,1}c_1 + \alpha_{2,1}c_2 + \dots + \alpha_{m,1}c_m \\ \mathcal{A}b_2 &= \alpha_{1,2}c_1 + \alpha_{2,2}c_2 + \dots + \alpha_{m,2}c_m \\ \mathcal{A}b_3 &= \alpha_{1,3}c_1 + \alpha_{2,3}c_2 + \dots + \alpha_{m,3}c_m \\ &\vdots \\ \mathcal{A}b_n &= \alpha_{1,n}c_1 + \alpha_{2,n}c_2 + \dots + \alpha_{m,n}c_m \end{aligned}$$

Adjuk össze ezeket az egyenleteket:

$$\mathcal{A}(b_1 + \dots + b_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_{1,i}c_1 + \dots + \sum_{i=1}^n \alpha_{m,i}c_m.$$

A feltétel szerint a jobb oldalon álló szummák 1-gyel egyenlőek, ezért

$$\mathcal{A}(b_1 + \dots + b_n) = c_1 + c_2 + \dots + c_m,$$

vagyis valóban $c_1 + \dots + c_m \in \text{Im } \mathcal{A}$.

18. Létezik-e olyan G egyszerű gráf, melyre teljesül, hogy G -nek 25-tel több páros fokú csúcsa van, mint G komplementerének?

Megoldás: Legyen G csúcsainak száma n . Tudjuk, hogy $d_{\overline{G}}(v) = n - 1 - d_G(v)$. Ez azt jelenti, hogy

(1) Ha n páratlan, akkor a G -beli páros fokú csúcsok $\overline{G}$ -ben is párosak, és ugyan ez igaz a páratlan csúcsokra. Ha $p(G)$ -vel jelöljük egy gráf páros fokú csúcsainak száma, akkor tehát $p(G) = p(\overline{G})$. De a feladat szerint $p(G) = 25 + p(\overline{G})$, azaz $p(G) = 25 + p(G)$, ami nem lehetséges.

(2) Ha n páros, akkor a G -beli páros fokú csúcsok $\overline{G}$ -ben páratlanok, és fordítva. Ha $o(G)$ -vel jelöljük a gráf páratlan fokú csúcsait, akkor tehát $p(G) = o(\overline{G})$ és $o(G) = p(\overline{G})$. A feltevés szerint tehát $p(G) = 25 + p(\overline{G}) = 25 + o(G)$. Átrendezve

$$p(G) - o(G) = 25.$$

Node $p(G) + o(G) = n$, ami páros, és két szám különbségének és összegének azonos a paritása. Ezért ez az eset sem lehetséges.

Azt kaptuk, hogy nincs ilyen gráf.

19. Tegyük fel, hogy egy lineáris leképezés mátrixa a $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bázisban az alábbi. Milyen p paraméter esetén teljesül, hogy $3b_1 - b_2 + pb_3 \in \text{Ker } \mathcal{A}$?

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p-2 \\ 6-3p \end{pmatrix}.$$

Ez pontosan akkor nulla, ha $p = 2$.

20. Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és a legkisebb sajátértékekhez keressünk egy sajátvektort.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ \sqrt{7} & 2 & \sqrt{5} \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 5 \\ \sqrt{7} & 2-\lambda & \sqrt{5} \\ -2 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & \sqrt{5} \\ 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} - 0 + 5 \begin{vmatrix} \sqrt{7} & 2-\lambda \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda) + 5 \cdot 2(2-\lambda) = (2-\lambda)((1-\lambda)(8-\lambda) + 10).$$

A sajátértékek ezért $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ és $\lambda_3 = 6$. A legkisebb sajátértékhez tartozó sajátaltér elemei:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-2 & 0 & 5 & 0 \\ \sqrt{7} & 2-2 & \sqrt{5} & 0 \\ -2 & 0 & 8-2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 5 & 0 \\ \sqrt{7} & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

Ennek megoldásai

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } x \in \mathbb{R}.$$

21. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenlet összes olyan komplex megoldását, amelyeknek valós része pozitív és képzetes része negatív.

$$\frac{7i+3}{7-3i} z^4 + 8(\sqrt{3}+i) = 0.$$

Megoldás:

$$\frac{3+7i}{7-3i} = \frac{3+7i}{7-3i} \cdot \frac{7+3i}{7+3i} = \frac{58i}{58} = i.$$

Ezért az egyenlet így alakul:

$$iz^4 = -8(\sqrt{3}+i),$$

vagyis

$$z^4 = \frac{-8(\sqrt{3}+i)}{i} = 8(\sqrt{3}+i)i = 8(-1+\sqrt{3}i) = 16\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

ahol $\alpha = 120^\circ$.

A továbbiakban kiszámoljuk, hogy a negyedik egységgyököket, ha elforgatjuk 120° -al, akkor melyiknek lesz pozitív valós- és negatív képzetes része, majd lenormálunk $\sqrt[4]{16} = 2$ -vel. A negyedik egységgyökök az $1, i, -1, -i$. Ezek közül csak a -1 lesz jó.

22. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán (az eredményt algebrai alakban adjuk meg).

$$z^2 + (1+i)\bar{z} + 4i = 0$$

Megoldás: Legyen $z = a + bi$. Ekkor

$$\begin{aligned} z^2 + (1+i)\bar{z} + 4i &= 0 \\ a^2 + 2abi - b^2 + (1+i)(a-bi) + 4i &= 0 \\ a^2 + 2abi - b^2 + a - bi + ai + b + 4i &= 0. \end{aligned}$$

Akkor nulla, ha mind a valós mind a képzetes része is nulla

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + a + b &= 0 \\ 2ab - b + a + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Az első egyenlet nem más, mint $(a+b)(1+a-b) = 0$, amiből következik, hogy $b = -a$ vagy $b = a + 1$. Ezeket behelyettesítve a másodikba:

Ha $b = -a$, akkor

$$\begin{aligned} 2ab - b + a + 4 &= 0 \\ -2a^2 + a + a + 4 &= 0 \\ a^2 - a - 2 &= 0. \end{aligned}$$

A megoldóképletből megkapunk a -ra két megoldást.

Ha pedig $b = a + 1$, akkor

$$\begin{aligned} 2ab - b + a + 4 &= 0 \\ 2a(a+1) - (a+1) + a + 4 &= 0 \\ 2a^2 + 2a + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Ennek nincsen megoldása.

23. Knoblauch úr elfelejtette a jelszavát és most szeretné kitalálni. A következőkre emlékszik:

1. A jelszó 11 karakterből áll, amelyek mindegyike az A, B, C, D, E és F betűk valamelyike.
2. A fenti hat betű közül az egyik 3-szor ismétlődik: három olyan betű van, ami kétszer ismétlődik, a többi kettő pedig csak egyszer szerepel a jelszóban.

(Ezek szerint Knoblauch úr jelszava lehet például DCABDFFEDBA.) Hány olyan jelszó készíthető, amely megfelel a fenti feltételeknek?

