Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2017. november 30.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}, \underline{b}+\underline{d}$ vektorok által generált altér dimenzióját.

* * * * *

Belátjuk, hogy az $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}$ vektorrendszer a szóban forgó altér (nevezzük V-nek) bázisa, amiből következik, hogy V dimenziója 3, hiszen van 3 elemű bázisa. (2 pont)
Először belátjuk, hogy az $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}$ vektorok függetlenek. Írjuk fel a $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}$ vektorok egy lineáris kombinációját az α, β, γ együtthatókkal és vizsgáljuk meg, hogy ez mikor lehet $\underline{0}$. (1 pont)
Az

$$\alpha(\underline{a}+\underline{b}) + \beta(\underline{c}+\underline{d}) + \gamma(\underline{a}+\underline{c}) = \underline{0}$$

egyenlőségben a zárójeleket felbontva, majd átrendezve

$$(\alpha+\gamma)\underline{a} + \alpha\underline{b} + (\beta+\gamma)\underline{c} + \beta\underline{d} = \underline{0}$$

adódik. (1 pont)
Mivel az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok lineárisan függetlenek (hiszen bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben), ez csak akkor lehetséges, ha $\alpha+\gamma=0$, $\alpha=0$, $\beta+\gamma=0, \beta=0$. (2 pont)
Ebből persze $\gamma=0$ is adódik, így a kérdéses vektorok egy lineáris kombinációja csak akkor lehet a nullvektor, ha mindhárom együttható 0, így az előadáson tanult tétel szerint a vektorok függetlenek. (1 pont)
Most belátjuk, hogy $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}$ generálja V-t. Ehhez elég belátni, hogy $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}$ egy alkalmas lineáris kombinációja előállítja a $\underline{b}+\underline{d}$ vektort, hiszen ekkor minden olyan vektor is előáll a lineáris kombinációjukként, ami V-ben van. (2 pont)
Mivel $\underline{b}+\underline{d} = (\underline{a}+\underline{b}) + (\underline{c}+\underline{d}) - (\underline{a}+\underline{c})$, a bizonyítást befejeztük. (1 pont)

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 9x_2 + 16x_3 &= 17 \\ x_1 + p \cdot x_2 + p \cdot x_3 &= 5 \end{aligned}$$

* * * * *

Gauss-eliminációval az egyenletrendszert az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1-p & 1-p \end{array}\right)$$

alakra hozzuk. (2 pont)
Ha $p \neq 1$, akkor a harmadik sort $(1-p)$-vel osztva folytatjuk az eliminációt, (1 pont)
melynek végén az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk. (1 pont)
Innen a megoldás $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$. (1 pont)
Ha $p = 1$, akkor a harmadik sor csupa 0 sor, így töröljük, (1 pont)
majd az eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk. (1 pont)
Innen a megoldás $x_3 = a \in \mathbb{R}, x_1 = 4 + a, x_2 = 1 - 2a$. (3 pont)

Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le, elírásokért (ha nem lett könnyebb tőlük a feladat) nem muszáj pontot levonni.

3. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a determináns definíciója szerint. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Megmutatjuk, hogy a determináns definíciójában szereplő, előjelesen összeadandó szorzatok között egyetlen nemnulla szorzat szerepel. (1 pont)
Ha ugyanis nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a harmadik sorból csak a 6-ot választhatjuk, így az ötödik sorból a 2-t már nem, csak az 1-et választhatjuk (mert a harmadik oszlopból már vettünk elemet). Hasonlóan folytatva, az első sorból csak az 1-et, ezért a másodikból csak a 3-at, végül a negyedikből csak a 3-at választhatjuk, így csakugyan egyetlen nemnulla szorzatot kapunk, a $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3$-at. (3 pont)
Ehhez az egyetlen nemnulla szorzathoz tartozó permutáció a 4,1,3,2,5 (hiszen az első sorból a negyedik elemet vettük, a másodikból az elsőt, stb). (2 pont)
Ennek a permutációnak az inverziószáma 4 (hiszen 4 inverzióban álló pár van: $(4,1)$, $(4,3)$, $(4,2)$, $(3,2)$). (2 pont)
Mivel az inverziószám páros, ezért a szorzathoz tartozó előjel: $+$, (1 pont)
a determináns értéke tehát 54. (1 pont)

