Elektromágneses terek alapjai

1. gyakorlat

Matematikai alapok

Kenderes Anett

Utolsó módosítás: 2019. december 15.

1. Előszó

Az első gyakorlaton főképp a vektoranalízis néhány, a tárgyban használt lényeges összefüggése kerül átismétlésre. Ennek megfelelően e segédanyag vázát a Dr. Gyimóthy Szabolcs által összeállított gyakorlatanyag képezi. Ezen felül a jegyzet célja, hogy a lehető legátfogóbban ismertesse a tárgyhoz szükséges matematikai ismereteket, segítve ezzel a mélyebb megértést. Természetesen ez nem helyettesíti az előkövetelményben szereplő tárgyak megfelelő színtű elsajátítását. A teljesség igénye nélkül a tárgy az alábbi témakörök ismeretére épít;

- komplex algebra ($A1$),
- differenciálszámítás ($A1, A2$),
- integrálszámítás ($A1, A2$),
- vektoranalízis ($A3$).

Az összeállításhoz az oktatásban szerzett tapasztalataimat használtam fel, továbbá néhány volt hallgatóm, főképp Trócsányi Péter és Kovács Zoltán Márk ötleteiből merítettem. Ezen felül igyekeztem valamennyi extra szemléletet is átadni, amelyről úgy gondolom, hogy számomra hasznosnak bizonyult a későbbi tanulmányaim során. Mindemellett köszönettel tartozom Bingler Arnoldnak az értékes meglátásaiért, továbbá Rátky Marcellnek, aki immár a többedik irományom korrektúrázását vállalta el. Végül, de nem utolsósorban köszönöm a lektoroknak, Dr. Gyimóthy Szabolcsnak és Dr. Bilicz Sándornak a lényegretörő észrevételeket. Ennek ellenére természetesen előfordulhatnak észrevétlenül maradt hibák. Ezeket jelezni a `kenderes.anett@gmail.com` email címen lehetséges.

2. Néhány alapvető matematikai összefüggés

Mielőtt rátérnénk a vektoranalízisre, érdemes az alábbi fogalmak, összefüggések felelevenítése [1].[1]

2.1. Skaláris és vektoriális szorzat

2.1.1. Skaláris szorzat

Legyen adott két vektor, $\vec{a}$ és $\vec{b}$. Ezek *skaláris szorzata*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha, \tag{1}$$

ahol α a két vektor közbezárt szöge.
Egy vektor *négyzetén* az önmagával vett skaláris szorzatát értjük, mely számértéket tekintve megadja a hosszának második hatványát. Jelölése: $\vec{a}^2$.

[1] Kék színnel jelöltem azon részeket, melyek nem képezik szervesen a gyakorlat anyagát, de ismeretük feltétlenül szükséges.

Tulajdonságok:

Az alábbiakban szorítkozzunk háromdimenziós euklideszi térben értelmezett vektorokra.

1. Adott az alábbi koordinátákkal jellemezhető két vektor: $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$,

   ekkor a skaláris szorzatuk:
   $$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2}$$
   Ennek következményeként egy vektor abszolútértékét az alábbi módon számítjuk:
   $$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{3}$$

2. Két nemnullvektor skaláris szorzata akkor és csak akkor zérus, ha azok merőlegesek egymásra, azaz közbezárt szögük 90 fok.

3. Ha $\vec{e}$ *egységvektor*, akkor az $\vec{e} \cdot \vec{a}$ skaláris szorzat megadja az $\vec{a}$ vektor $\vec{e}$ irányába eső merőleges vetületének előjeles hosszát. Az előjele attól függ, hogy a vetület $\vec{e}$ irányával megegyező vagy ellentétes.

2.1.2. Vektoriális szorzat

A háromdimenziós euklideszi térben $\vec{a}$ és $\vec{b}$ *vektoriális szorzatának* jelölése $\vec{a} \times \vec{b}$. Erre igazak a következők:

1. abszolútértéke: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$,
2. állása: $\vec{a}$-ra és $\vec{b}$-re merőleges,
3. iránya olyan, hogy $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{a} \times \vec{b}$ ebben a sorrendben *jobbrendszert* alkotnak.

Ebből következik, hogy két nemnullvektor vektoriális szorzata akkor és csak akkor eredményez nullvektort, ha egyező állásúak, azaz közbezárt szögük 0 fok.

Tulajdonságok:

1. Amennyiben $\vec{a}$ és $\vec{b}$ az alábbi koordinátákkal adott: $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$,

   akkor a vektoriális szorzatuk abszolútértéke:
   $$|\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{4}$$
   A determinánst *sakktábla-szabállyal* fejthetjük ki:
   $$|\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{e}_z. \tag{5}$$

2. Tetszőleges $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokra, továbbá k skalárra:
   $$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}), \tag{6}$$
   $$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}), \tag{7}$$
   $$(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b} \times \vec{a}) + (\vec{c} \times \vec{a}), \tag{8}$$
   $$k(\vec{a} \times \vec{b}) = k\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times k\vec{b}. \tag{9}$$

2.2. Mátrixok invertálása

Egy n dimenziós $\mathbf{A}$ kvadratikus mátrix *invertálható*, ha létezik olyan $\mathbf{A^{-1}}$ ún. *inverz* mátrix, melyre
$$\mathbf{A}\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{A^{-1}}\mathbf{A} = \mathbf{E}, \tag{10}$$
ahol $\mathbf{E}$ az n dimenziós egységmátrix.

2.2.1. Az inverz mátrix analitikus számítása

Egy $\mathbf{A}$ mátrix inverzét megadhatjuk annak *adjungáltja* és *determiánsa* hányadosaként:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{\det\mathbf{A}}. \tag{11}$$

Ennek következménye, hogy $\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor *invertálható*, ha $\det A \neq 0$.
Nézzünk egy speciális esetet, legyen adott egy $\mathbf{A}$ mátrix a következő elemekkel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Ennek inverze:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{13}$$

2×2-nél nagyobb méretű kvadratikus mátrix invertálására nem lesz szükség.

Alkalmazás: Lásd példatár 2.19-es feladata (3. gyakorlat).[2]

2.3. Differenciálás

2.4. Differenciálási szabályok

A deriváltoperátor lineáris, azaz zárt összeadásra és skalárral való szorzásra nézve, mindemellett néhány szabály, melyet a félév során alkalmazni fogunk:

2.4.1. Szorzat deriváltja

Ha f és g differenciálható függvény, akkor a szorzatuk is az:

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'. \tag{14}$$

2.4.2. Hányados deriváltja

Ha f és g differenciálható függvény, akkor a hányados is az, minden olyan helyen, ahol g nem 0:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \tag{15}$$

2.4.3. Láncszabály

Amennyiben f parciális deriváltjai folytonosak, $x_i(t)$ függvények differenciálhatóak t szerint:

$$\frac{\partial f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(t)}{\partial t}. \tag{16}$$

Alkalmazás [2]: A fenti differenciális szabályok igen gyakran elő fognak kerülni a félév során. Néhány példa:

- (14): Lásd példatár 5.2-es feladata.
- (15): A példatár 5.2-es feladata megoldható a hányadosra vonatkozó differenciálási szabállyal is.
- (16): Lásd példatár 3.6-os feladata.

2.5. Integrálás

Az integrálás lineáris operátor, azaz zárt összeadásra és skalárral való szorzásra nézve, ezen felül pár gyakran alkalmazott szabály, illetve alapintegrál kerül ebben az alfejezetben felsorolásra.

[2]Zöld színnel jelöltem azon részeket, amelyek „spoilernek" számítanak. Ezek vizsgára készülésnél segíthetnek egyben látni az anyagot.