Megoldás: Kiválasztom, hogy melyik betű ismétlődjék háromszor: $\binom{6}{1}$. Kiválasztom azt a hármat, ami kétszer ismétlődik: $\binom{5}{3}$, végül azt a kettőt, ami egyszer szerepel: $\binom{2}{2}$ (ezeket tulajdonképpen már nem is kell kiválasztani, mert a maradék pontosan ez).

Ha már meg van, hogy melyik betűből hányat veszek, akkor ezeket

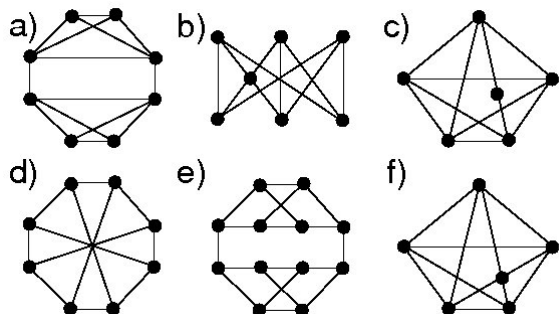
$$\frac{11!}{3! 2! 2! 2! 1! 1!}$$

féleképpen rakhatom le.

Az eredmény tehát

$$\binom{6}{1} \binom{5}{3} \binom{2}{2} \frac{11!}{3! 2! 2! 2! 1! 1!}.$$

1. Síkba rajzolhatók-e a következő gráfok? Ha igen, rajzold le élkereszteződés nélkül, ha nem, mutass bennük egy Kuratowski-gráffal topologikusan izomorf részgráfot!



2. Síkbarajzolható-e az a gráf melynek pontjai az $\{1, 2, \dots, 6\}$ halmaz kételemű részhalmazai, és ezek között pontosan akkor megy él, ha a halmazok diszjunktak? És ha akkor megy él, ha nem diszjunktak?

3. Melyek rajzolhatóak síkba ezek közül: K_4 , K_7 , $K_{4,5}$, $K_{7,2}$? És tóruszra?

4. Egy gömbre élkeresztezés nélkül felrajzolunk egy 16 élű 4-reguláris gráfot. Hány tartomány lesz?

5. Egy gömbre rajzolt 6 tartományból álló 3-reguláris egyszerű gráfban mennyi az élek száma?

6. Bizonyítsd be, hogy ha egy G gráf pontszáma legalább 11, akkor G vagy G komplementere nem síkgráf.

7. Jelöljük $cr(G)$ -vel a G gráf élkeresztezési számát, vagyis azt a legkisebb számot, amennyi élkeresztezéssel síkba lehet rajzolni G -t. Igazold, hogy $e - cr(G) \leq 3n - 6$, ahol e az élek, n a csúcsok száma.

8. Mutasd meg, hogy K_8 lerajzolásakor legalább 10 élkereszteződés jön létre.

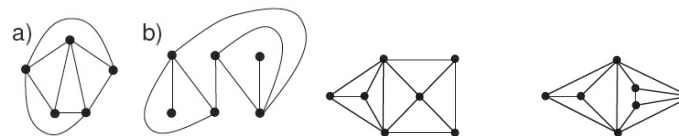
9. Igazold, hogy nem létezhet 5 darab páronként szomszédos ország. Miért rossz a bizonyítás?

10. Legyen G egy 20 csúcsú összefüggő 3-reguláris síkgráf. Hány csúcsa van G duálisának?

11. Bizonyítsd be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható

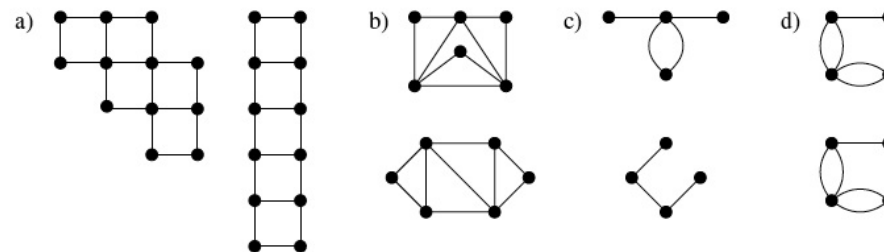
12. A síkot véges sok mindkét irányban végtelen egyenes elhelyezésével „országokra” bontjuk. Mutassuk meg, hogy ez a „térkép” 2 színnel megszínezhető!

13. Készítsük el az (a) és (b) gráfok duálisát. Mutasd meg, hogy a másik két gráf izomorf, de duálisaik nem izomorfak.

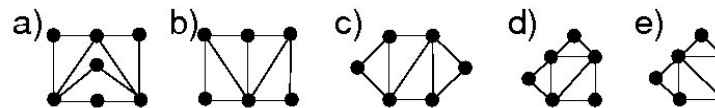


14. Mutasd meg, hogy két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi csúcsuk van.

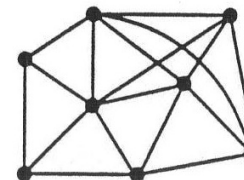
15. Gyengén izomorfak-e az alábbi gráfok?



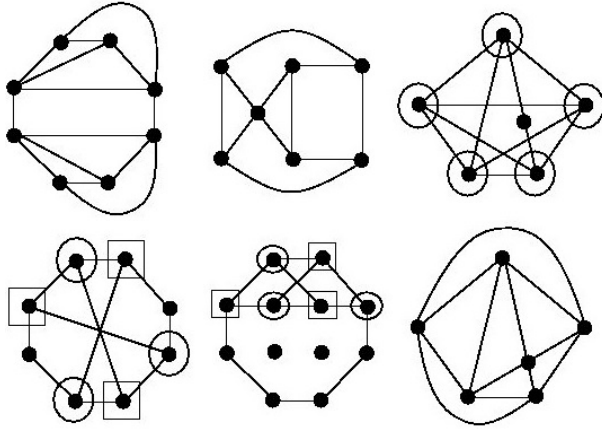
16. Keressünk izomorf és gyengén izomorf párokat a következő gráfok között!



17. Síkbarajzolható-e a következő gráf?



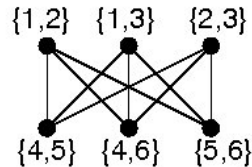
1. Síkba rajzolhatók-e a következő gráfok? Ha igen, rajzold le élkereszteződés nélkül, ha nem, mutass bennük egy Kuratowski-gráffal topologikusan izomorf részgráfot!



Megoldás: Az ábrán vagy egy megfelelő síkbarajzolás látható, vagy pedig egy K_5 -tel vagy $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf részgráf van bejelölve.

2. Síkbarajzolható-e az a gráf melynek pontjai az $\{1, 2, \dots, 6\}$ halmaz kételemű részhalmazai, és ezek között pontosan akkor megy él, ha a halmazok diszjunktak? És ha akkor megy él, ha nem diszjunktak?

Megoldás: A gráfnak összesen $\binom{6}{2} = 15$ pontja van. Egy pont foka pedig $\binom{4}{2} = 6$. Ezért a minimális fokszám nem ≤ 5 , így nem lehet a gráf síkbarajzolható. Lehet benne találni $K_{3,3}$ -at is:



A második gráf az első komplementere, ezért minden pont foka $(15 - 1) - 6 = 8$. A minimális fokszám itt is nagyobb mint 5, tehát ez sem síkbarajzolható.

