

A vállalati döntések modellezése

Profitmaximalizálás

Profit függvény általánosan

- $\Pi = TR - TC$
- $TR = QP$ – a piaci forma határozza meg
- TC – a technológia és a termelési tényezők ára határozza meg
- A technológiát a **termelési függvény mutatja**

Profitmaximalizálás

- $Q = \frac{1}{8}\sqrt{KL}, P_K = 250, P_L = 20, K=256$
- $P=1500 - 2,5Q$
- $\Pi=TR - TC$ maximális
- $Q=?$
- $P=?$
- $L=?$
- $\Pi=?$

Termelési tényezők

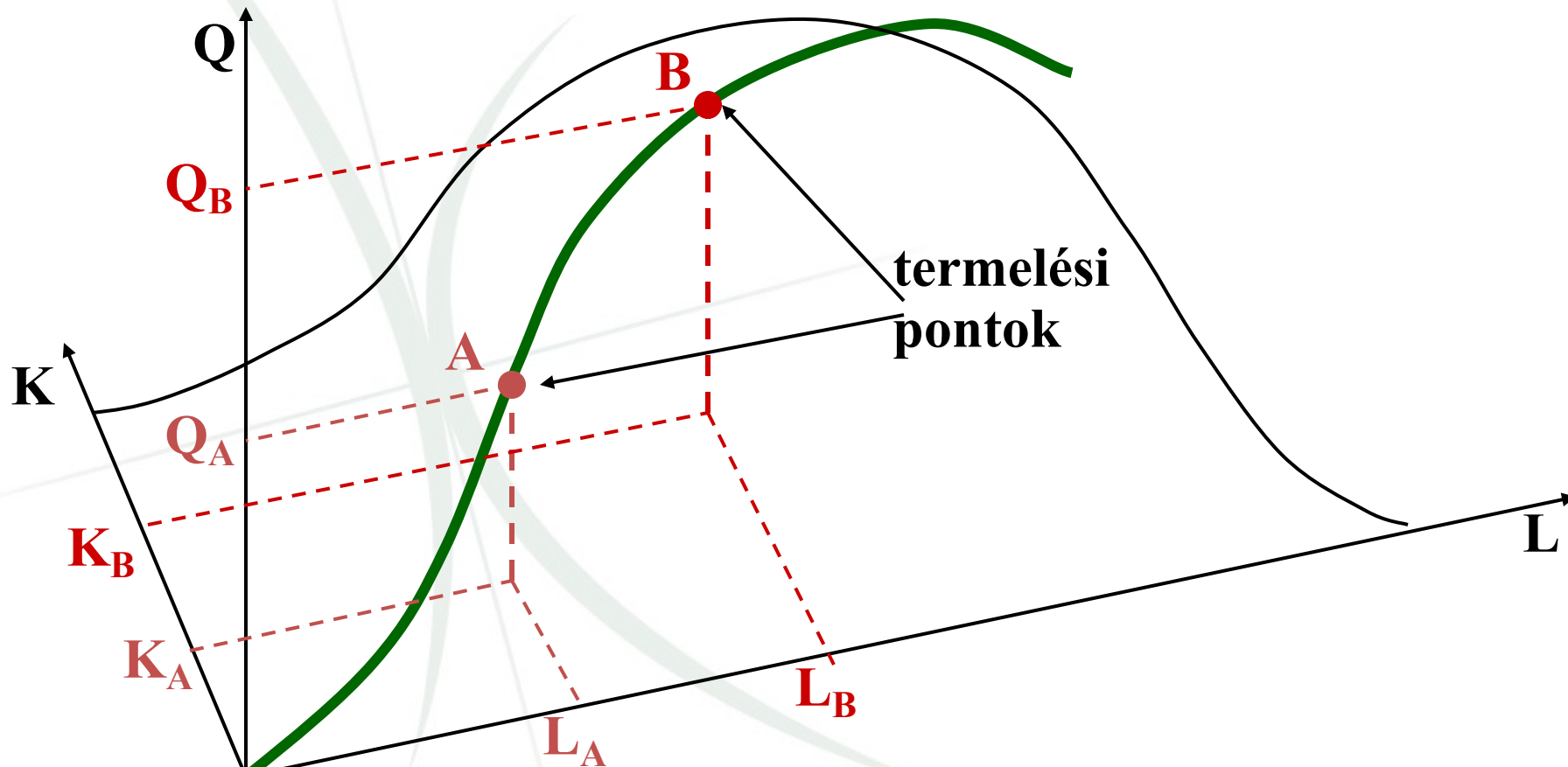
- Munka (**L**abour)
- Tőke (Capital – **K**)
- +
- Természeti tényezők (**L****A**nd)
- Vállalkozói szolgáltatás (**E**nterpreneur)

Termelési függvény

- $Q=f(t_1, t_2, t_3 \dots t_n)$
- **Két változóval: $Q=f(K,L)$**
- **„Rövid távon”:**
 - **K a fix tényezők csoportja**
 - **L a változó tényezők csoportja**