2.5.1. Integrálási szabályok

Néhány integrálási szabály, melyre a félév során érdemes lesz emlékezni:

$$\int f^v(x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{f^{v+1}}{v+1} + C, \tag{17}$$

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \tag{18}$$

2.5.2. Parciális integrálás

A szorzatfüggvény differenciálási szabályából következően:

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x. \tag{19}$$

2.5.3. Alapintegrálok

A tárgyban előkerülő alapintegrálok:

$$\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \tag{20}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C, \tag{21}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C, \tag{22}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C. \tag{23}$$

Alkalmazás [2]:

- (17): Lásd példatár 2.7 és 3.2-es feladata.
- (19): Lásd példatár 2.8-as feladata.
- (20): Lásd példatár 2.14-es feladata.
- (21): Több helyen is elő fog kerülni a félév során. Lásd például példatár 2.2-es példa.
- (22): Lásd példatár 4.7-es feladata.
- (23): Lásd példatár 2.9-es feladata.

2.6. Trigonometrikus és hiperbolikus függvények

Amennyiben $\sin\varphi$ és $\cos\varphi$ függvényeket hatványsorba fejtjük és összevetjük $e^{j\varphi}$ hatványsorával, az alábbi összefüggéseket kapjuk [3]:

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}, \tag{24}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}. \tag{25}$$

A hiperbolikus függvények definíciója:

$$\sinh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}, \tag{26}$$

$$\cosh\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}. \tag{27}$$

A (24) és (26), továbbá a (25) és (27) összefüggésekből következően:

$$\sinh(j\varphi) = j\sin\varphi, \tag{28}$$
$$\cosh(j\varphi) = \cos\varphi. \tag{29}$$
$$\tag{30}$$

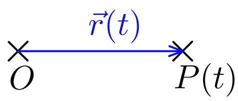
Továbbá a (26) és (27) egyenletekből:

$$\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1. \tag{31}$$

Alkalmazás: Lásd távvezeték mint kétkapu (előadás).

3. Koordináta-rendszerek

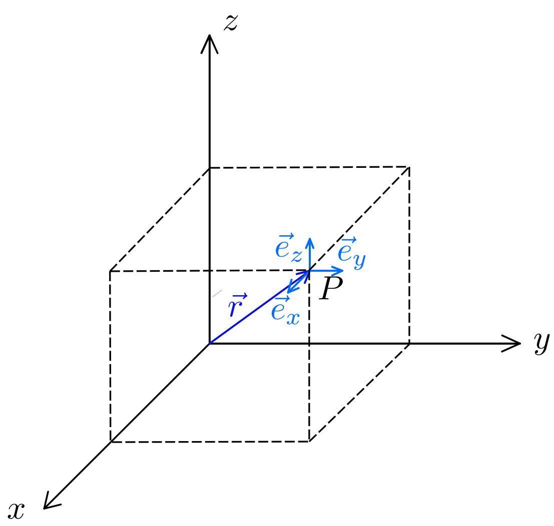
A félév során alapvető elektromágneses problémákat fogunk tárgyalni. Ezek fizikai természetűek, így első lépésként legfontosabb az események térbeli és időbeli elhelyezése. Az előbbit koordináta-rendszerrel valósítjuk meg. Megkülönböztetünk ún. *elemi eseményt*, melyet az alábbi párossal definiálunk: $(\vec{r}, t)$, ahol $\vec{r}$ a helyvektort, t az időt jelöli.



1. ábra. Az elemi esemény

A háromdimenziós euklideszi térben egy pont egyértelmű definiálásához három koordinátára van szükség. Egy koordináta-rendszer megadásához ki kell jelölni egy kezdőpontot (*origó*) és a koordináta-tengelyeket. Erre végtelen lehetőségünk van [2]. Az alábbiakban a leggyakrabban használt három kerül ismertetésre. Ezek közös jellemzője, hogy egységvektoraik *ortonormált bázis*t alkotnak, azaz egységnyi hosszúak és egymásra merőlegesek, továbbá kifeszítik a háromdimenziós euklideszi teret, azaz a tér bármely pontjába mutató helyvektor előáll a bázisvektorok *lineáris kombinációjá*ként.

3.1. Descartes koordináta-rendszer

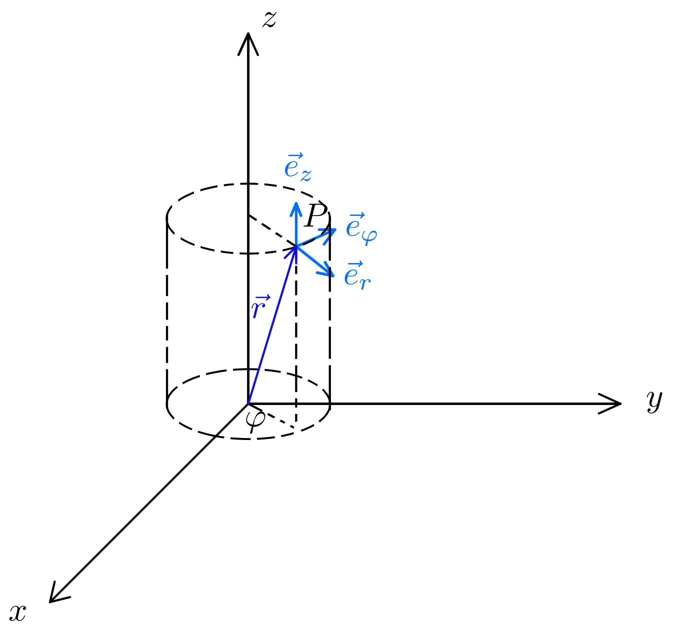


2. ábra. A Descartes koordináta-rendszer

A legközismertebb, ún. *egyenesvonalú* koordináta-rendszer, azaz a koordináták hosszúságok mérőszámai. A bázisvektorok $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, melyek ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak. Az egyes pontok az (x, y, z) számhármassal jellemezhetők. Ezekre igaz, hogy

$$x, y, z \in (-\infty, \infty). \tag{32}$$

3.2. Hengerkoordináta-rendszer



3. ábra. A hengerkoordináta-rendszer

A polárkoordináta-rendszer egy lehetséges térbeli kiterjesztése. Az ún. *görbevonalú* koordináta-rendszerek közé tartozik. A bázisvektorok $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$, ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak. Az egyes pontok az (r, φ, z) számhármassal jellemezhetők, ezek lehetséges értéktartományai:

$$0 \leq r, \tag{33}$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \tag{34}$$

$$z \in (-\infty, \infty). \tag{35}$$

A koordináták közti transzformáció:

$$x(r, \varphi, z) = r\cos\varphi, \tag{36}$$
$$y(r, \varphi, z) = r\sin\varphi, \tag{37}$$
$$z(r, \varphi, z) = z, \tag{38}$$

valamint

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{39}$$
$$\varphi(x, y, z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \tag{40}$$
$$z(x, y, z) = z. \tag{41}$$

3.3. Gömbi koordináta-rendszer

Másnéven térbeli polárkoordináta-rendszer, mely szintén *görbevonalú*. Az egységvektorok jobbrendszert alkotnak, ebben a sorrendben: $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$. A pontokat jellemző számhármas: (r, ϑ, φ). A lehetséges értéktartományok:

- *radiális irány:*
$$0 \leq r, \tag{42}$$
- *elevációs szög:*
$$0 \leq \vartheta \leq \pi, \tag{43}$$
- *azimutális szög:*
$$0 \leq \varphi < 2\pi. \tag{44}$$