3. Melyek rajzolhatóak síkba ezek közül: K_4 , K_7 , $K_{4,5}$, $K_{7,2}$? És tóruszra?

Megoldás: K_4 síkbarajzolható, K_7 nem mert tartalmaz K_5 -tel (topologikusan) izomorf részgráfot. $K_{4,5}$ szintén nem rajzolható síkba, mert tartalmaz $K_{3,3}$ -at. $K_{7,2}$ síkbarajzolható.

Ami síkbarajzolható, az tóruszra is, ezért elég megnézni, hogy K_7 illetve $K_{4,5}$ tóruszra rajzolható-e. Mindkettő az lesz.

4. Egy gömbre élkeresztezés nélkül felrajzolunk egy 16 élű 4-reguláris gráfot. Hány tartomány lesz?

Megoldás: Először kiszámoljuk a csúcsok számát. Ha minden csúcsnak 4 a fokszáma, akkor a fokszámok összege, ami az élek számának kétszeres így alakul:

$$\sum_v d(v) = \sum_v 4 = n \cdot 4 = 2 \cdot 16.$$

Ebből a csúcsok száma $n = 8$. Most az Euler-formulát használva $t - e + n - 1 = 1$, amiből $t = 2 - n + e = 2 - 8 + 16 = 10$.

5. Egy gömbre rajzolt 6 tartományból álló 3-reguláris egyszerű gráfban mennyi az élek száma?

Megoldás: Mivel a gráf 3-reguláris, a fokszámok összegére vonatkozó azonosságból kapjuk, hogy $n \cdot 3 = 2 \cdot e$, ahol n a pontok és e az élek száma. Mivel a tartományok száma $t = 6$, az Euler-formulából $6 - e + n - 1 = 1$, vagyis

$$e - n = 4.$$

Ezt összevetve a $3n = 2e$ egyenlettel, az $n = 8$ és $e = 12$ megoldást kapjuk.

6. Bizonyítsd be, hogy ha egy G gráf pontszáma legalább 11, akkor G vagy G komplementere nem síkgráf.

Megoldás: Legyen n a gráf csúcsainak e az éleinek és $\bar{e}$ a komplementer gráf éleinek a száma. Tudjuk, hogy $\bar{e} = \binom{n}{2} - e$. Ha G és $\bar{G}$ is síkbarajzolható, akkor $e, \bar{e} \leq 3n - 6$. Ezért elég azt bebizonyítani, hogy ha $n \geq 11$ és $e \leq 3n - 6$, akkor $\binom{n}{2} - e > 3n - 6$. Ehhez pedig elég megmutatni, hogy $\binom{n}{2} > (3n - 6) + (3n - 6)$, ha $n \geq 11$.

$$n^2 - n > 2(6n - 12) \iff n^2 - 13n + 24 > 0.$$

Ezt pedig az $n^2 - 13n + 24$ egyenlet két gyökét kiszámolva láthatjuk, hogy $n \geq 11$ esetén teljesül.

7. Jelöljük $cr(G)$ -vel a G gráf élkereszteződési számát, vagyis azt a legkisebb számot, amennyi élkeresztezéssel síkba lehet rajzolni G -t. Igazold, hogy $e - cr(G) \leq 3n - 6$, ahol e az élek, n a csúcsok száma.

Megoldás: Vegyünk egy olyan lerajzolást, ami pontosan $cr(G)$ élkereszteződést tartalmaz. Ha a kereszteződő élpárokból elhagyjuk mindig az egyiket, akkor egy síkbarajzolt gráfot kapunk. Mivel pont $cr(G)$ élt hagytunk el ezért $e - cr(G) \leq 3n - 6$.

8. Mutasd meg, hogy K_8 lerajzolásakor legalább 10 élkereszteződés jön létre.

Megoldás: Az előző feladatot felhasználva $\binom{8}{2} - cr(K_8) \leq 3 \cdot 8 - 6$, átalakítva

$$cr(K_8) \geq \binom{8}{2} - 3 \cdot 8 + 6 = 10.$$

9. Igazold, hogy nem létezhet 5 darab páronként szomszédos ország. Miért rossz a bizonyítás?

Megoldás: Tegyük fel, hogy van 5 darab páronként szomszédos ország és kössük össze a fővárosaikat éllel. (Ez a gráf duálisa a térkép-gráfnak). A feltétel szerint a kapott gráf egy K_5 lenne, ami nem síkbarajzolható. Ez ellentmondás mert a gráfnak síkbarajzolhatónak kellene lennie.

A baj ott van az érvelésben, hogy hallgatólagosan feltettük, hogy az országaink összefüggőek, ami egyébként nincs mindig így, lásd például oroszországot.

10. Legyen G egy 20 csúcsú összefüggő 3-reguláris síkgráf. Hány csúcsa van G duálisának?

Megoldás: A duális csúcsszáma megegyezik a gráf síkbarajzolásának tartományainak számával. Ha $n = 20$ és minden csúcs foka 3, akkor

$$\sum_v d(v) = \sum_v 3 = 20 \cdot 3 = 2e,$$

amiből az élek száma $e = 30$. Az Euler-formulát használva $t = 2 + e - n = 2 + 30 - 20 = 12$.

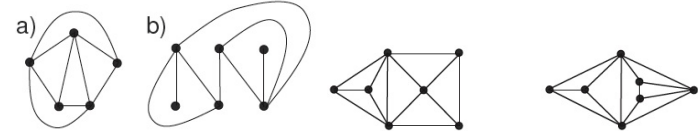
11. Bizonyítsd be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható.

Megoldás: Ha összesen n csúcs van, akkor $4n = 2e$, így $e = 2n$. Mivel páros a gráf ezért minden köre legalább négy hosszú, így ha síkbarajzolható, akkor $e \leq 2n - 4$. De ez itt azt jelentené, hogy $2n \leq 2n - 4$ ami nem lehet.

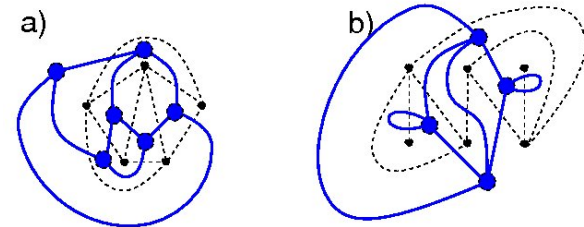
12. A síkot véges sok mindkét irányban végtelen egyenes elhelyezésével „országokra” bontjuk. Mutassuk meg, hogy ez a „térkép” 2 színnel megszínezhető!

Megoldás: Csak véges sok egyenessel osztottuk fel a síkot. Ezek az egyenesek meghatároznak irányokat. Lesz olyan irány, hogy sem őt, sem a rá merőleges irányt nem kaptuk még meg a lehelyezett egyenesekkel, mert csak véges sokat tettünk le. Vegyünk egy ilyen, nem megkapott irányú egyenest (ú.n. pásztázó-egyenest) és egy kellően távoli helyről kezdjük el tolni a rá merőleges irány mentén. Amikor ez elmozdult eddig még nem kiszínezett országokat, akkor „felülről lefelé” azokat ki tudjuk színezni. Könnyű megmondani, hogy így tényleg elég lesz kettő szín.

