

1. feladat (25 pont)

$$f(x) = \frac{\sin(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 4} \quad (\mathbb{R} \text{ lehető legbővebb részhalmazaán értelmezve})$$

Vizsgálja meg, hogy az f függvény hol folytonos, hol nem, és a szakadási helyeken a bal és jobboldali határértékek kiszámolása után állapítsa meg azok jellegét!

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}, \text{ f itt folytonos } \textcircled{4}$$

-2-ben:

10

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sin(x^2 - 3x + 2)}{(x+2)(x-2)} = \pm\infty$$

$\sin(12) < 0$ ②
 $-4 < 0$ ②
 0^+ ②
 szorzat ②
 Másodfajú szakadás ②

+2-ben:

11

$$\lim_{x \rightarrow +2^+} \frac{\sin((x-2)(x-1))}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x-1}{x-1} = \frac{1}{4}$$

$\sin$ ②
 $\frac{x-1}{x-1} = 1$ ②
 $\frac{x-1}{x+2} \rightarrow \frac{1}{4}$ ①
 elsőfajú, megszüntethető ②

2. feladat (7+7=14 pont)

Határozza meg a következő függvények deriváltját! (Számolási szabályokkal.)

$$(a) \quad f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$$

$$(b) \quad g(x) = \operatorname{arctg}(3\sqrt{x}) \cdot \operatorname{arsh}(2x+5) \quad (x > 0)$$

$$a) \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \quad \textcircled{7}$$

$$b) \quad g'(x) = \frac{1}{1+9x} \cdot \frac{3}{2\sqrt{x}} \operatorname{arsh}(2x+5) + \operatorname{arctg}(3\sqrt{x}) \cdot \frac{2}{\sqrt{1+(2x+5)^2}}$$

Após határérték 2p levonás hibáérték. ⑦

3. feladat (13+13=26 pont)

Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = ?$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(5x^2)}{\operatorname{tg}^2(x)} = ?$

a) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} \stackrel{(4)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x} \stackrel{(2)}{=} e^0 = 1 \quad (1)$

$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\stackrel{L'H}{=}} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0 \quad (2)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(5x^2)}{\operatorname{tg}^2(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{\stackrel{L'H}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{10x}{\sqrt{1-(5x^2)^2}}}{2 \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos^2 x}} \stackrel{(3)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-25x^4}} \stackrel{(2)}{=} 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5 \quad (2)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\stackrel{L'H}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1/\cos^2 x} = 1 \quad (3)$

4. feladat (7+10+10+8=35 pont)

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot a fenti függvényen, azaz

- Határozza meg a függvény szimmetriáját, zérushelyeit, limeszét $\pm\infty$ -ben!
- Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol a függvény monoton növekvő illetve csökkenő! Határozza meg a lokális szélsőértékhelyeket!
- Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol a függvény konvex illetve konkáv! Határozza meg az inflexiós pontokat!
- Vázlatosan ábrázolja a függvényt! Határozza meg f értékkészletét!

a) $D_f = \mathbb{R}; f(x) = 0 \iff x = 0$; f páratlan

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

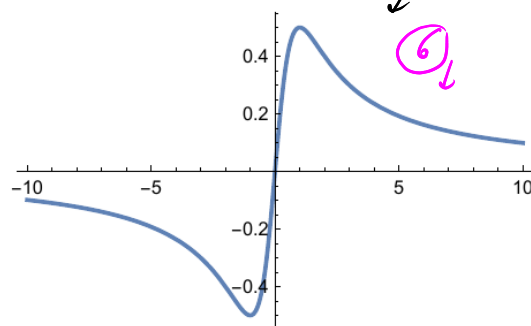
b) $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \iff x = \pm 1$

(vízszintes aszimptota: $y = 0$)

$f''(x) = \frac{2x(-3+x^2)}{(1+x^2)^3} = 0 \iff x = 0$ vagy $x = \pm\sqrt{3}$

$R_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f'	-	0	+	0	-
f	$\searrow$	$\min: -\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\max: \frac{1}{2}$	$\searrow$



x	$x < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
f''	-	0	+	0	-	0	+
f	$\cap$	$\text{infl}: -\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\cup$	$\text{infl}: 0$	$\cap$	$\text{infl}: \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\cup$