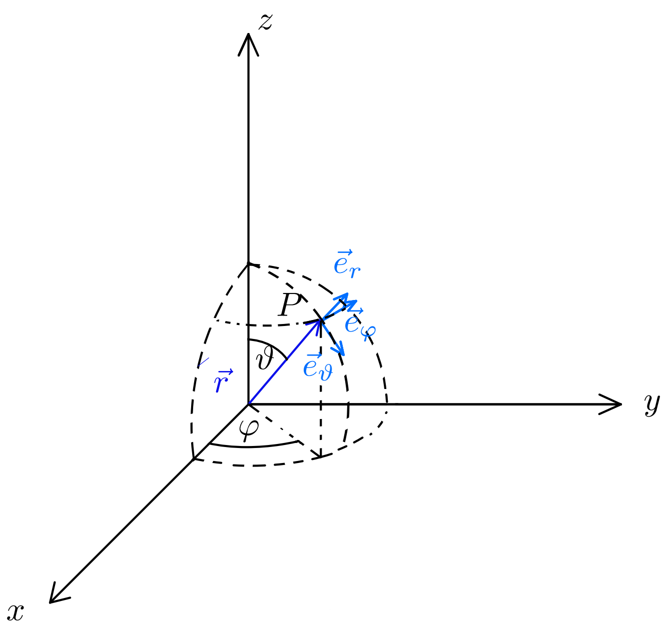
A koordináták közti transzformáció:

$$x(r, \vartheta, \varphi) = r \cos\varphi \sin\vartheta, \tag{45}$$
$$y(r, \vartheta, \varphi) = r \sin\varphi \sin\vartheta, \tag{46}$$
$$z(r, \vartheta, \varphi) = r \cos\vartheta. \tag{47}$$

valamint

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{48}$$
$$\vartheta(x, y, z) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \tag{49}$$
$$\varphi(x, y, z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \tag{50}$$

Egy térszámítási feladat bármely koordináta-rendszerben megoldható. A döntés a forráseloszlás vagy geometria alapján történik. Amennyiben például a közeg izotrop anyagjellemzőkkel rendelkezik, a modelltartomány szimmetriáit a térjellemzők is öröklik. Megfelelő koordináta-rendszer választása egyszerűbb számításokhoz vezet.



4. ábra. Gömbi koordináta-rendszer

4. Mezők

4.1. Skalármezők

Skalármező alatt az alábbi leképezést értjük:

$$\vec{r} \to u(\vec{r}). \tag{51}$$

Tehát az euklideszi térben, az értelmezési tartomány minden pontjához egy skalár értéket rendelünk, az egyes pontokat helyvektorokkal jelöljük ki. A helyvektort reprezentálhatjuk célszerűen a fent ismertetett három koordináta-rendszer valamelyikében.

4.2. Vektormezők

Vektormezőnek nevezzük azt a leképezést, mely az értelmezési tartományának minden, helyvektor által kijelölt pontjához vektort rendel:

$$\vec{r} \to \vec{a}(\vec{r}). \tag{52}$$

Descartes koordináta-rendszerben:

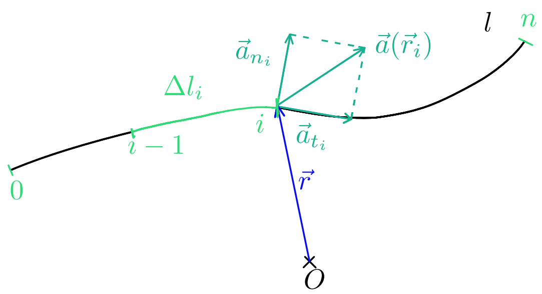
$$\vec{a}(\vec{r}) = a_x(x,y,z)\vec{e}_x + a_y(x,y,z)\vec{e}_y + a_z(x,y,z)\vec{e}_z \tag{53}$$

$a_x(x,y,z)$, $a_y(x,y,z)$, $a_z(x,y,z)$ elnevezése *rendező*, az $a_x(x,y,z)\vec{e}_x$, $a_y(x,y,z)\vec{e}_y$, $a_z(x,y,z)\vec{e}_z$ tagokat pedig *komponenseknek* hívjuk.

5. Skalár és vektormezők integrálja

5.1. Vektormezők integrálja

5.1.1. Vonalmenti integrál



5. ábra. A vonalmenti integrál értelmezése

Legyen l egy tetszőleges nyílt görbe (azaz kezdő- és végpontja nem azonos). Osszuk fel ezt n részre. Legyen $\vec{a}(\vec{r})$ az l görbét is tartalmazó tartományon értelmezett vektormező. Az i-edik pontban a vektormező értéke $\vec{a}(\vec{r}_i)$. Bontsuk fel az l görbére nézve *tangenciális* (érintőleges) és *normális* (érintőre merőleges) irányú komponensekre. Az i-edik vonalelemvektor:

$$\Delta\vec{l}_i = \Delta l_i \frac{\vec{a}_{t_i}}{a_{t_i}}, \tag{54}$$

ahol $a_{t_i} = |\vec{a}_{t_i}|$.
Vegyük az i-edik vonalelemvektor és az $\vec{a}(\vec{r}_i)$ skaláris szorzatát, és összegezzük ezt az l görbe összes részére:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{a}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{l}_i. \tag{55}$$

Könnyen látható, hogy a felbontás szerinti tangenciális komponensek maradnak csupán a skaláris szorzat elvégzésekor. Ezt az összeget minden határon túl finomítva, azaz $\Delta l \to 0$ nagyságú infinitezimálisan kicsiny vonalelemeket véve az $\vec{a}(\vec{r})$ vektormező l görbe menti integráljához jutunk:

$$\lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} a_{t_i} \Delta l_i = \int_l \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{l}. \tag{56}$$

A vonalmenti integrál szemléletesen azt méri, hogy a vektormező és a görbe irányítottsága mennyire egyezik meg. Azaz az egyes pontokra nézve a vektormező iránya mennyire esik egybe a görbe érintőjének irányával.

Ha l zárt, akkor az integrált körintegrállal jelöljük: $\oint_l$. Egy tetszőleges vektormező zárt görbére vett integrálja megadja annak *örvényerősségét*, másnéven *cirkulációját*.
Az (56) megadható az alábbbi alakban is:

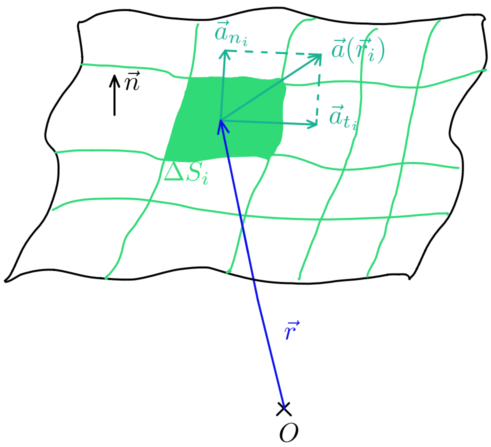
$$\int_l \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(\vec{r}(t)) \cdot \partial_t \vec{r}(t) \mathrm{d}t, \tag{57}$$

ahol az l görbét az $\vec{r}(t)$ t paramétertől függő helyvektorral írjuk le, t_1 és t_2 pedig a két végpont. A fenti összefüggés így jól láthatóan egydimenziós helyettesítéses integrálra vezet. Mivel $\vec{r}(t)$ leírható $r_0 + t\vec{e}$ alakban, így $\partial_t \vec{r}(t)$ a görbe érintőjét adja meg.