13. Készítsük el az (a) és (b) gráfok duálisát. Mutasd meg, hogy a másik két gráf izomorf, de duálisai nem izomorfak.



Megoldás: Itt van az első két gráf duálisa:

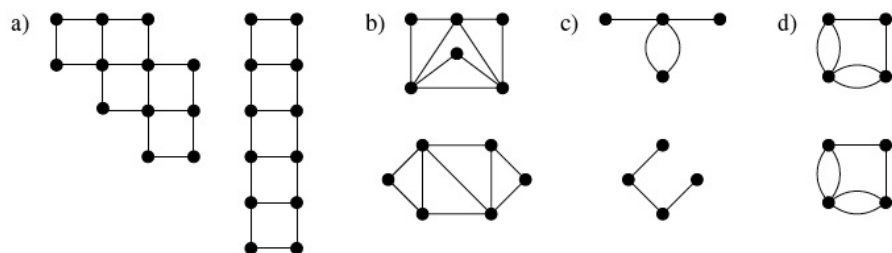


A másik két gráf duálisa nem lehet izomorf, mert az első duálisának minden foka három, míg a másodikának van negyedfokú csúcs.

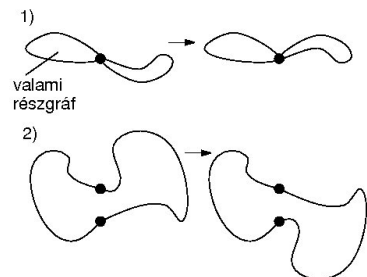
14. Mutasd meg, hogy két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi csúcsuk van.

Megoldás: Fában nincsen kör, ezért az élek között minden bijektív megfeleltetés körtartó. Bijekció az élek között pedig pontosan akkor van, ha ugyan annyi éle van a két fának. Mivel az élek száma egyel kevesebb a csúcsok számánál, ez ekvivalens azzal, hogy ugyan annyi csúcsuk legyen.

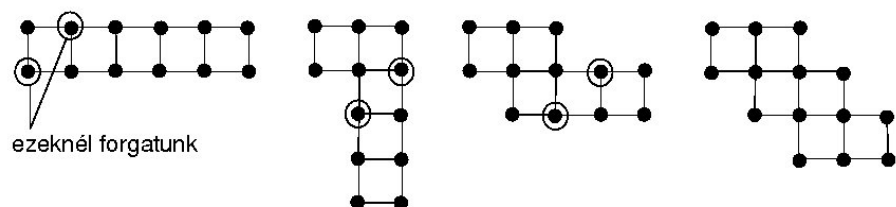
15. Gyengén izomorfak-e az alábbi gráfok?



Megoldás: Whitney tétele szerint ha az alábbi műveletekkel el tudunk jutni az egyik gráfból a másikba, akkor (és csak akkor) gyengén izomorfak.



Ez az első gráfnál igaz:

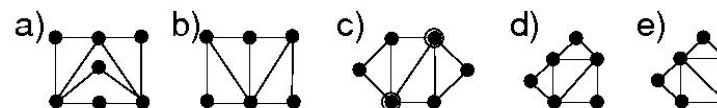


A (b)-beli gráfok gyengén izomorfak, mert a fenti lépésekkel az egyik megkapható a másikkól.

A (c)-beli gráfok nem gyengén izomorfak, mert az elsőben van kör, míg a másodikban nincs. (Így körtartó leképezés nincs).

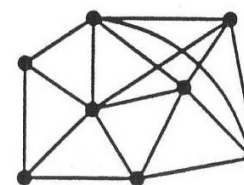
A (d)-beli gráfok gyengén izomorfak, hiszen ugyan az a két gráf.

16. Keressünk izomorf és gyengén izomorf párokat a következő gráfok között!



Megoldás: Az (a) gráfnak 10 éle van míg a többinek 9, így az nem lehet gyengén izomorf egyetlen másik gráffal sem (és persze izomorf sem). A (c) és (d) gyengén izomorf, hiszen ha (c)-ből elhagyjuk a két jelölt pontot, akkor a gráf két részre esik szét és ha az ezen csúcsoknál szétválasztjuk a gráfot, majd az egyik rész megfordítása után újra összeragasztjuk, akkor a (d) gráfot kapjuk. A (b) és (e) gráfok izomorfak, így gyengén izomorfak is.

17. Síkbarajzolható-e a következő gráf?



Megoldás: Nem síkbarajzolható, mert található benne $K_{3,3}$ -mal és K_5 -tel topologikusan izomorf részgráf is.