A termelési függvény

Két input esetén: $Q=f(K,L)$



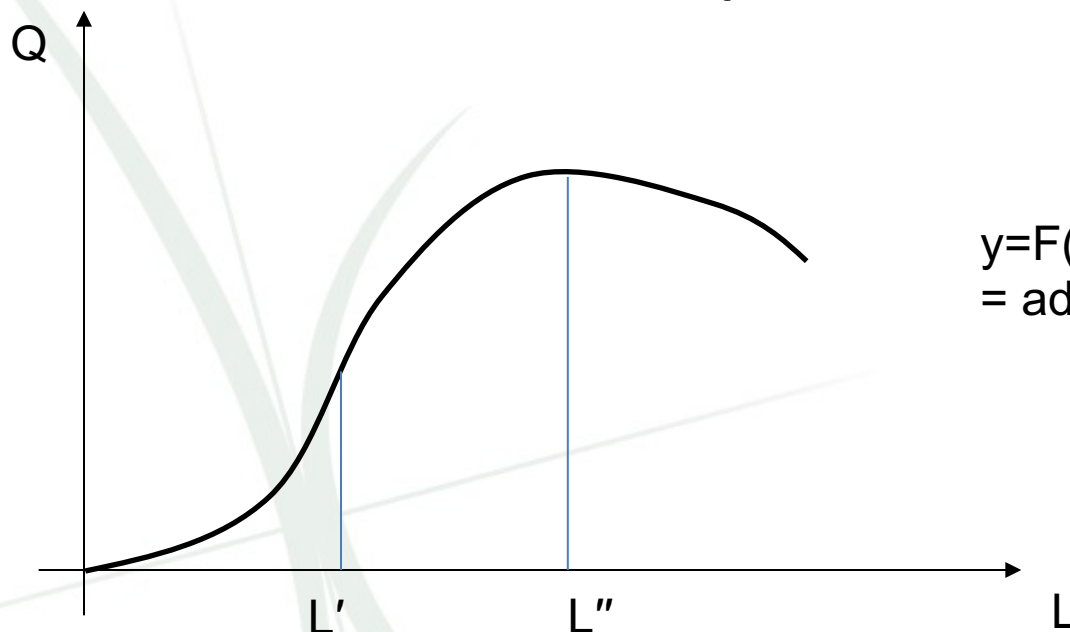
A termelési függvény

- Adott technológia mellett mutatja az output függését az inputoktól
- Természetes mértékegységben
- „Hosszú táv”= minden input változhat
- Fő kérdés az optimális üzemméret

Gazdasági időtávok

- Nagyon rövid táv (piaci)
- Rövid táv: egyes tényezők változatlanok, mások változnak (= fix és változó tényezők)
- Hosszú táv: minden tényező változik
- Nagyon hosszú táv: a technológia is változik → új termelési függvény

Parciális (rövidtávú) termelési függvény = adott üzemméret (kapacitás kihasználás)



$y = F(L, K_0)$, K rögzített K_0 értéken
= adott üzem nagyság

Ha $0 \leq L \leq L'$, akkor a munkaráfordítás növelésével a termelés növekvő ütemben nő, ha $L' \leq L \leq L''$ csökkenő ütemben nő; Ha $L'' < L$, akkor már csökken.

A termelési függvény meredeksége: **határtermék, határtermelékenység**

Határtermék, határtermelékenység

- Jele MP_L az az összterméknövekmény, amely egy újabb munkaegység bevonásával keletkezik, a termelési függvény meredeksége
- Matematikailag meghatározható a termelési függvény munka szerinti első deriváltjával,
azaz: $MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial F}{\partial L}$
- Valójában a hozadéki szférákat határolja el
- **(Arányváltóási hozadék)**

A termelés átlag- és határterméke (termelékenysége)

- Egy termelési tényező (munka) határterméke
($MP_L = dQ/dL$)
- Egy termelési tényező (munka) átlagterméke
($AP_L = Q/L$)
- Tényező parciális termelési rugalmassága
($\epsilon_L = MP_L/AP_L$)

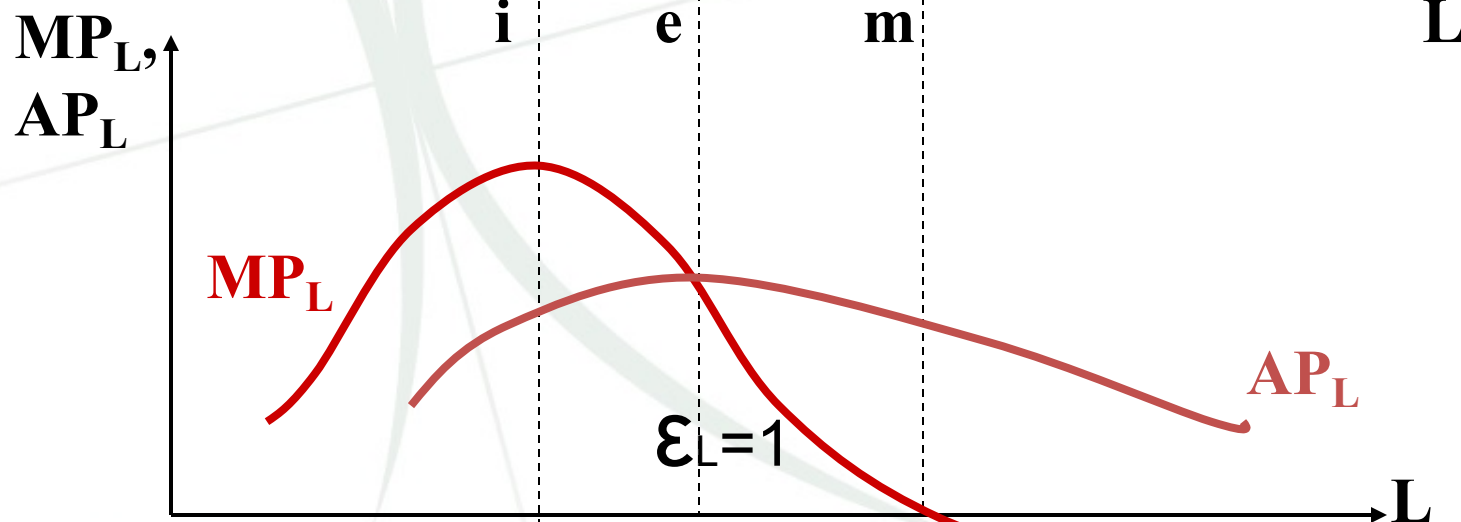
$$\epsilon_L = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dL}{L}} = \frac{\frac{dQ}{dL}}{\frac{Q}{L}}$$

Parciális termelési függvény, Határ- és Átlagtermék (MP_L , AP_L) függvények összefüggései

**E=Változó
tényező
hozadéki
optimuma**

**I=Változó
tényező
hozadéki
maximuma**

**M=fix tényező
hozadéki optimuma**



növekvő hozadék

csökkenő hozadék

negatív hozadék

MP_L maximumában metszi AP_{L-t}

Bizonyítás (általánosan)