Alkalmazás Az *elektromotoros erőt* megkaphatjuk a térerősség tetszőleges görbére vett vonalmenti integráljaként:

$$\varepsilon_L = \int_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}. \tag{58}$$

5.1.2. Felületi integrál



6. ábra. A felületi integrál értelmezése

Legyen S egy tetszőleges nyílt, $\vec{n}$ normálvektorral adott felület. Osszuk fel ezt n részre. Legyen $\vec{a}(\vec{r})$ az S felületet is tartalmazó tartományon értelmezett vektormező. Az i-edik felületelemen a vektormező értéke $\vec{a}(\vec{r}_i)$. Bontsuk fel az S felületre nézve *tangenciális* (normálvektorra merőleges) és *normális* (normálvektorral párhuzamos) irányú komponensekre. Az i-edik felületelem-vektor:

$$\Delta\vec{S}_i = \Delta S_i \vec{n}_i, \tag{59}$$

ahol $\vec{n}_i$ az ehhez az elemhez tartozó felületi normális.
Vegyük az i-edik felületelem-vektor és az $\vec{a}(\vec{r}_i)$ skaláris szorzatát, és összegezzük ezt az S felület minden felületelemére:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{a}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{S}_i. \tag{60}$$

Könnyen látható, hogy a felbontás szerinti normális komponensek maradnak csupán a skaláris szorzat elvégzésekor. Ezt az összeget minden határon túl finomítva, azaz $\Delta S \to 0$ nagyságú infinitezimálisan kicsiny felületelemeket véve az $\vec{a}(\vec{r})$ vektormező S felületi integráljához jutunk:

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} a_{n_i} \Delta S_i = \int_S \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{61}$$

A felületi integrál szemléletesen azt méri, hogy az egyes pontokban a vektormező mennyire egyezik meg irány tekintetében a felület normálvektorának irányítottságával. Azaz a felületet merőlegesen metsző erővonalakra ad egy számértéket.

Ha az S felület zárt, akkor a felületi integrált körintegrállal jelöljük, mely megadja a tér *forráserősségét*, és így jelöljük: $\oint_S$. Fontos megjegyezni, hogy ekkor a felület $\vec{n}$ normálvektora az alapkonvenció szerint kifelé mutat. Sok esetben lényeges lehet befelé irányítani, ekkor az integrált negatív előjellel látjuk el. (Például ha befele irányuló teljesítményáramlást vizsgálunk, lásd 7. gyakorlat, példatár 7.2-es feladata).
Az S felületet megadhatjuk a p és q paraméterekkel jellemezhető $\vec{r}(p,q)$ helyvektorral is. Ekkor a (61) alakja:

$$\int_S \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int \int_S \vec{a}(\vec{r}(p,q)) \cdot (\partial_p \vec{r}(p,q) \times \partial_q \vec{r}(p,q)) \; \mathrm{d}p \; \mathrm{d}q, \tag{62}$$

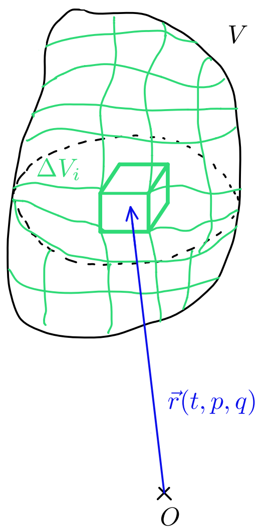
ahol $\vec{n} = \partial_p \vec{r}(p,q) \times \partial_q \vec{r}(p,q)$ a felületi normális.

Alkalmazás: A *mágneses fluxus* megkapható a mágneses indukció S felületi integráljából:

$$\psi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{63}$$

5.2. Skalármezők integrálja

5.2.1. Térfogati integrál



7. ábra. A térfogati integrál szemléltetése

Adott egy tetszőleges V térfogat és egy f skalármező. Vegyük e térfogat ΔV_i nagyságú kellően kicsiny részét, melyet az $\vec{r}$ helyvektorral jelöljük ki. Ebben a pontban a skalármező értéke f_i. A kettő szorzatát összegezzük a teljes V térfogatra. Finomítsuk ezt az összeget minden határon túl, azaz vegyünk $\Delta V \to 0$ nagyságú infinitezimálisan kicsiny térfogatelemeket. Ekkor az f skalármező térfogati integráljához jutunk:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_i \Delta V_i = \int_V f \mathrm{d}V. \tag{64}$$

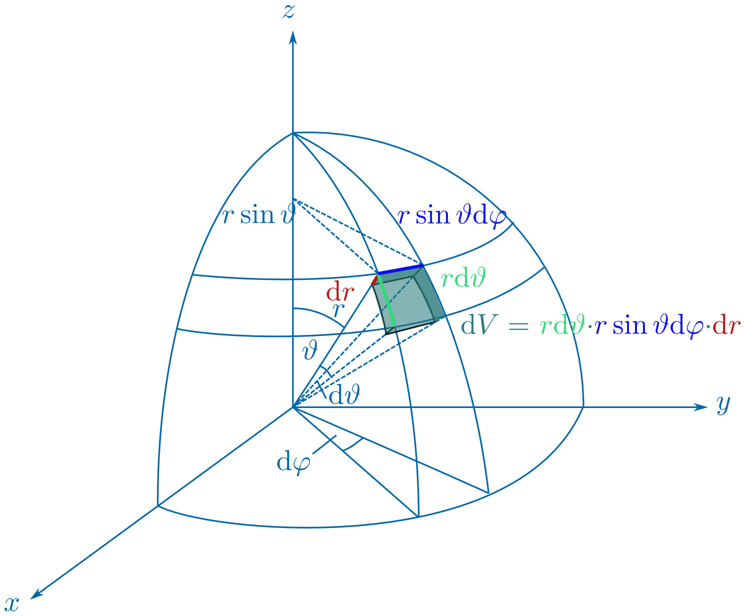
A V térfogatot megadhatjuk a t, p, q paraméterekkel jellemezhető $\vec{r}(t,p,q)$ helyvektorral is. Ezáltal a (64) a következő alakban áll elő:

$$\int_V f \mathrm{d}V = \int \int \int_V f(t,p,q) \cdot (\partial_t \vec{r} \cdot (\partial_p \vec{r} \times \partial_q \vec{r})) \; \mathrm{d}t \; \mathrm{d}p \; \mathrm{d}q. \tag{65}$$

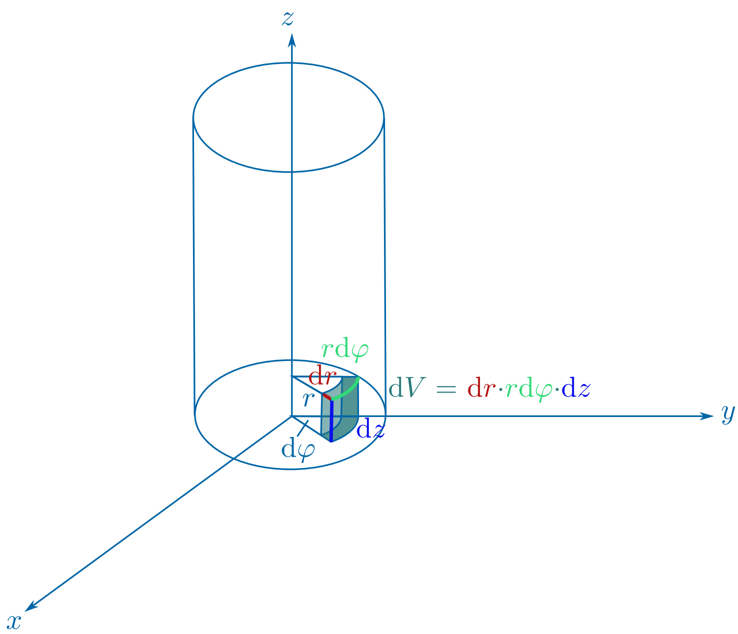
A szorzat második tényezője $\vec{r}$ Jacobi-determinánsa, mely:

- hengerkoordináta-rendszerben: r,
- gömbi koordináta-rendszerben: $r^2 \sin \vartheta$.