- Legyen $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ és $D = \{\{\{\emptyset\}\}\}$. Írjuk fel az alábbi halmazokat:
 - $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$;
 - $\mathcal{P}(C)$, $\mathcal{P}(D)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(D))$.
 Mennyi D számossága?
- Legyen A egy n elemű halmaz. Mennyi $|\mathcal{P}(A)|$?
- Igaz-e, hogy ha $A \subset B$ akkor $|A| < |B|$? És fordítva?
- Adj meg bijekciót az alábbi halmazok között!
 - $\mathbb{Q}$ és $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.
 - $[0, 1]$ és $[a, b]$.
 - $(0, 1)$ és $[0, 1]$.
 - $(0, \infty)$ és $(-\infty, \infty)$.
 - $(-\infty, \infty)$ és $(-\pi, \pi)$.
- Add meg a következő halmazok számosságát:
 - Az egész számokból álló (véges méretű) mátrixok.
 - $1, a_1, a_2, \dots$ sorozatok, melyekben a szomszédos elemek hányadosa 2 vagy $\frac{1}{2}$.
 - Azon síkbeli háromszögek, melyeknek minden koordinátája egész szám.
 - Azon síkbeli háromszögek, melyeknek a területe egész szám.
 - A síkon egy háromszög belső pontjai.
 - A racionális számokból álló végtelen sorozatok.
 - A folytonos valós függvények.
 - A természetes számok részhalmazai.
 - A természetes számok véges részhalmazai.
- Mi az olyan z komplex számok halmazának számossága, amikre teljesül, hogy $z \cdot \bar{z}$ egész szám?
- Mi a számossága annak a halmaznak, melynek elemei azok a számok, melyek felírhatók $a + b\sqrt{k}$ alakban úgy, hogy k pozitív egész, a és b pedig racionális számok?
- Egy valós számot nevezzünk *kiszámíthatónak*, ha lehet írni egy algoritmust, amellyel minden tizedesjegyet meghatározhatjuk. Van-e nem kiszámítható valós szám? Ha van, hány ilyen van?
- Legyen $[n]$ az első n természetes szám halmaza. Mi a számossága az $[1] \times [2] \times [3] \times \dots$ halmaznak, tehát annak, aminek elemei azok a végtelen $a_1, a_2, \dots$ sorozatok, amire $a_i \in [i]$ teljesül minden i -re?
- Az I épületben van egy kóla automata ami kicsit hibás: ha bedobsz egy forintot, kiad hármat helyette (az automatát sajnos csak a SZIT tanszék munkatársai használhatják). Egy forinttal indulsz, és minden körben újra bedobhatsz egy forintot azok közül, amiket a gép már visszaadott. Mutasd meg, hogy ha elég ügyesen játszol, akkor $\aleph_0$ lépés után elfogy minden pénzed! És tudsz úgy játszani, hogy pontosan 17 forintod maradjon a végén?
- Nyarálás során a Cantor Hotelben szerettünk volna megszállni, ami hírnevét annak köszönheti, hogy megszámlálható sok szobája van. Sajnos mire odaértünk már az összes foglalt volt (nyári szezon). Mutasd meg, hogy az igazgató mégis el tud helyezni téged, anélkül, hogy bárkinek el kellene hagyni a szallodát. És ha jön még 20 vendég utánad? És ha megszámlálható sok jön még?
- Adj meg bijekciót a következő halmazok között
 - $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ és $A = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$.
 - $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ és $B = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$.
 - $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ és $C = \{f \in B : f \text{ monoton növe}\}$.
 - $D = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : f \text{ monoton csökkenő}\}$ és $\mathbb{N}$.
- Nevezzük *mintagráfnak* az olyan G véges egyszerű gráfokat, amiknek alaphalmaza az $\{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ halmaz. Mennyi a mintagráfok halmazának számossága? Igaz-e, hogy minden véges gráf izomorf egy mintagráffal?
- Vegyünk megszámlálható sok $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényt és legyen ezek halmaza $\mathcal{F}$. Igazold, hogy mindig van olyan valós függvény, ami nem áll elő $\mathcal{F}$ -beli függvények lineáris kombinációjaként. És ha kontinuum sok függvényből indultunk volna ki (ha $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}$)?
- Mennyi kontinuum sok kontinuum számosságú halmaz uniójának számossága?
- Hol a hiba a következő "bizonyításban"? Legyen U az egyelemű halmazok halmaza, azaz $U = \{X : |X| = 1\}$ és legyen $V = \{\{Y\} : Y \in \mathcal{P}(U)\}$. Tudjuk, hogy $|U| \leq |\mathcal{P}(U)|$ mert az $X \mapsto \{X\}$ leképezés injektív. Ezért $|\mathcal{P}(U)| = |V|$ és persze $V \subseteq U$, hiszen V is egyelemű halmazokból áll. De akkor $|U| = |\mathcal{P}(U)|$ is igaz, vagyis mutattunk egy olyan halmazt, amire nem igaz Cantor tétele (miszerint minden A halmazra $|A| < |\mathcal{P}(A)|$).
- Egy A halmaz végtelen, ha egyetlen természetes n számra sem igaz, hogy $|A| = |n|$. Igazold, hogy egy halmaz pontosan akkor végtelen, ha van olyan valódi $X \subset A$ részhalmaza amire $|A| = |X|$.

1. Legyen $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ és $D = \{\{\{\emptyset\}\}\}$. Írjuk fel az alábbi halmazokat:

(a) $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$;

(b) $\mathcal{P}(C)$, $\mathcal{P}(D)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(D))$.

Mennyi D számossága?

Megoldás:

(a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$. $A \cap B = \{2\}$. $A \setminus B = \{0, 1\}$.

(b) $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. $\mathcal{P}(D) = \{\emptyset, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$.

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(D)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2. Legyen A egy n elemű halmaz. Mennyi $|\mathcal{P}(A)|$?

Megoldás: $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ lesz. Ezt már láttuk a kombinatorika részben. A -nak k elemű részalmazából $\binom{n}{k}$ van. Most a lehetséges k -kra ezeket összeadva

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^n.$$

Másképpen: legyen $\mathcal{F} = \{f : A \rightarrow \{0, 1\} \text{ függvények}\}$ halmaza és legyen $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}(A)$ a következő leképezés:

$$\Phi(f) = \{a \in A : f(a) = 1\} \subseteq \mathcal{P}(A).$$

Könnyen láthatóan Φ egy bijekció, ezért $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{F}|$. Viszont $|\mathcal{F}|$ megegyezik az n hosszú 01 sorozatok számával amikből 2^n darab van (n darab független döntés: mindegyik helyen kétfajta érték lehet).

3. Igaz-e, hogy ha $A \subset B$ akkor $|A| < |B|$? És fordítva?

Megoldás: Nem. Nem. Például $\{\text{páros számok}\} \subset \mathbb{N}$, de a számosságuk megegyezik. Visszafele, ha $|A| < |B|$, attól még lehetnek diszjunktak. Például $A = \{\pi\}$ és $B = \{0, 1\}$.

4. Adj meg bijekciót az alábbi halmazok között!

(a) $\mathbb{Q}$ és $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.

(b) $[0, 1]$ és $[a, b]$.

(c) $(0, 1)$ és $[0, 1]$.

(d) $(0, \infty)$ és $(-\infty, \infty)$.

(e) $(-\infty, \infty)$ és $(-\pi, \pi)$.

Megoldás:

(a) Pont ugyan úgy megy, mint az előadáson látott $\mathbb{R} \sim (a, b)$ illetve (a, b) helyett $[a, b]$, $[a, b]$, $(a, b]$ bizonyítása, attól függően, hogy a, b racionális vagy irracionális. (Az (e) rész után szereplő függvényekből mindegyik eset összerakható).

(b) Geometria megoldás: rajzoljuk le $[0, 1]$ -et és $[a, b]$ -t egymás alá valamilyen távolságban, és legyen x a $\overline{0a}$ és $\overline{1b}$ összekötő egyenesének metszéspontja. Ekkor x -ből vetítve kapunk egy bijekciót.

Algebrailag: legyen $f : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ az $f(x) = (b - a)x + a$ függvény (0-ban a , 1-ben b , amúgy lineáris). Ez jó lesz.

(c) A következő $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ leképezés bijekció lesz:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{ha } x = \frac{1}{n}, \text{ ahol } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{egyébként} \end{cases}$$

(d) $\log : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ és $\exp : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ mindkettő bijekció.

(e) $2 \arctan(x)$ jó lesz.

Még pár hasznos bijekció: $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x} & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{1-x} - 2 & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Ennek az inverze

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2-y} & \text{ha } y < 0, \\ 1 - \frac{1}{2+y} & \text{ha } y \geq 0 \end{cases}$$

$g : (0, 1] \rightarrow (0, 1)$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{ha } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \\ x & \text{egyébként} \end{cases}$$

$g^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, 1]$,

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{ha } y = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \\ y & \text{egyébként} \end{cases}$$

$h : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$,

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Végül $F : [0, 1) \rightarrow (0, 1]$, $F(x) = 1 - x$.

5. Add meg a következő halmazok számosságát:

(a) Az egész számokból álló (véges méretű) mátrixok.

(b) $1, a_1, a_2, \dots$ sorozatok, melyekben a szomszédos elemek hányadosa 2 vagy $\frac{1}{2}$.

(c) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek minden koordinátája egész szám.

(d) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek a területe egész szám.

(e) A síkon egy háromszög belső pontjai.

(f) A racionális számokból álló végtelen sorozatok.