- $Y = f(x), \quad \frac{f(x)}{x}$ szélsőértéke, ahol
- $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0, \quad \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = 0$
- $f'(x)x = f(x), \quad \frac{f(x)}{x} = f'(x)$

Újra hosszú táv

- A termelési tényezők együttes (arányos) változása hogyan hat a termelésre
- Skálahozadék, mérethozadék, volumenhozadék
- **Az üzemméret megválasztása!**

Homogén termelési függvények

- Ha a tényezők λ -szorosára nőnek Q hogyan változik
- Ha $f(\lambda K, \lambda L)$ akkor: $Q\lambda^r$, $r=?$, ahol r a homogenitás foka

$r > 1$, növekvő hozadék, pl.: $Q = L^2 * K$

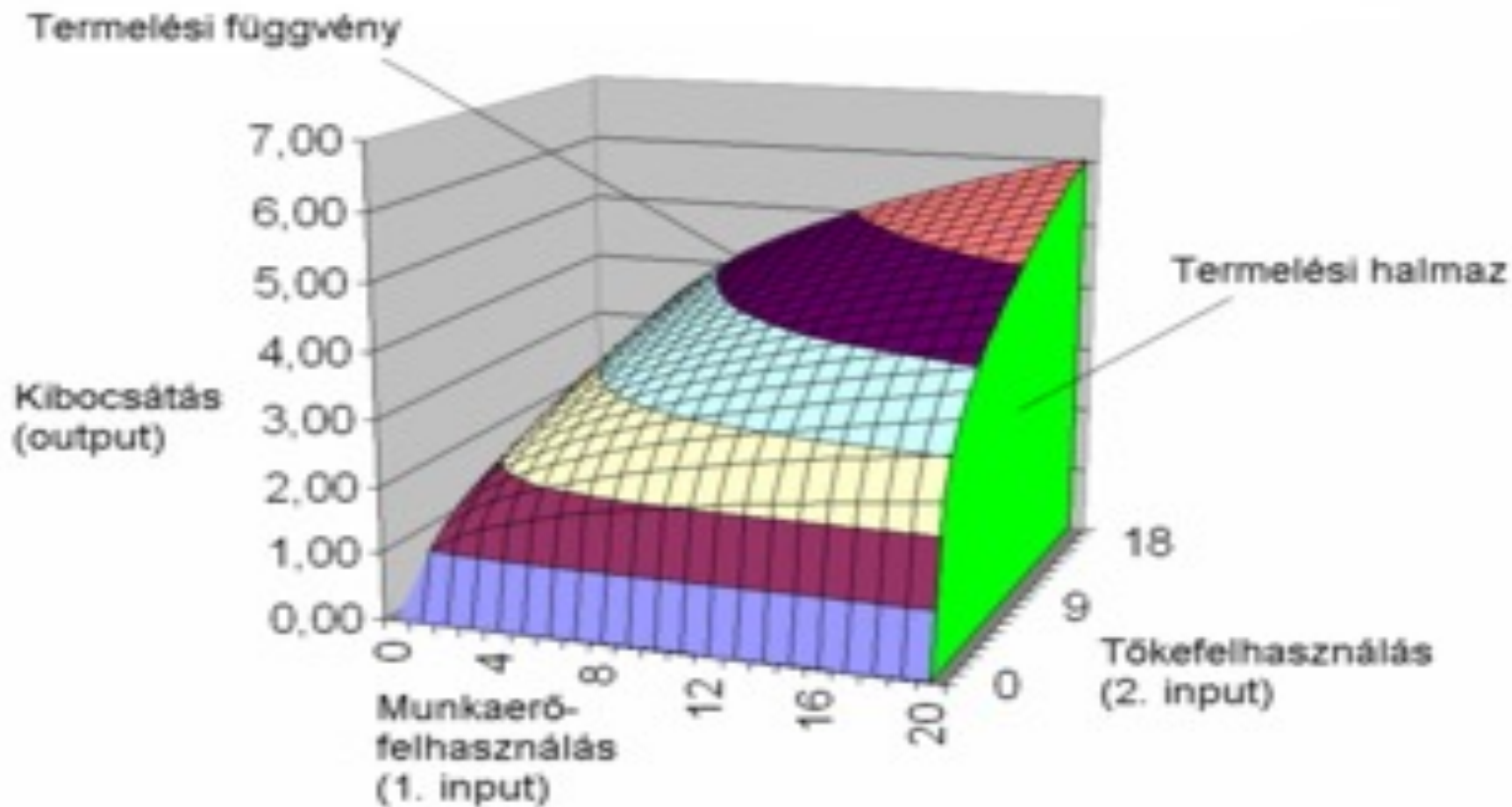
$r = 1$, állandó hozadék, pl.: $Q = (L * K)^{1/2}$