A Jacobi determináns segítségével lényegében azt számítjuk ki, hogy mennyivel kell megszorozni dt dp dq-t, hogy megkapjuk az adott koordináta-rendszerben értelmezett elemi térfogategységet. E szorzótényezőket meghatározhatjuk némi vizualizációval is, mely gömbi, illetve hengerkoordináta-rendszerben a 8. és 9. ábrán tekinthetőek meg. Legtöbbször inkább így járunk el a félév során előkerülő feladatok megoldásakor, azaz meghatározzunk azt a felületet, illetve térfogatot, amin integrálunk. Amennyiben van rá lehetőségünk, ezt geometriai szimmetriák kihasználásával tesszük. Felületi integrálás esetén akkor tudunk a (65)-hoz hasonló összefüggést felírni, ha a probléma oly mértékben egyszerűsödik, hogy egy komponensünk marad, azaz lényegében skalármezőt integrálunk két változó szerint.



8. ábra. Az elemi térfogategység gömbi koordináta-rendszerben



9. ábra. Az elemi térfogategység hengerkoordináta-rendszerben

Alkalmazás:

- A *térfogati töltéseloszlás* össztöltését a *térfogati töltéssűrűség* térfogati integráljaként határozhatjuk meg:

$$Q = \int_V \varrho(\vec{r})\mathrm{d}V. \tag{66}$$

- Nézzünk néhány példát elemi térfogategységek meghatározására. Hengerkoordináta-rendszerben tekintsük a példatár 4.11-es feladatát [2], ahol a mágneses térben tárolt energia segítségével számítunk induktivitást (lásd 4. gyakorlat).

  Háromdimenziós helyettesítéses integrálással:

  $$W_m = \int_V \frac{1}{2}\mu_0 H_\varphi^2 \mathrm{d}V = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \frac{1}{2}\mu_0 H_\varphi^2(r) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z, \tag{67}$$

  ahol r a Jacobi determináns.

  Mivel az adott példában a mágneses tér csak azimutális komponenssel rendelkezik és tisztán r-től függ, így az integrálást tulajdonképpen egy infinitezimális dr vastagságú körgyűrű alapú hasábon végezzük:

  $$W_m = \int_0^{R_1} \frac{1}{2} H_\phi^2(r) 2\pi r l \mathrm{d}r, \tag{68}$$

  ahol az elemi térfogat:

  $$\mathrm{d}V = 2\pi r \mathrm{d}r l. \tag{69}$$

  Gömbi koordináta-rendszerbeli esethez tekintsük a 2.8-as feladatot. A térfogati töltés számítása háromdimenziós helyettesítéses integrálással:

  $$Q = \int_V \rho \mathrm{d}V = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \rho(\xi)\xi^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta, \tag{70}$$

  ahol $\xi^2 \sin\vartheta$ a Jacobi determináns.

  Az integrálási sorrend felcserélésével jól látható, hogy az elemi térfogat egy infinitezimális dξ vastagságú, $4\pi\xi^2$ felszínű gömb.

Bizonyítás: A Jacobi-determináns a következő alakú [4]:[3]

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,p,q)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} \\ \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix}. \tag{71}$$

Hengerkoordináta-rendszerben:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r, \tag{72}$$

gömbi koordináta-rendszerben:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix} = r^2\sin\vartheta. \tag{73}$$

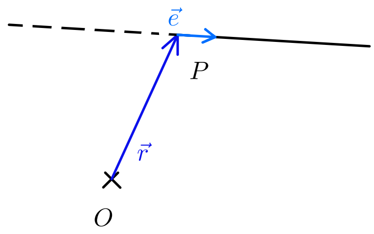
6. Differenciáloperátorok

6.1. Elsőrendű differenciáloperátorok

6.1.1. Skalármező gradiense

Adott egy P pont, melyet kijelölünk egy $\vec{r}$ helyvektorral, továbbá egy ebből a pontból tetszőleges irányba mutató $\vec{e}$ egységvektor. A tér valamely tartományán, amely tartalmazza a P pontot, értelmezünk egy

[3] Szürke színnel jelöltem azon részeket, melyek nem számítanak tananyagnak, közlésük oka a szemléletformálás.



10. ábra. A gradiens szemléltetése

skalármezőt, ennek értéke az $\vec{r}$ helyvektor által kijelölt helyen $u(\vec{r})$. Ekkor a skalármező P pontbeli gradiense és az $\vec{e}$ vektor skaláris szorzata megadja az $u(\vec{r})$ skalármező $\vec{e}$ *iránymenti deriváltját.*

$$\operatorname{grad} u(\vec{r}) \cdot \vec{e} = \frac{\partial u}{\partial e} \triangleq \lim_{h \to 0} \frac{u(\vec{r} + h\vec{e}) - u(\vec{r})}{h}. \tag{74}$$

Egy skalármező adott pontbeli gradiense mindig a legnagyobb változási gyorsaság fele mutat.

A gradiens Descartes koordináta-rendszerbeli reprezentációja:

$$\operatorname{grad} u \underset{(x,y,z)}{=} \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z. \tag{75}$$

Bevezethetjük az ún. *nabla-operátort*, melynek alakja Descartes koordináta-rendszerben:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{76}$$

Ebben a fejezetben ismertetett összes differenciáloperátor előállítható a *nabla-formalizmussal*, többek között a gradiens is:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u. \tag{77}$$

A félév során még szükségünk lesz a gömbi koordináta-rendszerbeli reprezentációra is:

$$\operatorname{grad} u \underset{(r,\vartheta,\varphi)}{=} \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi. \tag{78}$$

Alkalmazás A gömbi koordináta-rendszerbeli alak például akkor fog kelleni, mikor meg szeretnénk határozni a dipólus elektromos terét, mely forgásszimmetria miatt legegyszerűbben gömbi koordináta-rendszerben tárgyalható, és $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$ alakban írható fel (lásd 2. gyakorlat).

Bizonyítás: A ϑ és φ koordinátáknál megjelenő szorzótényezőkre a példatár *metrikus együtthatóként* hivatkozik [2]. Érdemes lehet megnézni, hogyan jönnek ezek ki [5].

- (78):
  Tekintsük az $u(\vec{r})$ skalármező infinitezimális megfelelőjét:

$$\mathrm{d}u(\vec{r}) = u(\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}) - u(\vec{r}). \tag{79}$$

  A gradiens definíciójából (74) következően (ugyanis $\vec{e}$-nek nem muszáj egységvektornak lennie):

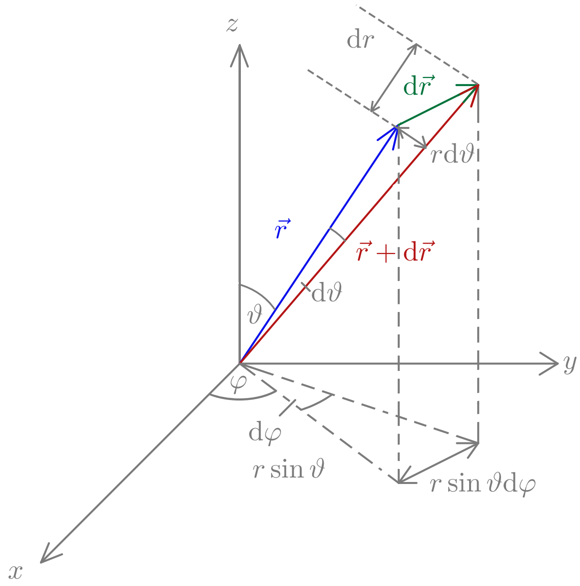
$$\mathrm{d}u(\vec{r}) = \operatorname{grad} u(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{80}$$

  Alkalmazva a láncszabályt (16):

$$\mathrm{d}u(\vec{r}) = \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial \vartheta}\mathrm{d}\vartheta + \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi. \tag{81}$$

  A $d\vec{r}$ infinitezimális elmozdulás a 11. ábra alapján a következőképp írható fel:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\vartheta\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi \tag{82}$$



11. ábra. A gradiens szemléltetése gömbi koordináta-rendszerben

A gradienst az alábbi alakban keressük:

$$\operatorname{grad} u(\vec{r}) = \alpha \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial r}\vec{e}_r + \beta \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta + \gamma \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi. \tag{83}$$

