1. Legyen $\Sigma = \{0, 1\}$. Az f függvény értéke egy $x \in \Sigma^*$ inputon xx, amennyiben x olyan nem-üres szó, ami csak egyféle karaktert tartalmaz, egyébént f nincsen értelmezve.

   Adjon meg egy olyan (determinisztikus, több szalagos) kiszámoló Turing-gépet, ami ezt a függvényt számolja ki,
   - először szövegesen, de precízen vázolva a működését,
   - majd az átmeneti függvény megadásával vagy ábrával is!

3 szalaggal:
2.szalag elejét megjelölöm, és felmásolom az inputot rá.
Miközben olvasom az inputot az első szalagról átmásolom azt a második szalagra egy az egyben. (Ha nem ugyanolyan karakter jött, akkor egy trap állapotba menjünk át, ami vissza van hurkolva önmagába). Ha elfogyott az input, akkor a második szalag végéről előre megyek az X-ig, és még egyszer felmásolom a 3. szalagra.
TÁDÁM így lett a csokapik.

2. Álljon L az olyan Turing-gépek kódjaiból, amiknek nyelve tartalmazza a diagonális nyelv minden szavát. Igazolja, hogy L nem rekurzív!

Mivel a diagonális nyelv nem RE -> ezért nem Rekurzív sem.
Miért nem RE?
Tegyük fel indirekte, hogy az. Tehát létezik M TG, amelynek a nyelve:
- ha w eleme Ld -> w eleme L(M)
- ha w nem eleme Ld-> w nem eleme L(M)

M kódja legyen w*
- ha w* eleme Ld -> w* eleme L(M) = L(Mw*) => w* nem eleme diagonális a def miatt.
- ha w* nem eleme Ld -> w* nem eleme L(M) = L(Mw*) => w. eleme Ld a kezdőfeltevés miatt

3. Igaz-e, hogy az $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 1\}$ nyelv
   (a) rekurzív?
   (b) rekurzívan felsorolható?
   (c) P-ben van?
   (d) NP-beli?

Adjunk rá egy mindig leálló Turing gépet, ami mindig megáll (ilyet könnyű), azaz a és b igaz. Megnézzük, hogy a gép mennyi ideig fut, valószínűleg párszor végigfut a bemeneten, szóval O(n)-es, ebből következik hogy P-beli, és NP-beli is :)

4. Algoritmikusan eldönthető-e a következő feladat: Adott G_1 és G_2 két környezetfüggetlen nyelvtan esetén a kérdés az, hogy $L(G_1) \cup L(G_2)$ az üres halmazza egyenlő-e.

Egyenként eldönthető, hogy L(G1) vagy L(G2) üres halmaz e. Márpedig az unió akkor üres, ha mindkét halmaz üres egyenként, tehát eldönthető a válasz. (Ez túl egyszerű volt??)

5. Álljon az L nyelv azon Turing-gépek kódjaiból, amik legfeljebb egy szót fogadnak el. Igazolja, hogy $L \in coRE$.

L eleme coRE a.cs.a L komplementer eleme RE.
L komplementer = {w: vagy nem TG-et kódol, vagy (TG-et kódol és több mint egy szót fogad el) }

Ilyen pediglen van:

- Nézzük meg hogy w TG-e. Ha nem akkor elfogadjuk.
- Ha igen akkor megnézzük, hogy hány szót fogad el.
    - Próbáljunk ki minden lehetséges inputot egy k véges korlátig.
    - Ha több mint egy szót elfogadtunk álljunk le elfogadjunk el.
    - Ha 0 vagy 1-et akkor növeljük k korlátot.
        - Ha valóban létezik több mint egy szó amit elfogadunk az véges időben kiderül, ha nem akkor nem állunk le, így ez egy jó RE algoritmus.

1. Legyen $L = \{ w\#wx \ : \ w, x \in \{ \mathtt{a}, \mathtt{b} \}^* \}$. Adjon meg egy, ezt a nyelvet elfogadó 2 szalagos Turing-gépet:
– előbb szövegesen, de azért elég precízen vázolva, hogyan működik,
– utána egy ábrával vagy az átmeneti függvény pontos leírásával!

