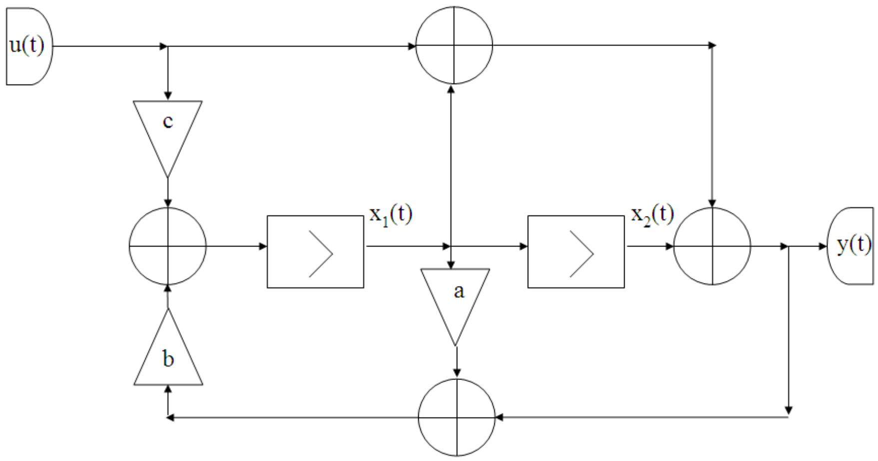
Jelek és rendszerek (VIHVA214)

1. zárthelyi **B** *csoport*
2011.10.17.

	Név (olvashatóan)	
	Aláírás	Neptun kód
	Pontszám	Javító
Nagypélda		
Kispélda		
Összesen		

Nagypélda (Megoldását külön lapra kérjük!)
A folytonos idejű rendszer az alábbi jelfolyam hálózattal adott.



1. Adja meg a rendszer állapotváltozós leírását normál alakban az ábrán feltüntetett állapotváltozók segítségével a= 0,2; b= –5; c= 6 paraméter értékek mellett! Vizsgálja meg a rendszer stabilitását! /10 pont/
2. Adja meg a rendszer impulzusválaszának formuláját! /10 pont/
3. Az a, b, c paraméterek valamely értékei mellett a rendszer impulzusválasza: $h(t)=\varepsilon(t)\left(-\frac{3}{2}e^{-5t}+\frac{1}{2}e^{-t}\right)+\frac{1}{3}\delta(t)$. Adja meg a válaszjel időfüggvényét, ha a gerjesztés $u(t)=\varepsilon(t-5)$ /10 pont/

Megoldás:
1.

$$x_1'(t)=-6x_1(t)-5x_2(t)+u(t)$$
$$x_2'(t)=x_1(t)$$
/5 pont

$$y(t)=x_1(t)+x_2(t)+u(t)$$
/3 pont

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}-6 & -5\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \underline{B}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}^T=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} \qquad D=1$$

Karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix}-6-\lambda & -5\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(-6-\lambda)(-\lambda)+5=\lambda^2+6\lambda+5=0$$ **/1 pont**

Sajátértékek: $\begin{matrix}\lambda_1=-5\\ \lambda_2=-1\end{matrix}$, mivel FI rendszer és Re{λ_i}<0, így a rendszer ASZ stabil, tehát G-V stabil is. **/1 pont**

Vagy Hurwitz-kritérium alapján:

6 > 0 és 5 > 0, ami a karakterisztikus polinom együtthatói. A (6,5) pont, az 1. síknegyedben van, így a rendszer ASZ stabil, tehát G-V stabil is. **/1 pont**

2.

$$h(t)=\varepsilon(t)\underline{C}^T e^{\underline{\underline{A}}t}\underline{B}+D\delta(t)=\varepsilon(t)\underline{C}^T\left(\underline{\underline{L}}_1 e^{\lambda_1 t}+\underline{\underline{L}}_2 e^{\lambda_2 t}\right)\underline{B}+D\delta(t)$$

$$e^{\underline{\underline{A}}t}=\sum_{i=1}^{N} e^{\lambda_i t}\underline{\underline{L}}_i$$

$$\underline{\underline{L}}_1=\frac{\underline{\underline{A}}-\lambda_2\underline{\underline{E}}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$ **/2 pont**

$$\underline{\underline{L}}_2=\frac{\underline{\underline{A}}-\lambda_1\underline{\underline{E}}}{\lambda_2-\lambda_1}=\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{L}}_1=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1 & -5\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$ **/2 pont**

$$\underline{C}^T e^{\underline{\underline{A}}t}\underline{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\left(e^{-5t}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}+e^{-t}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1 & -5\\ 1 & 5\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=e^{-5t}$$ **/4 pont**

$$h(t)=\varepsilon(t)e^{-5t}+\delta(t)$$ **/2 pont**

3.