A (80) szorzatot kifejtve, kihasználva az ortogonalitást, a (82) és (83) összefüggések behelyettesítésével az alábbi egyenletet adódik, amennyiben (80)-at egyenlővé tesszük (81)-cel:

$$\alpha \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial r}\mathrm{d}r + \beta \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial \vartheta} r\mathrm{d}\vartheta + \gamma \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial \varphi} r\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial \vartheta}\mathrm{d}\vartheta + \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi, \tag{84}$$

melyet megoldva a keresett együtthatók:

$$\alpha = 1, \tag{85}$$

$$\beta = \frac{1}{r}, \tag{86}$$

$$\gamma = \frac{1}{r\sin\vartheta}. \tag{87}$$

6.1.2. Vektormező divergenciája

Adott egy V térfogat, melynek $\vec{n}$ normálvektorral kifelé irányított határa az $S(V)$ felület. Egy $\vec{a}$ vektormező *forráserősségét* vizsgáljuk egy $P \in V$ pontban úgy, hogy a V térfogatot S(V) felület segítségével zsugorítjuk a P pontra azzal a feltétellel, hogy P továbbra is V része legyen. Ha ezt leosztjuk a köbtartalommal, akkor a kapott mennyiséget divergenciának nevezzük, mely megadja az $\vec{a}$ vektormező *forrássűrűségét*, amennyiben az érték a P pontot tartalmazó V térfogat megválasztásától független:

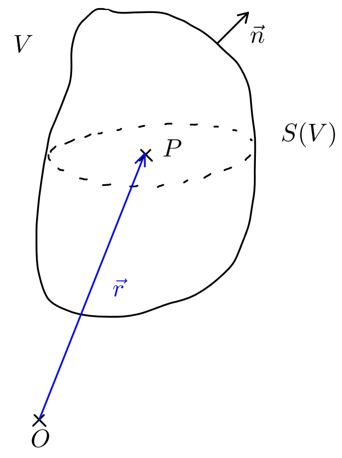
$$\operatorname{div} a(\vec{r}) \triangleq \lim_{|S|\to 0, P\in V} \frac{1}{|V|} \oint_{S(V)} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{88}$$

A divergencia egy másik értelmezés szerint a deriváltoperátor *skalárinvariánsa* [6], azaz a Jacobi-mátrix főátlóbeli elemeinek összege. Descartes koordináta-rendszerben:

$$\operatorname{div} \vec{a}(\vec{r}) \underset{(x,y,z)}{=} \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{89}$$

A félév során más koordináta-rendszerbeli alakra nem lesz szükségünk. A divergenciát megadhatjuk a nabla-operátor segítségével is:

$$\operatorname{div} \vec{a}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{a}. \tag{90}$$

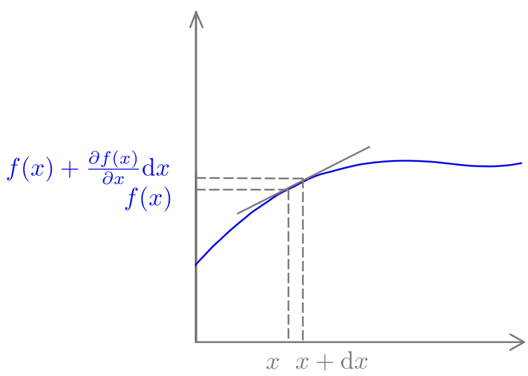


12. ábra. A divergencia szemléltetése

Alkalmazás: Minden olyan esetben, mikor az elektromos vagy mágneses Gauss-törvényt alkalmazzuk.

Bizonyítás:

- (89):
  A fent ismertetett kétféle értelmezés természetesen ekvivalens. Ennek belátására alkalmazzuk a a (88) definíciót, és mutassuk meg, hogy ebből megkapható a Jacobi mátrix főátlóbeli elemeinek összege [7]. Tekintsünk ehhez Descartes koordináta-rendszerben egy infinitezimálisan kicsiny, $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ térfogatú téglatestet és egy ebben a térrészben értelmezett $\vec{a}(\vec{r})$ vektormezőt (14. ábra). Természetesen hasonló elemi elrendezés más bázisban is található. Összegezük a ki- és bejövő fluxusokat a téglatest minden szemközti oldalpárjára.



13. ábra. $f(x)$ értékének számítása az $x + \mathrm{d}x$ pontban

Ahhoz, hogy meggondoljuk, mennyi a kijövő fluxus, meg kell határoznunk a vektormező értékét $x + \mathrm{d}x$, y+dy és $z + \mathrm{d}z$ helyeken. Amennyiben ez nem nyilvánvaló a láncszabály alapján (16), tekintsünk analógiaként egy $y = f(x)$ egyenlettel adott egyváltozós függvényt, mely a 13. ábrán látható. Meg szeretnénk határozni a függvény értékét az $x + \mathrm{d}x$ helyen. Illesszünk ehhez az $(x + \mathrm{d}x, f(x + dx))$ pontra egy egyenest, melynek meredeksége a $\mathrm{d}x$ távolság infinitezimális voltából adódóan $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$. Ennek egyenlete:

$$f(x) - y_0 = \frac{\partial f(x)}{\partial x} (x - (x + \mathrm{d}x)) . \tag{91}$$

Innen:

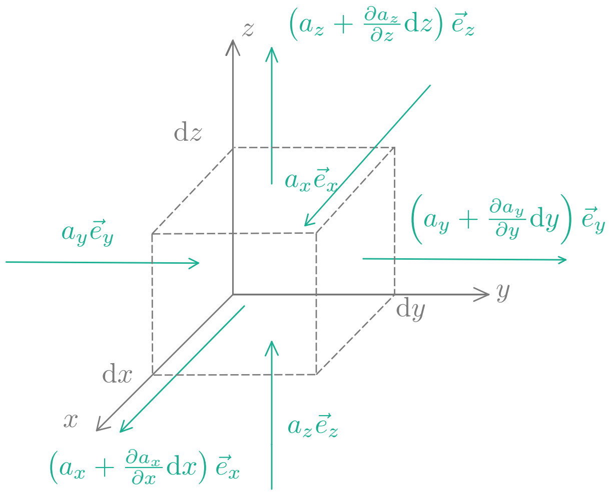
$$y_0 = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}\mathrm{d}x. \tag{92}$$

Most pedig térjünk vissza az eredeti problémához, azaz összegezzük a fluxusokat:

$$\left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial x}dx\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - a_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial y}dy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z - a_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \left(a_z + \frac{\partial a_z}{\partial z}dx\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - a_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{93}$$

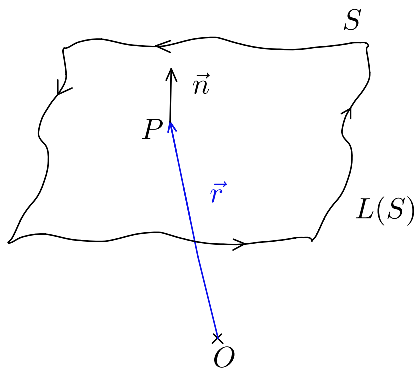
Elvégezve a megfelelő összevonásokat, előáll a divergencia kifejezése:

$$\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \operatorname{div}\vec{a}(\vec{r})\mathrm{d}V. \tag{94}$$