4. a) Határozzuk meg azon p valós értékeket, melyekre az alábbi mátrixnak van inverze.
b) $p = 3$ esetén adjuk meg az inverz mátrix bal felső elemét.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & p \\ 6 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

a) Gauss-eliminációval, kifejtési tétellel vagy akár a definíció alapján gyorsan kideríthető, hogy a mátrix determinánsa $-2p$, erre 2 pontot adjunk, ha minden helyes. Ismert, hogy inverz akkor és csak akkor létezik, ha a determináns nem 0, így az a) feladatra a válasz az, hogy pontosan $p \neq 0$ esetén létezik az inverz, erre 1 pontot adjunk.
b) Gauss-eliminációval a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 13 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

kibővített együtthatómátrixot az

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

lépcsős alakra hozzuk, (3 pont)
majd az eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk, (3 pont)

ahonnan az inverz $\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{2}{3} & -2 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, (1 pont)

a keresett bal felső elem pedig $\frac{11}{2}$. (0 pont)

Az a) feladatnál elő fog fordulni, hogy valaki az inverz keresése közben, a $p = 0$ esetben csupa 0 sort talál a mátrix eliminálásakor, az előadáson tanultak szerint ekkor kijelentheti, hogy nincs inverz. Ha valaki az inverz megadásával fejezi be a feladatot és nem adja meg a bal felső elemet (de az persze a megadott inverzből leolvasható), akkor a pontozásnak megfelelően nem kell pontot levonni. Természetesen a feladat megoldásához nem kell a teljes inverzet kiszámítani, elég annak az első oszlopát megállapítani, vagyis a leírt Gauss-eliminációk utolsó két oszlopára nincs szükség. Ha valaki így jár el, akkor ezen eljárás helyességét nem kell külön indokolnia, hiszen ez szerepelt az előadáson. Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le (akkor is, ha az érdektelen részben vannak, kivéve ha a hallgató ezen rész lényegtelen voltára kitér), elírásokért, ha attól a feladat nem lett könnyebb, nem muszáj levonni.

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját minden $x, y \in \mathbb{R}$ értékre.

$$\begin{pmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & y & y \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. A rang azonos a lineárisan független sorok maximális számával. (1 pont)
Az első két sor független, hiszen az utolsó két koordináta mutatja, hogy egyik sem számszorosa a másiknak. (2 pont)

A rang megállapításához az újonnan érkező vektor lemmája miatt most már elég azt vizsgálni, hogy a harmadik sor előáll-e az első kettő lineáris kombinációjaként. (2 pont)
Ha $x = 0$, akkor a harmadik sor nem lehet az első kettő lineáris kombinációja, az első koordináták miatt. (1 pont)
Ha $x \neq 0$, akkor az első koordináták vizsgálatából az derül ki, hogy alkalmas lineáris kombinációhoz az első sort $\frac{1}{x}$-szer kell venni, (1 pont)
ahonnan a harmadik koordinátákat vizsgálva $y = \frac{1}{x}$ kell legyen. (1 pont)
Ekkor a harmadik sor épp az első $\frac{1}{x}$-szerese, vagyis ilyenkor a sorok nem függetlenek. (1 pont)
Ezek alapján: $x = 0$ esetén a rang 3, $x \neq 0, y \neq \frac{1}{x}$ esetén a rang szintén 3, végül $x \neq 0, y = \frac{1}{x}$ esetén (vagyis amikor $xy = 1$) a rang 2. (1 pont)
Összefoglalva: az derült ki, hogy ha $xy = 1$, akkor a rang 2, különben pedig 3. (0 pont)

Második megoldás. A rangot Gauss-eliminációval állapítjuk meg: az nem lesz más, mint a lépcsős alakban a vezéregyesek száma. (1 pont)
Ha $x = 0$, akkor az első és a harmadik sor cseréje után (1 pont)
elő is állt a lépcsős alak 3 vezéregyessel. (1 pont)
Ha $x \neq 0$, akkor osztunk x-szel, majd az első sort levonjuk a harmadikból. (2+1 pont)
Ekkor a mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y - \frac{1}{x} & y - \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

alakú, vagyis megvan a második vezéregyes is, (1 pont)
a harmadikat pedig pontosan akkor tudjuk létrehozni, ha $y \neq \frac{1}{x}$. (2 pont)
Vagyis $x \neq 0$ esetén a rang 3, ha $y \neq \frac{1}{x}$ és 2, ha $y = \frac{1}{x}$. (1 pont)
Összefoglalva: az derült ki, hogy ha $xy = 1$, akkor a rang 2, különben pedig 3. (0 pont)