A 2. szalagra ráírjuk a w-t.
A fej helyzetét elvisszük: 1.szalag: # jel után; 2. szalag: eleje
Egyesével összehasonlítjuk a betűket, és csak akkor lépünk tovább, ha ugyanazok.
Ha elértük a 2. szalag végét, akkor nyertünk.
Helyesség: egyezés esetén elfogad: triviális; nemegyezés esetén beragad egy nem elfogadóba

2. Legyen $L_1 \subseteq \Sigma^*$ egy rekurzívan felsorolható nyelv és L_2 álljon azokból az $x \in \Sigma^*$ szavakból, melyekhez nem létezik olyan $y \in \Sigma^*$, hogy $|y| = |x|$ és $y \in L_1$. Igazolja, hogy $L_2 \in \mathrm{co\,RE}$.

L2 eleme coRe a.cs.a ha L2 komplementer eleme RE.
L2 komplementer = olyan x szavakból áll, melyekhez létezik olyan y, hogy x és y hossza megegyezik, és y RE.
Tehát létezik olyan M TG, hogy L(M) = L2 komplementer, és elfogadáskor megáll.
Ilyen pediglen van:

- tetszőleges x inputra keressünk vele egyenlő hosszúságú y-t. Mivel x hossza véges, ezért a keresés is véges időben fog eredményre találni.

3. Álljon az L nyelv az olyan Turing-gépek w kódjaiból, hogy a w kódú Turing-gép legalább egy szót elfogad az univerzális nyelvből. Igazolja, hogy ez az L nyelv nem rekurzív!

TFH az, tehát létezik M TG ami mindig megáll.
Kéne, hogy ha w nem TG kód akkor elutasít, ez rendben.
Ha w TG akkor meg azt vizsgáljuk, hogy legalább egyet elfogadott-e, és ha igen akkor elfogadunk. Na de ilyen nincsen hiszen max. azzal a fenti korlátos módszerrel tudnánk csinálni, ami RE algoritmus, nem R, mert nemleges válasznál nem áll le. Btw Lu is RE és nem R

4. Algoritmikusan eldönthető-e az alábbi feladat: Adott a G_1 és G_2 környezetfüggetlen nyelvtan. Kérdés, hogy $L(G_1) = \overline{L(G_2)}$.

Nem igaz, mert ha így lenne, akkor L(G1) metszet L(G2) = 0 igaz lenne, de G2 komplementere akár CS is lehet (nem zárt komplementere), és ha CS es G1 üres, akkor ürességet tudunk ellenőrizni CS-re

5. Tudjuk, hogy $L_1 \in \mathrm{NP}$ és $L_2 \in \mathrm{SPACE}(n^2 \log n)$. Következik-e ebből, hogy $L_1 \cap L_2 \in \mathrm{EXPTIME}$?

L2-ből t.i.t-lel csinálunk Time(c^(n^2*logn))-t, ez egyenlő 2^(logc*logn*n^2)-tel.
Tehát L2 exptime, NP részhalmaza exptime, tehát a metszetük a bővebb halmaz azaz az exptime.

2. Az $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ nyelvekhez definiáljuk az $f(x)$ függvényt úgy, hogy legyen $f(x) = 1$ ha $x \in L_1$, legyen $f(x) = 2$ ha $x \in L_2 - L_1$, egyébként pedig $f(x) = 0$. Igaz-e, hogy ha $L_1, L_2 \in \mathrm{R}$, akkor az f egy rekurzív függvény?

Ha L1,L2 rekurzív -> Létezik M1 és M2 TG, melynek a nyelve L1 illetve L2 és ezek mindig megállnak. Kéne olyan M' TG ami azt csinálja mint a függvény, és mindig megáll.
Ilyen van:

- Adjuk be x-et M1-nek. Ha elfogadja akkor 1 lesz az output, ha nem fogadja el, az azt jelenti, hogy nincs benne L1-ben. Ilyenkor adjuk be M2-nek: Ez eldönti, hogy L2-ben van-e (és L1-ben nincs, mert előbb elutasított M1). Ha M2 elfogad akkor M' outputja 2 lesz, különben 0. Mivel M1 és M2 rekurzív mindig megáll, ezért a belőlük építkező M' is.