14. ábra. A divergencia szemléltetése Descartes koordináta-rendszerben

6.1.3. Vektormező rotációja



15. ábra. A rotáció szemléltetése

Adott egy $\vec{n}$ normálvektorral jellemezhető S felület, melynek pozitívan irányított határa az $L(S)$ görbe. Egy $\vec{a}$ vektormező *örvényerősségét* vizsgáljuk egy $P \in V$ pontban úgy, hogy az S felületet $L(S)$ görbe segítségével zsugorítjuk a P pontra azzal a feltétellel, hogy P továbbra is S része legyen. Ha ezt leosztjuk a felszínnel, akkor megkapjuk az $\vec{a}(\vec{r})$ vektormező *rotációjának* és az S felületnek normálvektorának skaláris szorzatát.
A *rotáció* megadja az $\vec{a}$ vektormező *örvénysűrűségét*, amennyiben az érték a P pontot tartalmazó S felület megválasztásától független:

$$\vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}) \triangleq \lim_{|L|\to 0, P\in V} \frac{1}{|S|}\oint_{L(S)} \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{l}. \tag{95}$$

Egy másik értelmezés szerint a rotáció egy $\vec{a}(\vec{r})$ vektormező deriváltoperátorának aszimetrikus részének *vektorinvariánsának* a kétszerese [6]. Hogy ez pontosan mit jelent, az túlmutat e jegyzet keretein, a tárgy szempontjából pedig nem lényeges. Legyen elég annyi, hogy Descartes koordináta-rendszerben a következő determinánssal fejezhető ki:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}) \underset{(x,y,z)}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{96}$$

A fenti determináns kifejtésével (sakktábla-szabállyal) megadhatjuk vektorkomponensek összegeként:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}) \underset{(x,y,z)}{=} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z. \tag{97}$$

A rotáció kifejezése *nabla-formalizmussal*:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{a}. \tag{98}$$

Gömbi koordináta-rendszerbeli alakja:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}) \underset{(r,\vartheta,\varphi)}{=} \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\vartheta} & \frac{\vec{e}_\vartheta}{r\sin\vartheta} & \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r a_\vartheta & r a_\varphi \sin\vartheta \end{vmatrix}. \tag{99}$$

Alkalmazás: A gömbi koordináta-rendszerbeli alakra akkor lesz szükségünk, mikor a *Hertz-dipólus* teljes terét szeretnénk megadni. (Ez gyakorlaton nem szerepel, majd valamikor a félév vége felé előadáson).

Bizonyítás:

- (97) [7]:
  A (93)-hez hasonlóan megkaphatjuk a Descartes koordináta-rendszerbeli alakot, amennyiben x, y, z irányokban egy-egy infinitezimális dS felülettel rendelkező téglalap pozitívan irányított határa mentén összegezzük a vektormező örvényeit (16. ábra). Az x irányú összetevő:

$$\left(a_z + \frac{\partial a_z}{\partial y}dy\right)\mathrm{d}z - \left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial z}dz\right)\mathrm{d}y - a_z\mathrm{d}z + a_y\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{100}$$

  Mindhárom síkra elvégezve az összegzést, éppen ugyanazt kapjuk, mint a (97) determináns kifejtésével.

- (99):
  A nabla-operátor gömbi koordináta-rendszerbeli alakjából kaphatjuk meg, felhasználva a (98) összefüggést.

6.2. Másodrendű differenciáloperátorok

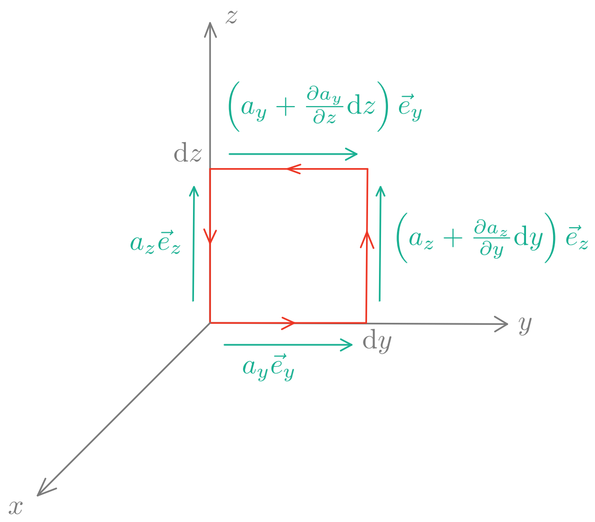
6.2.1. Skaláris Laplace-operátor

A *skaláris Laplace-operátor* definíciója:

$$\Delta u \triangleq \operatorname{div}(\operatorname{grad} u). \tag{101}$$

Descartes koordináta-rendszerben megkapható a nabla-operátor önmagával vett skaláris szorzataként:

$$\Delta u \underset{(x,y,z)}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u. \tag{102}$$



16. ábra. A rotáció szemléltetése Descartes koordináta rendszerben

Alkalmazás: Az elektrosztatikára vonatkozó parciális differenciálegyenlet (PDE) *lineáris, homogén, izotrop* közeg esetén:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{103}$$

Poisson-típusú, azaz felírható

$$\mathrm{div}(-c\,\mathrm{grad}\,u) = f \tag{104}$$

alakban, ahol ϕ az elektromos skalárpotenciál, ρ a térfogati töltés, ε az elektromos permittivitás. Ha az általunk vizsgált tartomány nem tartalmaz forrást, azaz $\rho = 0$, akkor az erre vonatkozó PDE az ún. *Laplace*-egyenlet:

$$\Delta\phi = 0. \tag{105}$$

6.2.2. Vektoriális Laplace-operátor

A *vektoriális Laplace-operátor* definíciója:

$$\Delta\vec{a}(\vec{r}) \triangleq \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{a}). \tag{106}$$

Egy vektormező rendezőnként skalármezőnek tekinthető. Descartes koordináta-rendszerben megkaphatjuk a $\Delta\vec{a}$ vektormezőt, ha ezekre alkalmazzuk a skaláris Laplace-operátort:

$$\Delta\vec{a}(\vec{r}) \underset{(x,y,z)}{=} \Delta a_x\vec{e}_x + \Delta a_y\vec{e}_y + \Delta a_z\vec{e}_z. \tag{107}$$

Alkalmazás: A stacionárius áramok mágneses terére vonatkozó PDE:

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{J}, \tag{108}$$

mely rendezőnként *Poisson*-egyenletre vezet. $\vec{A}$ a *mágneses vektorpotenciál*, melyet a $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ összefüggés definiál. A (108) egyenlet $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$, az ún. *Coulomb*-mérték mellett érvényes.

7. Tételek, azonosságok

7.1. Helmholtz-féle felbontási tétel

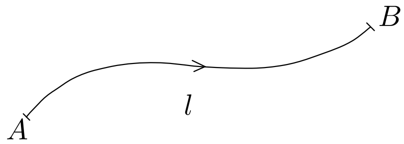
Bármely olyan tetszőleges vektormező felbontható egy *örvénymentes* és egy *forrásmentes* vektormező összegére, melyre igaz, hogy elég gyorsan tart a 0-hoz a végtelenben, azaz kellően *sima*. Tehát

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_d, \tag{109}$$

ahol $\mathrm{div}\,\vec{a}_r = 0$ és $\mathrm{rot}\,\vec{a}_d = \vec{0}$. A felbontás additív konstanstól eltekintve egyértelmű.

Alkalmazás: A tétel közvetlen következménye, hogy egy vektormezőt egyértelműen meghatároznak a forrásai és örvényei, azaz a rotációját és a divergenciáját is meg kell adnunk. Például a (108) PDE esetén a vektorpotenciál bevezetésénél szükségünk van a divergencia megkötésére is, ezért élünk a mértékválasztással.