$r < 1$, csökkenő hozadék, pl.: $Q = (L * K)^{1/4}$

Cobb-Douglash- típusú termelési függvény

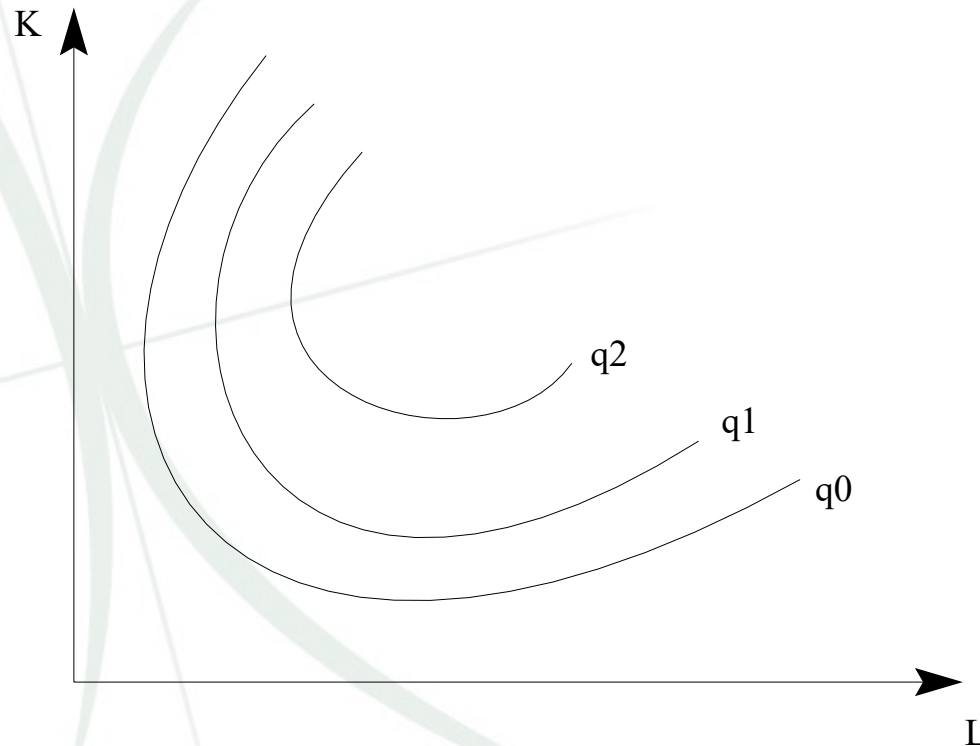
- $Q = AK^\alpha L^\beta$, $\alpha + \beta = r$
- $Q = A(\lambda K)^\alpha (\lambda L)^\beta = \lambda^{(\alpha + \beta)} AK^\alpha L^\beta = \lambda^{(\alpha + \beta)} Q$
- r a homogenitás foka
- Nem Cobb-Douglash-típusú, de homogén pl.
- $Q = 5K^2 + 3KL + 4L^2$
- Nem homogén pl.
- $Q = 5K^3 + 3KL + 4L^2$

Az isoquantok levezetés a termelési



Újra hosszú táv

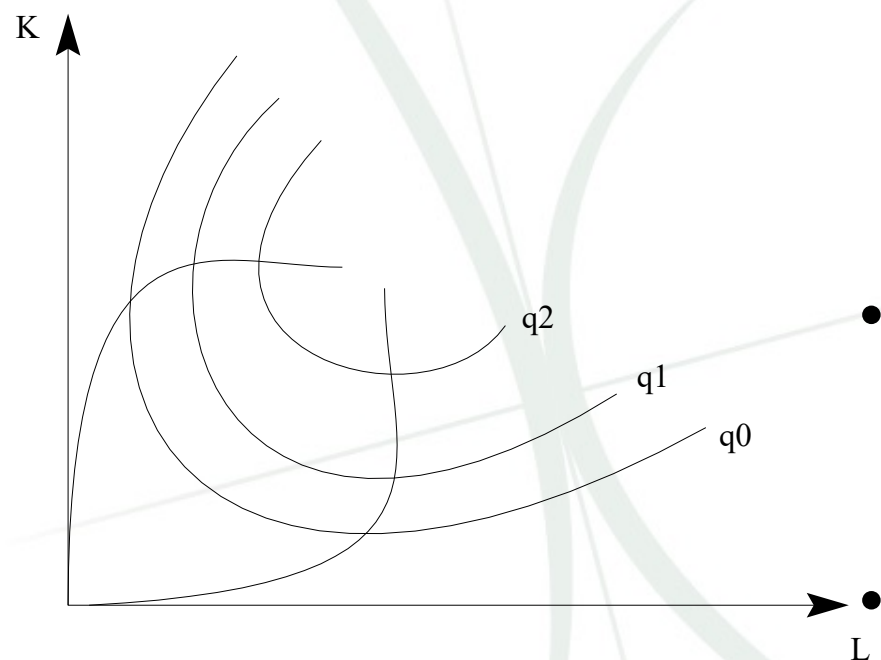
Isoquantok (azonos termék görbék)



q_0 , q_1 és q_2 az egyes vizsgált termelési szinteket jelöli

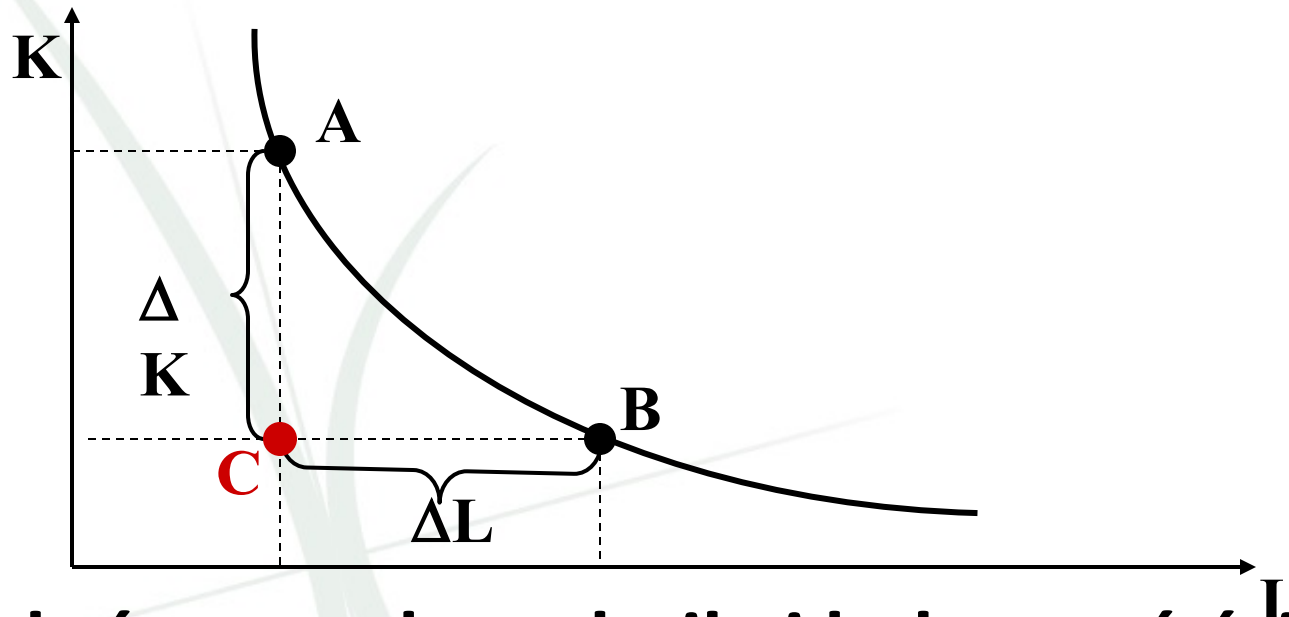
- Az origótól távolabb lévő isoquantok nagyobb termelési szintet jelentenek.
- a K , L koordinátarendszerbe végtelenül sok isoquant rajzolható be (folytonos term. fg).
- Az isoquantok nem metszhetik egymást.
- A jól viselkedő isoquantok negatív meredekségűek
- A visszahajló szakaszokat lemetsszük.