Harmadik megoldás. Ismét Gauss-eliminációt használunk, de előtte felcseréljük az első és a harmadik sort, ez a rangot (a sorrang definíciója miatt, amiben a sorok sorrendje lényegtelen) nem változtatja meg. (Ha valaki a Gauss-elimináció keretében cseréli ki ezt a két sort, akkor elvileg indokolnia kéne, hogy a rang miért nem változik – hiszen nem pontosan a tanult algoritmust követi –, de ennek hiányáért nem muszáj pontot levonni.) (2 pont)
A lépcsős alakban keressük a vezéregyesek számát, (1 pont)
ehhez az első sor x-szeresét levonjuk a harmadik sorból. (2 pont)
Ekkor a mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & y & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - xy & 1 - xy \end{pmatrix}$$

alakú, vagyis megvan a második vezéregyes is, (1 pont)
a harmadikat pedig pontosan akkor tudjuk létrehozni, ha $xy \neq 1$. (2 pont)
Mindezek alapján ha $xy = 1$, akkor a rang 2, különben pedig 3. (2 pont)

6*. Egy 5×5-ös A mátrixnak pontosan hat olyan 3×3-as részmátrixa van, ami invertálható. Mutassuk meg, hogy A nem invertálható.

* * * * *

Első megoldás. A akkor és csak akkor invertálható, ha az oszlopai függetlenek (hiszen mindkét állítás azzal ekvivalens, hogy A determinánsa nem 0). (1 pont)
Ekkor akárhogy választunk az oszlopok közül hármat, azok is függetlenek lesznek, (2 pont)

vagyis az általuk meghatározott 5×3-as részmátrixok rangja 3. (1 pont)
Ezekben a mátrixokban tehát – a rangfogalmak egyenlősége miatt – létezik nem 0 determinánsú 3×3-as részmátrix. (2 pont)
Ezek a 3×3-as részmátrixok különbözők lesznek, ha különböző 3×5-ös részmátrixokból választjuk őket. (2 pont)
Mivel 3×5-ös részmátrixot 10-féleképp tudunk kiválasztani (két oszlopot kell elhagyni, az elsőt 5-, a másodikat 4-féleképp választhatjuk, de így minden párt kétszer számoltunk), ha A invertálható lenne, akkor lenne legalább 10 nem 0 determinánsú (vagyis invertálható) 3×3-as részmátrixa, amivel a bizonyítást befejeztük. (2 pont)

Második megoldás. A kifejtési tétel segítségével megmutatjuk, hogy A determinánsa 0, amiből az állítás következik. (1 pont)
Tegyük fel, hogy a determináns nem 0 és fejtsük azt ki az utolsó sor szerint. A kapott előjeles aldeterminánsok közt nyilván kell legyen 0-tól különböző, tartozzon ez a B 4×4-es részmátrixhoz. (1 pont)
B determinánsát az 1., a 2., a 3. és a 4. sora szerint kifejtve is kell hogy kapjunk olyan 3×3-as előjeles aldeterminánsokat, amik nem 0-k. (2 pont)
Ezek mind különböző invertálható részmátrixokhoz tartoznak, melyek egy kivétellel mind tartalmaznak elemeket az 1. sorból. (1+1 pont)
Fejtsük most ki A determinánsát az első sor szerint. (1 pont)
A fentiekhez hasonlóan kell kapnunk egy C 4×4-es részmátrixot, melynek determinánsa nem 0, és itt is kapunk 4 különböző invertálható 3×3-as részmátrixot. (1 pont)
Ezek közül azonban egyik sem tartalmaz elemeket az 1. sorból, (1 pont)
így már 7 különböző nem 0 determinánsú 3×3-as részmátrixot találtunk, ami ellentmondás. (1 pont)