7.2. Newton–Leibniz-tétel (gradiens tétel)



17. ábra. A Newton–Leibniz-tétel szemléltetése

Adott egy u skalármező. Legyen l egy tetszőleges görbe, melynek két végpontja A és B, irányítása mutasson A-ból B-be. Amennyiben a tér *potenciálos*, azaz $\mathrm{grad}\, u$ értelmezve van a vizsgált tartományon, akkor e skalármező gradiensének L görbén vett vonalmenti integrálja előáll az u skalármező L görbe végpontjában és kezdőpontjában felvett értékének különbségeként:

$$\int_L \mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{d}\vec{l} = u(B) - u(A). \tag{110}$$

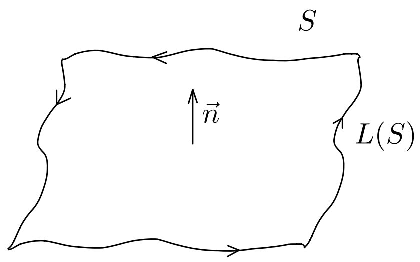
Tehát az integrál értéke nem függ L görbe alakjától, csupán a két végpont érdekes. Amennyiben A pont megegyezik B-vel, azaz ha L zárt, akkor az eredmény természetesen zérus.

Alkalmazás: A Newton–Leibniz-tétel felhasználásával értelmezünk két pont között feszültséget potenciálkülönbségként sztatikus és stacionárius problémák esetén:

$$U = \int_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \phi(A) - \phi(B), \tag{111}$$

ahol $\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\, \phi$, azaz mikor az elektromos tér örvénymentesnek tekinthető.

7.3. Stokes-tétel



18. ábra. A Stokes-tétel szemléltetése

Vegyünk egy $\vec{n}$ normálvektorral adott S felületet. Ennek pozitívan irányított határa az $L(S)$ görbe. Értelmezzünk itt egy $\vec{a}$ vektormezőt. Ekkor a vektormező *örvénysűrűségének* felületi integrálja megadja az *örvényerősséget* (*cirkulációt*):

$$\int_S \mathrm{rot}\, \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{L(S)} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{l}. \tag{112}$$

Alkalmazás: A Stokes-tétellel kapjuk az Ampére-féle gerjesztési törvény és a Faraday-féle indukciótörvény integrális alakját a differenciális alakból.

7.3.1. Következmény

Stokes-tételből és Newton–Leibniz-tételből közvetlenül adódik, hogy

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, u) = \vec{0}. \tag{113}$$

Alkalmazás: Sztatikus és stacionárius problémák esetén a Faraday-féle indukciótörvény alakja:

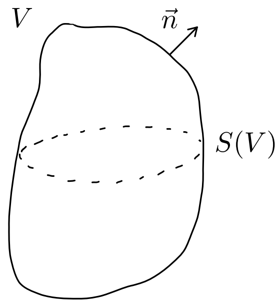
$$\mathrm{rot}\, \vec{E} = \vec{0}. \tag{114}$$

A (113) miatt bevezethetjük az *elektromos skalárpotenciált*:

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\, \phi, \tag{115}$$

mely rendszerint megkönnyíti a számításokat.

7.4. Gauss–Osztrogradszkij-tétel



19. ábra. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel szemléltetése

Legyen adott egy V térfogat, $\vec{n}$ normálvektorral kifelé irányított határa $S(V)$. Értelmezzünk itt egy $\vec{a}$ vektormezőt. Amennyiben térfogat szerint integráljuk a *forrássűrűséget*, megkapjuk a *forráserősséget*:

$$\int_V \mathrm{div}\, \vec{a} \mathrm{d}V = \int_{S(V)} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \tag{116}$$

Alkalmazás: A Gauss–Osztrogradszkij-tétellel kapjuk az elektromos és mágneses Gauss-törvény integrális alakját a differenciális alakból.

7.4.1. Következmény

A Gauss–Osztrogradszkij- és a Stokes-tétel következménye:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \vec{a}) = 0. \tag{117}$$

Alkalmazás: Az Ampére-féle gerjesztési törvény:

$$\mathrm{rot}\, \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{118}$$

Véve mindkét oldal divergenciáját, és felhasználva az elektromos Gauss-törvényt:

$$\mathrm{div}\, \vec{D} = \rho. \tag{119}$$

megkaphatjuk a *folytonossági egyenletet*:

$$\mathrm{div}\, \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{120}$$

7.5. Egyéb azonosságok

$$\operatorname{div}(\vec{a_1} \times \vec{a_2}) = \vec{a_2} \cdot \operatorname{rot} \vec{a_1} - \vec{a_1} \cdot \operatorname{rot} \vec{a_2} \tag{121}$$

$$\operatorname{div}(u_1 \operatorname{grad} u_2) = \operatorname{grad} u_1 \operatorname{grad} u_2 + u_1 \operatorname{div}(\operatorname{grad} u_2) \tag{122}$$

Alkalmazás:

- (121): Lásd *energiamérleg* levezetése (előadáson).
- (122): Lásd *elektrosztatikus tér energiájának* levezetése *elektromos skalárpotenciál*lal (előadáson).

Bizonyítás Az előbb tárgyalt két azonosság bizonyítása igen egyszerű, lényegében szorzat deriválásán alapszik. Ezért a levezetésekhez, ahol előkerülnek, nem muszáj megjegyezni.

- (121):
  A könnyebb áttekinthetőség kedvéért írjuk át az állítást *nabla-formalizmussal*:

$$\nabla \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{a}_2 \cdot \nabla \times \vec{a}_1 - \vec{a}_1 \cdot \nabla \times \vec{a}_2. \tag{123}$$

  A *divergencia* lényegében deriváltak összege, így alkalmazhatjuk a láncszabályt (16):

$$\nabla \cdot (\vec{a}_1 \times a_2) = \nabla_{\vec{a_1}}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) + \nabla_{\vec{a_2}}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2). \tag{124}$$

  A vektoriális szorzatra vonatkozó szabályok alkalmazásával:

$$\nabla_{\vec{a_1}} \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{a}_2 \cdot \nabla \times \vec{a}_1 = \vec{a}_2 \cdot \operatorname{rot} \vec{a}_1, \tag{125}$$

$$\nabla_{\vec{a_2}}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = -\vec{a}_1 \cdot \nabla \times \vec{a}_2 = -\vec{a}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{a}_2. \tag{126}$$

  A két tagot összegezve igazolhatjuk az állítást.

- (122):
  Először lássuk be az alábbi állítás helyességét:

$$\operatorname{div}(u\vec{v}) = u \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \operatorname{grad} u \tag{127}$$

  Induljunk ki a divergencia definíciójából:

$$\operatorname{div}(u\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (u\vec{v})_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\vec{v}_i}{\partial x_i}. \tag{128}$$

  Láncszabállyal (16):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\vec{v}_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\vec{v}_i + \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x_i} u \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x_i} u. \tag{129}$$

  Jól látható, hogy a kapott összeg a fent kimondott állítással egyezik meg:

$$\vec{v} \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \vec{v}. \tag{130}$$

  Az eredeti állítást akkor igazoljuk, ha $\vec{v} = \operatorname{grad} u_2$.

Hivatkozások

[1] Babcsányi-Gyurmánczi-Szabó-Wettl, *Matematika feladatgyűjtemény I.*, Műegyetem Kiadó, Budapest, 2009.

[2] Bilicz Sándor, *Elektromágneses terek példatár*, Műegyetem Kiadó, Budapest, 2010.

[3] Simon András, *Komplex függvénytan*, elektronikus jegyzet
`http://math.bme.hu/ asimon/komplex.pdf`

[4] Simon András, *Többváltozós függvények*, elektronikus jegyzet
`http://math.bme.hu/ asimon/tobbvalt.pdf`

[5] Vigh Máté, Elektromágnesesség gyakorlat (emelt szint), ELTE TTK
Videófelvételek:
`https://www.youtube.com/playlist?list=PLKbalQR9uZOARGRKMYXW7YEgDwlW9wjXV`

[6] Serény György, *Formális és szemléletes vektoranalízis*, Műegyetem Kiadó, Budapest, 1998.

[7] Transzportfolyamatok villamosmérnököknek (BMETE14MX02) című tantárgy előadásai alapján