(g) A folytonos valós függvények.

(h) A természetes számok részhalmazai.

(i) A természetes számok véges részhalmazai.

Megoldás:

(a) Legyen $\mathcal{M}$ a feladatban szereplő mátrixok halmaza és $\mathcal{M}_n$ az $n \times n$ -es $\mathcal{M}$ -beli mátrixok halmaza. Ezekkel a jelölésekkel

$$\mathcal{M} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n.$$

Először megmutatjuk, hogy minden n -re $|\mathcal{M}_n| = \aleph_0$. Ez abból következik, hogy minden $\mathcal{M}_n$ -beli mátrixhoz egyértelműen tartozik egy $\mathbb{N}^{n^2}$ -beli elem (a mátrix elemeit egymás után kiolvassuk kapunk egy n^2 hosszú vektort), és viszont, vagyis $|\mathcal{M}_n| = |\mathbb{N}^{n^2}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Viszont akkor $\mathcal{M}$ megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója, így ő maga is megszámlálható: $|\mathcal{M}| = \aleph_0$.

(b) Minden egyes a_i elemre két választási lehetőségem van asszerint, hogy $\frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{1}{2}$ vagy 2. Ezért az ilyen sorozatok számossága megegyezik a megszámlálható hosszú 01 sorozatok számával, ami nem más, mint az $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ függvények halmazának számossága. Erről tudjuk, hogy megegyezik $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ -el, ami kontinuum.

(c) Minden háromszöget meg tudunk adni három csúcsának koordinátájával. Mivel ezen koordináták minden tagja egész szám, ezért háromszögből sem lehet több, mint $|\mathbb{N}^6| = \aleph_0$. Ennyi megfelelő háromszöget könnyű megadni, ezért a feladatbeli háromszögek halmazának számossága $\aleph_0$.

(d) Több mint kontinuum biztos nem lehet, mert hat valós számmal egyértelműen le tudom írni a háromszöget (a három csúcsának koordinátái), és $|\mathbb{R}^6| = \mathfrak{c}$. Viszont ennyit meg is lehet adni: vegyünk egy tetszőleges feladatbeli háromszöget, és kezdjük eltolni az egyik tengely mentén. Ekkor annyi különböző háromszöget kapunk, ahány valós szám van, ami pont $\mathfrak{c}$.

(e) Biztos tartalmaz intervallumot, ezért legalább $\mathfrak{c}$, és legfeljebb is ennyi, mert az egész sík számossága is ennyi: $|\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}$.

(f) A $H = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}\}$ halmaz számosságát kellene megadni. Ez legalább kontinuum, mert tartalmazza részhalmazként az $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ függvényeket, amik azonosíthatók $\mathbb{N}$ részhalmazai. Most megadunk egy injektív leképezést H -ból az $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ függvények halmazába, amivel igazoljuk, hogy legfeljebb kontinuum lehet a számossága H -nak. A kettőt összerakva kapjuk, hogy $|H| = \mathfrak{c}$.

Minden $f \in H$ felfogható úgy, mint racionális számok egy végtelen sorozata: $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$. Feltehetjük, hogy a racionális számok felírása nem egyszerűsíthető, és ha $\frac{p_1}{q_1} = 0$, akkor $p_1 = 0$ és $q_1 = 1$. Egy ilyen sorozatból csinálunk egy 01 sorozatot: írjunk le $p_1 + 1$

darab 0-t, majd egy elválasztó 1-et, majd $q_1 + 1$ darab 0-t, majd megint egy 1-et, és így tovább. Ezzel egyértelműen definiáltunk egy 01 sorozatot, és két különböző $f, g \in H$ -hoz különböző sorozat fog tartozni.

(g) Minden folytonos függvényt meghatároz a racionális helyeken felvett értékei, ezért a folytonos függvények halmazának számossága legfeljebb akkora, mint a $H = \{f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}\}$ halmaz számossága. Ez pedig $\mathfrak{c}$.

(h) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathfrak{c}$.

(i) **Megoldás 1:** Legyen H az $\mathbb{N}$ véges részhalmazainak száma. Ekkor ha H_n -nel az n -elemű részhalmazokat jelöljük, akkor $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$. Most megmutatjuk, hogy minden n -re $|H_n| = \aleph_0$. Egyrészt $|H_n| \geq \aleph_0$, mert ennyi darab n elemű részhalmazát $\mathbb{N}$ -nek könnyű megadni. Másrészt $|H_n| \leq \aleph_0$, mert minden n elemű részhalmazhoz tartozik egy $\mathbb{N}^n$ elem (a részhalmazban szereplő elemek, mint vektor), és az átlós eljárásból tudjuk, hogy $|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Ekkor viszont H is megszámlálható, hiszen megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz uniója.

Megoldás 2: Minden véges részhalmaznak van legnagyobb eleme. Azoknak a halmazoknak a száma, amiknek a legnagyobb eleme egy fix természetes szám véges, ezért a feladatban szereplő halmaz megszámlálható sok véges halmaz uniója, ami megszámlálható.

Megoldás 3: Minden véges részhalmazhoz hozzárendelhetünk egy természetes számot a következőképpen. Ha a részhalmaz elemei növekvő sorrendben $a_1, \dots, a_n$, akkor ehhez rendeljük hozzá a

$$2^{a_1} 3^{a_2} \dots p_n^{a_n}$$

számot, ahol p_n az n -edik prím. A számelmélet alaptétele (egyértelmű prímfelbontás) miatt ez egy injektív leképezés a természetes számokba.

6. Mi az olyan z komplex számok halmazának számossága, amikre teljesül, hogy $z \cdot \bar{z}$ egész szám?

Megoldás: Ha $z = a + bi$, akkor $z\bar{z} = a^2 + b^2$. Ezért a kérdés az alábbi halmaz számosságát meghatározni:

$$H = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \in \mathbb{N}\}.$$

Ez legfeljebb $\mathfrak{c}$, mert $H \subset \mathbb{R}^2$ és $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Másrészt $\mathfrak{c}$ sok olyan (a, b) párt amire mondjuk $a^2 + b^2 = 1$ nem nehéz megadni: ezek egy kör pontjai. Ezért kontinuum sok ilyen komplex szám van.

7. Mi a számossága annak a halmaznak, melynek elemei azok a számok, melyek felírhatók $a + b\sqrt{k}$ alakban úgy, hogy k pozitív egész, a és b pedig racionális számok?

Megoldás: Minden $a + b\sqrt{k}$ alakú számnak feleltessük meg az (a, b, k) számhármast.

Mivel a, b racionális és k egész, egy ilyen számhármass $\mathbb{Q}^3$ eleme lesz, és tudjuk, hogy $|\mathbb{Q}^3| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Ezért legfeljebb megszámlálható sok ilyen szám lehetséges (bizonyos számhármassok ugyan azt a számot definiálják, pl. $(1, 0, 0)$ és $(1, 0, 1)$, de ez nem baj, mert felsőbecslést adtunk). Ennyit viszont meg is lehet adni: az $a \in \mathbb{Q}$ és $b = 0$ alakú számok pont a racionálisak.

