Bevezetés a számításelméletbe II.
2. zh, 2010.11.15.
Javítási útmutató

A javítási útmutató az egységes pontozás érdekében és a javítók munkájának megkönnyítésére készült, a megoldások megértetése nem célja, ezzel együtt természetesen használható erre is, a kérdésekkel ez esetben érdemes megkeresni a gyakorlatvezetőket.

Az útmutató a feladatok egy lehetséges megoldásához rendel részpontszámokat, más helyes megoldások is természetesen maximum pontot érnek, a részpontokat pedig ekkor az útmutató elveinek használatával kaphatjuk (pl. bizonyítás nélküli eredményközlés tipikusan 0 pont; kontextusba helyezett használható tételért jár pont; csak odaírt, kontextusba nem helyezett tételért viszont nem; hiányos, de befejezhető gondolatmenetért jár részpontszám; hosszú, de sehova sem vezető fejtegetésekért nem, stb.).

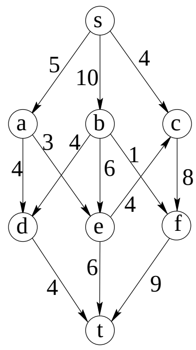
1. *Legyen G tetszőleges egyszerű gráf, C pedig a G egy maximális párosításának végpontjaiból álló halmaz. Mutassuk meg, hogy C lefogó ponthalmaz.*

   Ha C nem lefogó ponthalmaz, akkor van olyan él, aminek egyik végpontját sem tartalmazza. (3 pont)

   Ezt az élet a párosításhoz véve így egy eggyel több élű párosítást kapnánk, (5 pont)

   ami a párosítás maximalitása miatt lehetetlen. (2 pont)

2. *Határozzunk meg az ábrán látható hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális vágást.*



   Jó folyam bizonyítással 5 pont, jó vágás bizonyítással 5 pont. Javítóutas algoritmus helyes(!) használata jó eredmények nélkül max. 4 pont (helyes lépések számától függően), csak folyam és vágás minden biz. nélkül 0 pont. Ha nincs(enek) folyam(ok), de a segédgráfokból kitalálható(k), az nem automatikusan 0 pont, de persze nem teljes értékű.

3. *Egy 99 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 51. Mutassuk meg, hogy a gráf 4-szeresen (pont)összefüggő.*

   Azt kéne belátni, hogy a gráfból legfeljebb 3 csúcsot elhagyva a gráf összefüggő marad (2 pont)

   és hogy a gráfnak van legalább 5 pontja (ami persze nyilvánvaló). (1 pont)

Bármely 3 csúcsot elhagyva a gráfnak 96 csúcsa lesz (1 pont)

és minden csúcs foka legalább 48, (2 pont)

hiszen az egyszerűség miatt a fokok legfeljebb 3-mal csökkennek. (2 pont)

A kapott gráf tehát biztosan összefüggő, pl. a Dirac-tétel miatt (egyszerűség!), hiszen lesz benne Hamilton-kör. (2 pont)

Az összefüggőség persze tétel nélkül is igazolható: ha lenne legalább két komponense a gráfnak, akkor a legkisebbikben nem lehetnének 48 fokú csúcsok (az egyszerűség miatt).

Háromnál kevesebb csúcs elhagyása esetén hasonlóan járunk el, ha valaki erről elfeledkezik, azért nem muszáj pontot levonni (még a definíciónál sem).

Megjegyzés: a három csúcs elhagyása után kapott gráfban van Hamilton-kör, így a gráf ötszörösen is összefüggő lesz. Ha valaki a négyszeres összefüggőséget úgy definiálja (vagy használja), hogy a gráf ötszörösen már nem lehet összefüggő, attól (ha a megoldása egyébként tökéletes) 2 pontot vonjunk le.

4. *Mutassuk meg, hogy tetszőleges n egészre $3n^2 - 5n - 1$ és $n^2 - 2n$ relatív prímek.*

   Legyen d az lnko. (1 pont)

   Ekkor $d | 3n^2 - 5n - 1 - 3(n^2 - 2n) = n - 1$. (3 pont)

   És így $d | n^2 - 2n - (n-1)^2 = 1$. (5 pont)

   (Ez valószínűleg két lépésben fog inkább menni, ezért (is) jár érte ennyi pont.)

   Így d (mivel pozitív - ez el is maradhat) csak 1 lehet. (1 pont)

5. *Adjuk meg az összes olyan pozitív egész n-et, melyre $\varphi(n) = \frac{n}{2} + 1$ teljesül, ahol φ az Euler-féle φ-függvény.*

   Mivel $\varphi(n)$ egész, n-nek párosnak kell lennie. (2 pont)

   Ezért a nála kisebb páros számokhoz nem relatív prím, (5 pont)

   tehát $\varphi(n)$ legfeljebb $\frac{n}{2}$ lehet, (2 pont)

   így az egyenlőség egyetlen számra sem teljesül. (1 pont)

6. *Határozzuk meg $107^{123^{145}}$ utolsó két számjegyét (a tízes számrendszerben).*

   Az utolsó két számjegy meghatározásához a számot mod 100 kell vizsgálnunk. (1 pont)

   Mivel 107 és 100 relatív prímek (107 helyett persze érdemesebb a vele kongruens 7-tel dolgozni), alkalmazhatjuk az Euler-Fermat-tételt. (1 pont)

   $\varphi(100) = 40$, (1 pont)

   így $107^{40} \equiv 1 \pmod{100}$, (1 pont)

   ezért 123^{145} 40-nel való osztási maradékára vagyunk kíváncsiak. (1 pont)

   Mivel 123 és 40 relatív prímek, (123 helyett 3-mal is dolgozhatunk), ismét alkalmazhatjuk az Euler-Fermat-tételt. (1 pont)

   $\varphi(40) = 16$, (1 pont)

így $123^{16} \equiv 1 \pmod{40}$, (1 pont)

vagyis ezúttal 145 16-tal való osztási maradékára vagyunk kíváncsiak, ami 1. (1 pont)

Így $123^{145} \equiv 3 \pmod{40}$, ahonnan $107^{123^{145}} \equiv 7^3 \equiv 343 \equiv 43 \pmod{100}$. (1 pont)