A gerincvonal



- Az isoquantok visszahajló szakaszait a negatív meredekségű szakaszoktól elválasztó határvonal a gerincvonal.
- A gerincvonalakon kívül valamelyik termelési tényező felhasználása túlzott.
- + A releváns tartományban konvex isoquantok („jól viselkedő isoquantok”).

Technikai helyettesítési határráta



- Diszkrét pontok: technikai helyettesítési ráta –

$$RTS = \frac{\Delta K}{\Delta L}$$

- Folytonos elmozdulás: technikai helyettesítési

határráta – $MRTS = \frac{dK}{dL}$

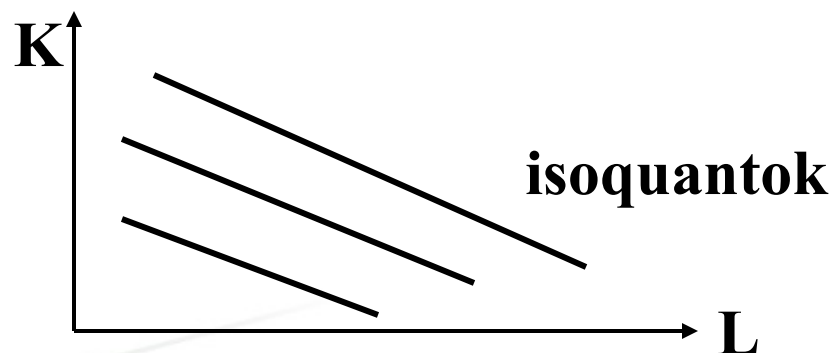
Mitől függ a helyettesítés?

- $MPK \cdot dK + MPL \cdot dL = 0$

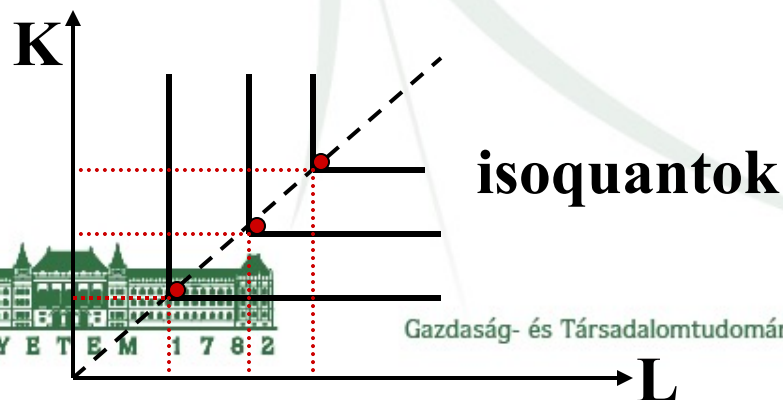
- $MRTS = \frac{dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K}$

Speciális isoquantok

- Tökéletes helyettesítés (MRTS=állandó)



- Tökéletes kiegészítés (Leontief termelési fg.)