8. Egy valós számot nevezzünk *kiszámíthatónak*, ha lehet írni egy algoritmust, amellyel minden tizedesjegyet meghatározhatjuk. Van-e nem kiszámítható valós szám? Ha van, hány ilyen van?

Megoldás: A kiszámítható valós számok halmazának számossága a definíció szerint az őket kiszámító algoritmusok halmazának számosságával egyenlő. Minden algoritmus egy véges hosszú karaktersorozat (egy véges ábécét használva; bizonyos karaktersorozatok nem is kódolnak algoritmust), ezért legfeljebb annyi kiszámítható valós szám van, amennyi véges hosszú karaktersorozat. Ez utóbbiból pedig $\aleph_0$ darab van, mert megszámlálható sok véges halmaz uniója. Ennyi kiszámítható számot könnyen meg is lehet adni, például az egész számok mind ilyenek. Vagyis megszámlálható sok kiszámítható valós szám van (összesen pedig kontinuum sok, így a számok többsége nem kiszámítható).

9. Legyen $[n]$ az első n természetes szám halmaza. Mi a számossága az $[1] \times [2] \times [3] \times \dots$ halmaznak, tehát annak, aminek elemei azok a végtelen $a_1, a_2, \dots$ sorozatok, amire $a_i \in [i]$ teljesül minden i -re?

Megoldás: Az olyan $a_1, a_2, \dots$ sorozatok, melyekre $a_i \in \{0, 1\}$ megfelelnek $\mathbb{N}$ részhalmazainak és benne vannak a feladatban szereplő halmazban is, ezért legalább annyi ilyen sorozat van, amennyi részhalmaza $\mathbb{N}$ -nek, vagyis legalább $\mathfrak{c}$.

Megmutatjuk, hogy több viszont nincs, amiből az következik majd, hogy

$$|[1] \times [2] \times [3] \times \dots| = \mathfrak{c}.$$

Ezt úgy bizonyítjuk, hogy mutatunk egy injektív leképezést $[1] \times [2] \times \dots$ -ből $\mathbb{R}$ -be. Ehhez vegyünk egy sorozatot, amire $a_i \in [i]$, írjuk fel a_i -t kettes számrendszerben (a megfelelő 01 sorozatot jelöljük $\bar{a}_i$ -vel) és képezzük a $0.\bar{a}_13\bar{a}_23\bar{a}_33\dots$ valós számot. Az így kapott leképezés injektív. Azért kellett kettes számrendszerbe átirni, hogy a 3-as számjegyet használhassuk "elválasztó" karakternek.

10. Az I épületben van egy kóla automata ami kicsit hibás: ha bedobsz egy forintot, kiad hármat helyette (az automatát sajnos csak a SZIT tanszék munkatársai használhatják). Egy forinttal indulsz, és minden körben újra bedobhatsz egy forintot azok közül, amiket a gép már visszaadott. Mutasd meg, hogy ha elég ügyesen játszol, akkor $\aleph_0$ lépés után elfogy minden pénzed! És tudsz úgy játszani, hogy pontosan 17 forintod maradjon a végén?

Megoldás: Bedobom az első egyforintost. A gép erre kiad megszámlálható sok egy forintost, legyenek ezek $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots$. Most a $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ bizonyítását (az átlós eljárást)

fogom mímelni: visszadobom $a_{1,1}$ -et. Ekkor megint kiad pénzeket: $a_{2,1}, a_{2,2}, \dots$. Most már van "két sornyi" megszámlálható sok forintosom: cikk-cakk bejárásban dobálom vissza a forintokat.

Ekkor megszámlálható sok lépés után minden kiadott egyforintost előbb utóbb visszadobtam, ezért a gépben van minden pénz. Ha azt szeretném, hogy pont 17 forintom maradjon, akkor ugyan ezt csinálom, csak azzal a különbséggel, hogy a legelső lépés után félrerakok 17 forintot a kiadott $\aleph_0$ -ból, és ügyelek arra, hogy ezeket soha ne dobjam vissza.

Utótörténet: sajnos az automatát a nehéz gazdasági helyzetre hivatkozva az egyforintosok bevonásával egyidőben az egyetem vezetése kikapcsoltatta.

11. Nyaralás során a Cantor Hotelben szeretnénk volna megszállni, ami hírnevét annak köszönheti, hogy megszámlálható sok szobája van. Sajnos mire odaértünk már az összes foglalt volt (nyári szezon). Mutasd meg, hogy az igazgató mégis el tud helyezni téged, anélkül, hogy bárkinek el kellene hagyni a szallodát. És ha jön még 20 vendég utánad? És ha megszámlálható sok jön még?

Megoldás: Mindenki átmegy az egyel nagyobb sorszámú szobába, és így az első szoba megüresedik, mégis mindenkinek maradt hely. Ha huszan jönnek, akkor ugyan ezt kell ismételni. Ha megszámlálható sok új vendég jön, akkor mindenki menjen át a dupla sorszámú szobába. Így az összes páratlan sorszámú szoba megüresedik. Oda pont beférnek az új vendégek.

Utótörténet: sajnos ez a szálloda is csődbe ment azóta. Ennek az volt az oka, hogy a k -adik szoba $\frac{1}{k^2}$ alapterületű volt (így fért el a megszámlálható sok szoba a véges alapterületű szigeten), és ezért az azt kibérlő vendégtől is csak ezzel arányosan $\frac{1}{k^2}$ dollárt kértek egy éjszakáért. A befolyt pénz még telt ház idején sem volt elég, hogy kifizessék az adókat.

12. Adj meg bijekciót a következő halmazok között

- (a) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ és $A = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$.
 (b) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ és $B = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$.
 (c) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ és $C = \{f \in B : f \text{ monoton növekvő}\}$.
 (d) $D = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : f \text{ monoton csökkenő}\}$ és $\mathbb{N}$.

Megoldás:

- (a) $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow A$ legyen a következő függvény:

$$\Phi(X)(n) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n \in X \\ 0 & \text{amúgy} \end{cases}$$

Így minden részhalmazhoz hozzárendeltük az ő karaktersztikus függvényét. Ez bijekció.

- (b) Legyen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy függvény. Ez lényegében egy természetes számokból álló sorozat: $f(0), f(1), \dots$. Ennek megfeleltetünk egy 01 sorozatot a következőképpen: $f(0) +$

1 darab 0-ás majd egy 1-es, majd $f(1)+1$ darab 0-ás majd megint egy 1-es, és így tovább. Vagyis a 01 sorozatban úgy van elkódolva az eredeti sorozat, hogy az 1-esek az elválasztó karakterek, a nullákból meg annyi+1 van, amennyi a függvény értéke. Így megadtunk egy bijekciót az $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ függvények között. Ez utóbbi függvények viszont megfeleltethetők $\mathbb{N}$ részhalmazainak, mint karakterisztikus függvények.