$$h(t)=\varepsilon(t)\left(-\frac{3}{2}e^{-5t}+\frac{1}{2}e^{-t}\right)+\frac{1}{3}\delta(t)$$

$$u(t)=\varepsilon(t-5)$$

Kiszámoljuk az $u(t)=\varepsilon(t)$ gerjesztésre adott választ, majd LI elv alapján eltoljuk 5 ütemmel. **/2 pont**

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varepsilon(\tau)\left(-\frac{3}{2}e^{-5\tau}+\frac{1}{2}e^{-\tau}\right)+\frac{1}{3}\delta(\tau)\right)\varepsilon(t-\tau)d\tau=$$ **/2 pont**

$$=\frac{1}{3}\varepsilon(t)+\int_0^t-\frac{3}{2}e^{-5\tau}+\frac{1}{2}e^{-\tau}d\tau=\frac{1}{3}\varepsilon(t)+\varepsilon(t)\left\{\left[-\frac{3}{2}\frac{e^{-5\tau}}{-5}\right]_0^t+\left[\frac{1}{2}\frac{e^{-\tau}}{-1}\right]_0^t\right\}=$$ **/2 pont**

$$=\frac{1}{3}\varepsilon(t)+\varepsilon(t)\left\{\frac{3}{10}\left(e^{-5t}-1\right)-\frac{1}{2}\left(e^{-t}-1\right)\right\}=\varepsilon(t)\left\{\frac{8}{15}+\frac{3}{10}e^{-5t}-\frac{1}{2}e^{-t}\right\}$$ **/2 pont**

Ez alapján az $u(t)=\varepsilon(t-5)$ gerjesztésre adott válasz:

$$y(t)=\varepsilon(t-5)\left\{\frac{8}{15}+\frac{3}{10}e^{-5(t-5)}-\frac{1}{2}e^{-(t-5)}\right\}$$ **/2 pont**

Kispéldák (A megoldást a feladat szövege alá írja! Minden kispélda 2 pontot ér. Csak a végeredményt kérjük odaírni, a levezetésre, részeredményekre részpontszám nem jár!)

1. Mikor nevezünk egy rendszert invariánsnak?

Egy rendszer akkor invariáns, ha a gerjesztés időbeli eltolása csak egy ugyanekkora időbeli eltolást okoz a válaszban.

Vagy másként:

Jelölje az $u_a = u_a(t)$ illetve az $u_a = u_a[k]$ gerjesztéshez tartozó választ $y_a(t) = \mathscr{W}\{u_a(t)\}$ illetve $y_a[k] = \mathscr{W}\{u_a[k]\}$. Ha az $u_b(t) = u_a(t-\tau)$ illetve az $u_b[k] = u_a[k-i]$ időben eltolt gerjesztéshez $y_b(t) = y_a(t-\tau)$ illetve $y_b[k] = y_a[k-i]$ válasz tartozik τ illetve i bármely értékeire, akkor (és csakis akkor) a rendszer invariáns.

2. Adja meg egy lineáris, invariáns, kauzális DI rendszer válaszát $u[k]$ gerjesztésre, ha ismert $h[k]$ impulzusválasz függvénye!

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} h[k-i]u[i], \text{ vagy } y[k] = \sum_{i=0}^{\infty} h[i]u[k-i]$$

3. Adja meg egy $x[k] = X\cos(5k+\rho)$ jel egy ütemmel késleltetettjének komplex amplitúdóját!

$$\overline{X} = Xe^{j(\rho+5)}$$

4. A gerjesztés és az átviteli karakterisztika ismeretében adja meg a rendszer válaszát!

$$u[k] = \frac{2}{3}\sin[\pi k] \qquad H\left(e^{j\theta}\right) = \frac{2}{1+0{,}5e^{-j\theta}}$$

$$H(\theta=\pi) = \frac{2}{1+0{,}5e^{-j\pi}} = \frac{2}{1-0{,}5} = 4$$

$$y[k] = \frac{8}{3}\sin[\pi k]$$

5. Egy DI rendszer impulzusválasza: $h[k] = \varepsilon[k]0{,}6^k$. Határozza meg a rendszer $u[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3])0{,}6^k$ gerjesztésre adott válaszát!

Írjuk át a gerjesztést:

$$u[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3])0{,}6^k = \varepsilon[k]0{,}6^k - 0{,}6^3\varepsilon[k-3]0{,}6^{k-3} = \varepsilon[k]0{,}6^k - 0{,}216\varepsilon[k-3]0{,}6^{k-3}$$

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[i] = \sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon[k-i]0{,}6^{k-i}\varepsilon[i]0{,}6^i = 0{,}6^k\sum_{i=0}^{k} 1 = \varepsilon[k](k+1)0{,}6^k$$

A válasz tehát:

$$y[k] = \varepsilon[k](k+1)0{,}6^k - 0{,}216\varepsilon[k-3](k+1-3)0{,}6^{k-3} = \varepsilon[k](k+1)0{,}6^k - 0{,}216\varepsilon[k-3](k-2)0{,}6^{k-3}$$