Leontief termelési függvény

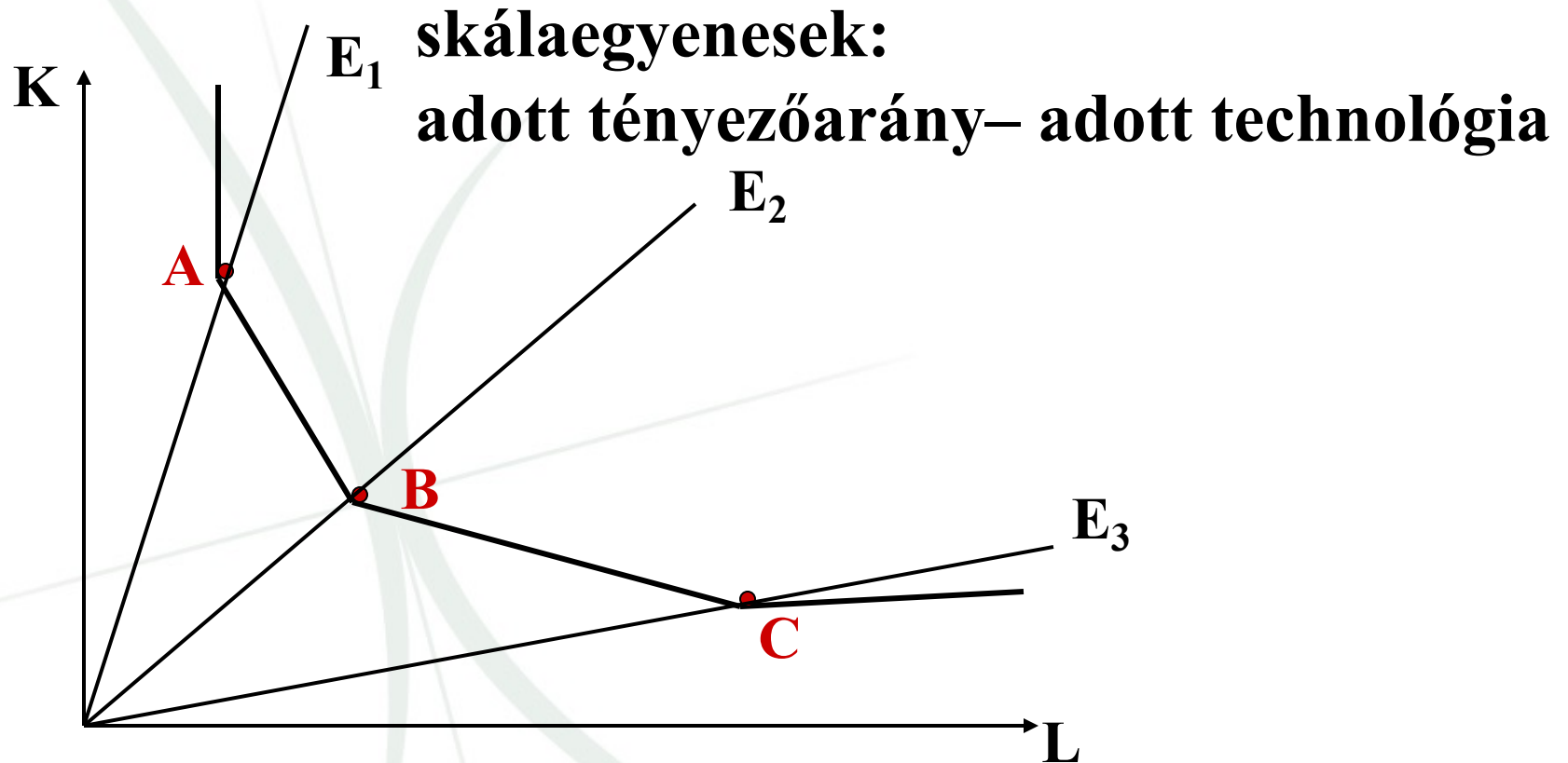
- $Q = \text{MIN}(aK, bL)$

- $Q = aK$

$$Q = bL$$

- $\frac{K}{L} = \frac{b}{a} = \text{konstans}$

A törtvonalú isoquant

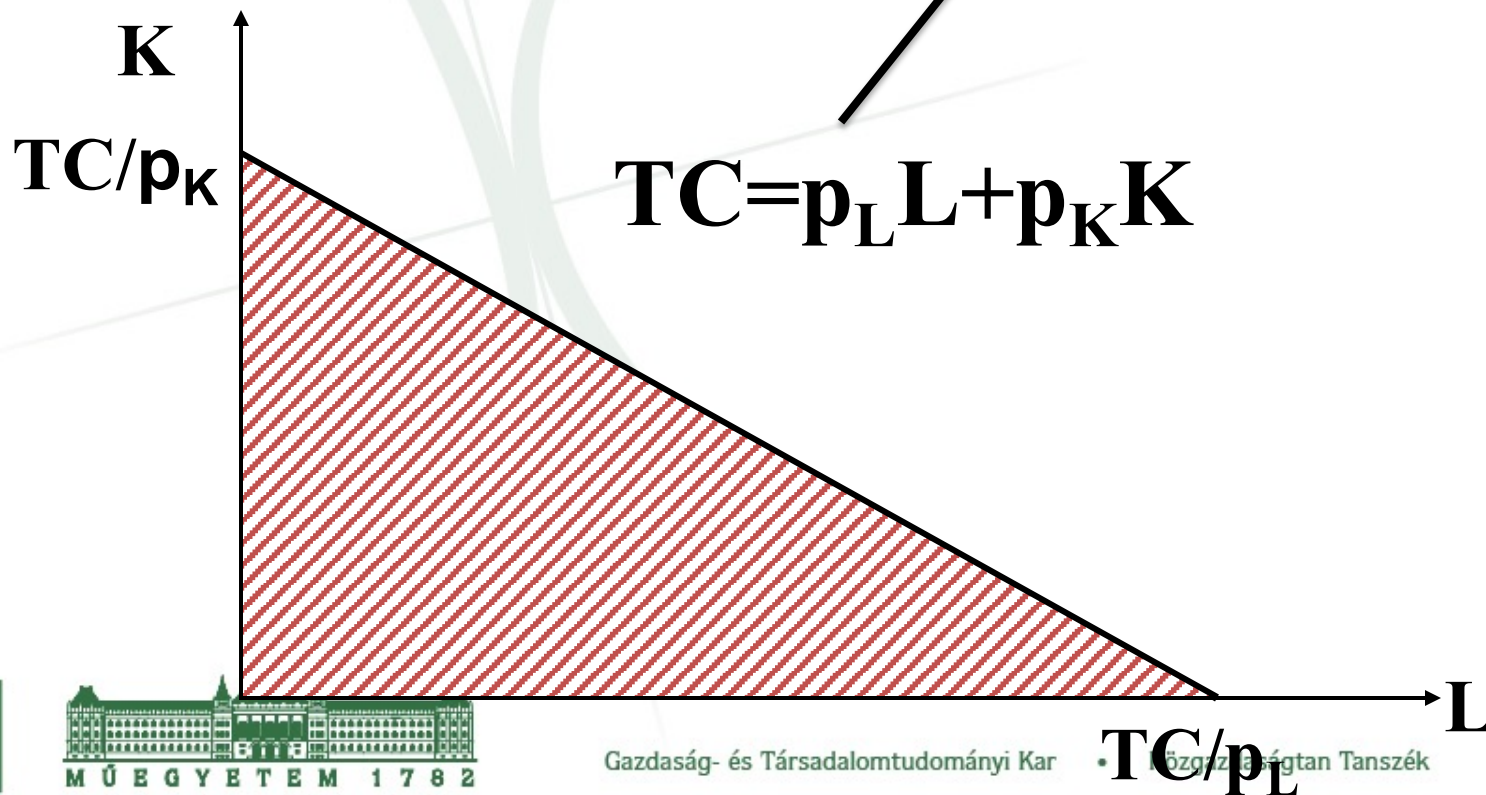


•Technológiák helyettesíthetősége (A-B és B-C)