(c) Vegyünk egy $X \subseteq \mathbb{N}$ részhalmazt és rendezzük elemeit növekvő sorrendbe: $X = \{a_0, a_1, \dots\}$. Azért, hogy ne kelljen különbséget tenni a véges és végtelen X részhalmazok között, állapodjunk meg abban, hogy ha X véges, mondjuk k elemű, akkor $a_k = a_{k+1} = \dots = 0$. Ezt a halmazt elkódoljuk egy monoton függvénnyel a következőképpen. Legyen $f_X(n) = a_0 + a_1 + \dots + a_n + n$. Ekkor f_X monoton növekvő, és különböző X, Y részhalmazokhoz más és más f_X és f_Y függvény fog tartozni.

Visszafele, ha adott egy monoton növekvő függvény, akkor abból meg tudjuk határozni a hozzá tartozó halmazt (vagyis az $X \mapsto f_X$ leképezés invertálható, és ezért bijektív): $X = \{f(0), f(1) - f(0) - 1, f(2) - f(1) - f(0) - 2, \dots\}$.

(d) Legyen f monoton csökkenő. Ekkor egy pont után konstans a függvény. Legyen ez a pont mondjuk k . Legyen $p_0, \dots$ a prímek egy felsorolása és rendeljük hozzá f -hez az alábbi természetes számot:

$$p_0^{f(0)} p_1^{f(1)} \dots p_k^{f(k)}.$$

Ez a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű.

13. Nevezzük *mintagráfnak* az olyan G véges egyszerű gráfokat, amiknek alaphalmaza az $\{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ halmaz. Mennyi a mintagráfok halmazának számossága? Igaz-e, hogy minden véges gráf izomorf egy mintagráffal?

Megoldás: Legyen H a mintagráfok halmaza, és H_n azon mintagráfoké, amik csúcsai az $\{1, \dots, n\}$ halmaz. Ekkor $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$. Megmutatjuk, hogy minden n -re $|H_n| \leq \aleph_0$. Ebből következn fog, hogy $|H| = \aleph_0$, mert H megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója.

Rögzített n -re H_n -nek csak véges sok eleme van, mert véges sok rögzített pont között csak véges sok féleképpen tudok behúzni éleket. Ezért $|H_n| \leq \aleph_0$.

Végül, ha G egy véges egyszerű gráf, akkor a csúcsait átnevezve természetes számokra, egy, az eredetivel izomorf gráfot kapunk. Úgyhogy valóban minden véges egyszerű gráf izomorf egy mintagráffal.

14. Vegyünk megszámlálható sok $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényt és legyen ezek halmaza $\mathcal{F}$. Igaz-e, hogy mindig van olyan valós függvény, ami nem áll elő $\mathcal{F}$ -beli függvények lineáris kombinációjaként. És ha kontinuum sok függvényből indultunk volna ki (ha $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}$)?

Megoldás: Egy lineáris kombináció mindig megfeleltethető egy n elemű valós számsorozatnak és $\mathcal{F}$ egy n elemű részhalmazának: ha $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ és $(f_1, \dots, f_n)$ ez

a két halmaz, akkor a megfelelő lineáris kombináció

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n.$$

Rögzített n -re a két részhalmazt $|\mathbb{R}^n|$ és $|\mathcal{F}^n|$ -féleképpen lehet kiválasztani. Tudjuk, hogy $|\mathbb{R}^n| = \mathfrak{c}$ és, hogy $|\mathcal{F}^n| = \aleph_0$, ezért összesen $\mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$ féle n -hosszú lineáris kombináció lehetséges. Ha most n is fut, akkor megszámlálható sok kontinuum méretű halmaz unióját kell venni, ami kontinuum méretű marad. Azt kaptuk tehát, hogy összesen is $\mathfrak{c}$ darab lineáris kombináció van.

Az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmazának számossága viszont $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| > \mathfrak{c}$, ezért van olyan valós függvény ami nem áll elő lineáris kombinációként (sőt, a valós függvények többsége ilyen).

Ha $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}$ lenne, akkor ugyan ezt kapnánk.

15. Mennyi kontinuum sok kontinuum számosságú halmaz uniójának számossága?

Megoldás: $\mathfrak{c}$, és a bizonyítás ugyan úgy megy, mint a megszámlálható esetben.

16. Hol a hiba a következő "bizonyításban"? Legyen U az egyelemű halmazok halmaza, azaz $U = \{X : |X| = 1\}$ és legyen $V = \{\{Y\} : Y \in \mathcal{P}(U)\}$. Tudjuk, hogy $|U| \leq |\mathcal{P}(U)|$ mert az $X \mapsto \{X\}$ leképezés injektív. Ezért $|\mathcal{P}(U)| = |V|$ és persze $V \subseteq U$, hiszen V is egyelemű halmazokból áll. De akkor $|U| = |\mathcal{P}(U)|$ is igaz, vagyis mutattunk egy olyan halmazt, amire nem igaz Cantor tétele (miszerint minden A halmazra $|A| < |\mathcal{P}(A)|$).

Megoldás: Cantor tétele halmazokra vonatkozik, ezért a fenti gondolatmenettel igazából azt bizonyítottuk, hogy U nem halmaz. A hiba tehát ott volt, hogy U -ról azt állítottuk, hogy halmaz.

17. Egy A halmaz végtelen, ha egyetlen természetes n számra sem igaz, hogy $|A| = |n|$. Igaz-e, hogy egy halmaz pontosan akkor végtelen, ha van olyan valódi $X \subset A$ részhalmaza amire $|A| = |X|$.

Megoldás: Először tegyük fel, hogy van valódi $X \subset A$, amire $|A| = |X|$, megmutatjuk, hogy ekkor $|A|$ végtelen. Legyen $f: A \rightarrow X$ egy bijekció. Jelölje $f[A]$ az $\{f(a) : a \in A\}$ halmazt. Ekkor $f[A] \subset A$, hiszen $f[A] = X$, ami valódi rész volt. Legyen $a_0 \in A - f[A]$, $a_1 = f(a_0)$, $a_2 = f(a_1) = f(f(a_0))$, $\dots$, $a_n = f(a_{n-1})$, $\dots$. Ekkor az (a_n) sorozat tagjai mind különbözőek, mert f injektív volt (és így az önmagával vett n -szeres kompozíció is injektív). De akkor A -nak meg tudtuk adni egy megszámlálhatóan végtelen részhalmazát, tehát nem lehet véges.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy A végtelen. Ekkor van egy megszámlálhatóan végtelen B részhalmaza is (vegyünk ki egy a_0 elemet, ekkor a maradék még mindig végtelen, ezért ezt tudjuk folytatni...). Ha B -ből elhagyunk egy elemet, mondjuk a_0 -t, akkor $|B| = |B - \{a_0\}|$ marad, hiszen $\geq$ nyilvánvaló, a $\leq$ irányhoz pedig az $f(a_i) = a_{i+1}$ jó lesz. Van tehát g bijekció B és $B - \{a_0\}$ között. Végezetül ebből csinálunk egy bijekciót A és

$A - \{a_0\}$ között. Mivel $A = B \cup (A - B)$ és $A - \{a_0\} = (B - \{a_0\}) \cup (A - B)$, ezért a következő h függvény bijekció lesz

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{ha } x \in B \\ \text{id}_{A-B}(x) & \text{ha } x \in A - B \end{cases}$$