Valószínűségszámítás vizsga dolgozat megoldása

Műszaki informatika szak

2011. június 1.

1. Jelölje X a 90/5 lottóhúzásnál a legkisebb kihúzott lottószámot! Jelölje $F_X(t)$ az X eloszlásfüggvényét! $F_X(4\pi) =?$

   Megoldás: $F_X(4\pi) = \mathbf{P}(X \leq 12) = \sum\limits_{k=1}^{12} \mathbf{P}(X = k)$

   $\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{90-i}{4}}{\binom{90}{5}}$

2. Egy rekeszben 5 teniszlabda van, amiből csak kettő vadonat új. Az első játékhoz véletlenszerűen kiveszünk három labdát, játszunk velük, majd visszatesszük azokat a rekeszbe. (Nyilvánvalóan, ha volt közte új labda, az elveszti ezt a tulajdonságát.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a második játékhoz újból kivett három labda között lesz vadonat új?

   Megoldás:

   A_i : az első játékhoz i db vadonat új labdát vettünk ki, $i = 0, 1, 2$.

   B : A második játékhoz vettünk ki vadonat új labdát.

   $\mathbf{P}(A_0) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}, \mathbf{P}(A_1) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}, \mathbf{P}(A_2) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}$

   $\mathbf{P}(B \mid A_0) = 1 - \frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{9}{10}, \mathbf{P}(B \mid A_1) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}, \mathbf{P}(B \mid A_2) = 0$

   A teljes valószínűség tételéből:

   $\mathbf{P}(B) = \sum\limits_{i=0}^{2} \mathbf{P}(B \mid A_i) \cdot \mathbf{P}(A_i) = \frac{45}{100}$

3. Az α paraméter melyik értékénél lesz sűrűségfüggvény az

   $$f(x) = \alpha\left(x^2 - 2x\right), x \in (0, 2)?$$

   Adja meg a megfelelő eloszlásfüggvényt!

   Megoldás: $1 = \int\limits_0^2 \alpha\left(x^2 - 2x\right) dx = \alpha\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\frac{4\alpha}{3} \Longrightarrow \alpha = -\frac{3}{4}$

   $F(x) = 0, x \leq 0, F(x) = 1, x \geq 2$

   $F(x) = \int\limits_0^x \frac{3}{4}\left(2t - t^2\right) dt = \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right), x \in (0, 2)$

4. Legyen $X \in E(1)$, azaz $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó!

   $$\operatorname{cov}\left(X + 2, 3X^2 - 1\right) =?$$

Megoldás:
$\operatorname{cov}\left(X+2, 3X^2-1\right) = \mathbf{E}\left(3X^3 - X + 6X^2 - 2\right) - \mathbf{E}\left(X+2\right) \cdot \mathbf{E}\left(3X^2-1\right) =$
$= 3\mathbf{E}X^3 - \mathbf{E}X + 6\mathbf{E}X^2 - 2 - \left(\mathbf{E}X + 2\right) \cdot \left(3\mathbf{E}X^2 - 1\right) =$
$= 18 - 1 + 12 - 2 - 3 \cdot 5 = 12$
$\mathbf{E}X = 1, \mathbf{E}X^2 = 2, \mathbf{E}X^3 = 6$

5. Legyen $X_1, X_2, ..., X_n$ egy $E\left(\lambda\right)$ eloszlásból származó statisztikai minta. Igazoljuk, hogy $T = n \cdot X_1^*$ a $\vartheta = \frac{1}{\lambda}$ paraméter torzítatlan becslése.
Megoldás: $F_{X_1^*}(t) = 1 - \left(1 - F(t)\right)^n = 1 - e^{-\lambda n t}, t > 0$
$X_1^* \in E\left(n\lambda\right) \Longrightarrow \mathbf{E}X_1^* = \frac{1}{n\lambda} \Longrightarrow \mathbf{E}T = n\mathbf{E}X_1^* = \frac{1}{\lambda} = \vartheta$

6. a.) Mi a feltétele annak, hogy az egymintás u-próbát alkalmazhassuk?
b.) Mi a nullhipotézis?
c.) Mi a próbastatisztika?
Megoldás: a.) A minta normális eloszlást követ, ismert szórással.
b.) A várható érték egy adott m_0 értékkel egyezik meg.
c.) $u = \frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$,
ahol n a mintaelemszám, σ_0 a minta ismert szórása.