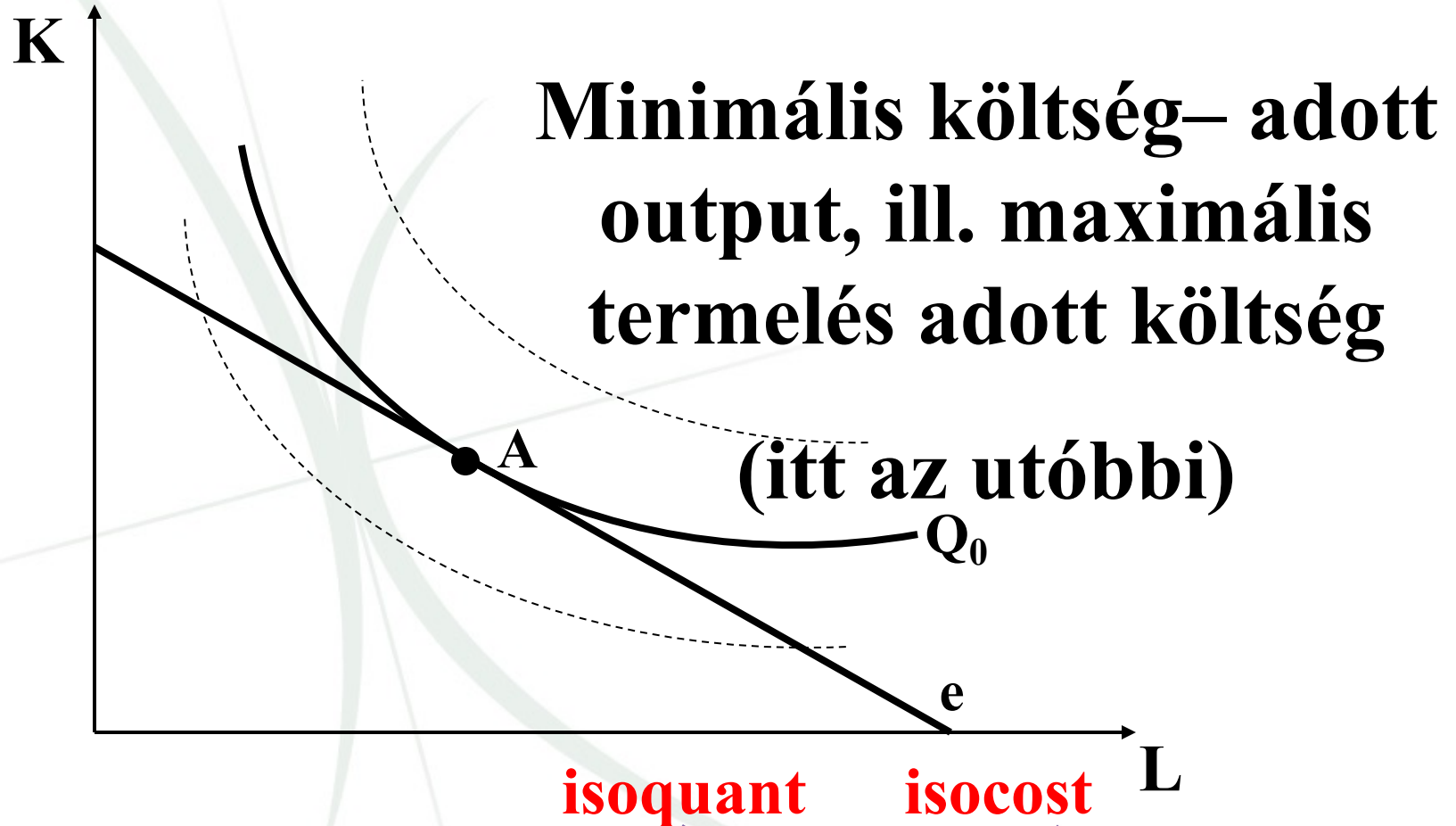
Költségkorlát, isocost egyenes

- Tényezőárak
- Összköltség

$$K = \frac{TC}{P_K} - L \frac{P_L}{P_K}$$

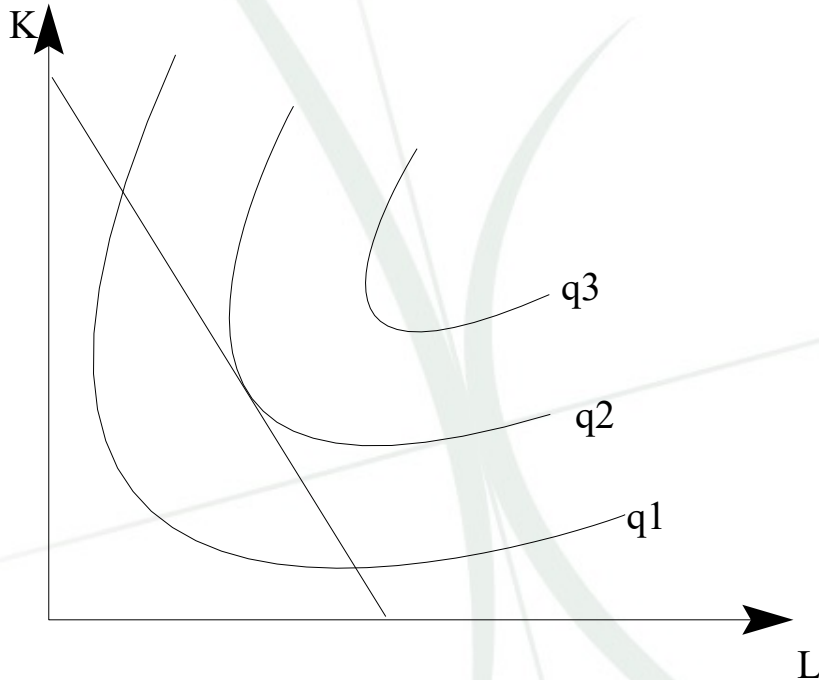


„Optimális” választás a termelésben



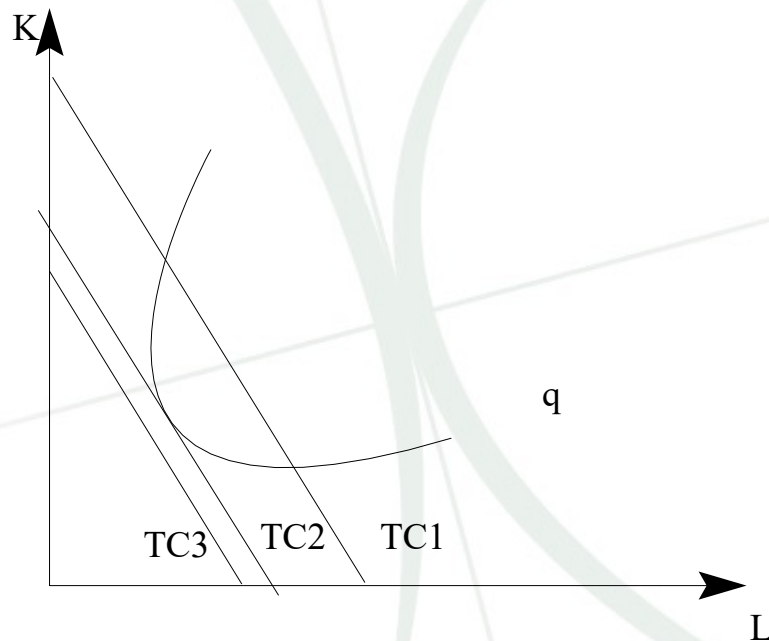
Optimalizáció kritériuma: $MP_L/MP_K = p_L/p_K$

Termelés maximalizálás : Adott költség mellett keressük a maximális termelési szintet



- Ez az isocost egyenes és a legmagasabb termelési szintet jelentő isoquant közös, érintési pontja
- **Optimum:**
- **$MP_L/MP_K = p_L/p_K$**

Költségminimalizálás: Adott termelési szinthez keressük a minimális költséget



- Ez az adott isoquant és az isoquanthoz húzott, legkisebb összköltségű eljárást jelentő isocost egyenes közös, érintési pontja
- **Optimum:**
- **$MP_L/MP_K = p_L/p_K$**

Termelésmaximalizálás

- Egy vállalat teljes költsége 4000. A munka egységének ára 100, a tőkéé pedig 400. A termelési függvény:

$$q = 2\sqrt{KL}$$

- Mennyi a technikai helyettesítési határráta profitmaximalizáló kibocsátás mellett?
- Mennyi tőkét használ fel a vállalat hosszú távon?
- Mekkora a vállalat kibocsátása hosszú távon?

- A helyettesítési határráta:

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{2\sqrt{K} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{L}}}{2\sqrt{L} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{K}}} = \frac{K}{L}$$

- **Optimum:**
- **$MP_L/MP_K = p_L/p_K$**

Az optimális inputfelhasználás és kibocsátás kiszámolható:

$$\frac{K}{L} = \frac{100}{400}$$

$$4000 = 100L + 400K$$

$$q = 2\sqrt{KL}$$

$$K = 1/4L$$

$$4000 = 100L + 400 \times 1/4L$$

- $K=5, L=20, q=20$

Költségminimalizálás

- Egy vállalat 2000 db terméket szeretne előállítani. A vállalat termelési függvénye:

$$q = K^{0,25} L^{0,75}$$

Mekkora az a minimális költség, amivel ez a termelés elérhető, ha egységnyi tőke ára 10000 pénzegység, a munka ára pedig egységenként 48 pénzegység?

- A technikai helyettesítési határráta:

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K^{0,25} 0,75 L^{-0,25}}{L^{0,75} 0,25 K^{-0,75}} = \frac{3K}{L}$$

$$\frac{3K}{L} = \frac{48}{10000}$$

$$TC = 48L + 10000K$$

$$2000 = K^{0,25} L^{0,75}$$

- $K = \frac{2000^4}{L^3}$ és $K = \frac{16L}{10000}$
- $L=10000, K=16, TC=640000$

Költségminimalizálás

- Egy vállalat 100 db terméket szeretne előállítani. A vállalat termelési függvénye:

$$q = \sqrt{KL}$$

Mekkora az a minimális költség, amivel ez a termelés elérhető, ha egységnyi tőke ára 40 pénzegység, a munka ára pedig egységenként 10 pénzegység?

Vagy így:

- $q=100=\sqrt{KL}$, $K=10000/L$
- $TC=40K+10L=400000/L+10L$
- $dTC/dL=-400000/L^2+10=0$
- $L=200$, $K=50$, $TC=4000$

- 3. példa: Egy vállalat két inputot, munkát és tőkét használ fel. A munka ára 400, a tőke ára 1000. A vállalatnál az utolsóként felhasznált inputegységek határtermékei:

$$MP_L = 200, MP_K = 600$$

- Véleménye szerint optimálisnak tekinthető-e a vállalat által alkalmazott tényezőkombináció? Válaszát indokolja meg!
- Amennyiben nem optimális, akkor hogyan lenne célszerű változtatni a tőke és munka mennyiségét?

Megoldás

- Az optimum feltétele, hogy a tényezőár-aránynak meg kell egyeznie a határtermékek hányadosával. Ez itt nem teljesül.

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{200}{600} \neq \frac{400}{1000} = \frac{P_L}{P_K}$$

Gossen II: a termelésben

- Akkor haladunk az optimum felé, ha a vállalat növeli a tőkefelhasználást és csökkenti a munkafelhasználást.
- *A pénz határterméke legyen azonos minden tényező esetén*

- $\frac{MP_L}{P_L} < \frac{MP_K}{P_K}$ $\frac{MP_L}{P_L} = \frac{MP_K}{P_K}$ illetve $\frac{P_L}{MP_L} = \frac{P_K}{MP_K} = (MC)$